

# 케이싱 오실레이터의 순기구학 해석

남 윤 주\* · 박 명 관†

(2004년 4월 9일 접수, 2004년 11월 9일 심사완료)

## Forward Kinematic Analysis of Casing Oscillator

Yun-Joo Nam and Myeong-Kwan Park

**Key Words :** Casing Oscillator (케이싱 오실레이터), Forward Kinematics(순기구학), Parallel Manipulator(병렬형 매니퓰레이터)

### Abstract

This paper presents the forward kinematics of the Casing Oscillator that is a construction machine. The Structure of the Casing Oscillator is similar to those of 4 degree-of-freedom mechanisms with a redundancy. With analytical (geometrical) methods, the solutions of the forward position kinematics problem are significantly found by both solving an 8<sup>th</sup>-order polynomial equation in one unknown variable and using one over-constraint geometrical equation which can be derived under the condition of a redundancy. The proposed forward kinematics has closed-form solutions and allows Auto-Balancing control of the moving platform in real time. Numerical examples are presented and the results are verified by an inverse kinematics analysis.

### 1. 서 론

현재 건설현장에서, 건축물을 위한 기초작업은 주로 외력을 이용하여 H-빔 또는 파일 등을 두들겨 땅속에 삽입하거나, 중장비를 동원하여 땅을 파낸 후 거푸집을 땅속에 설치하는 방식으로 대부분 이루어지고 있다. 이러한 방식들은 소음 및 진동을 야기할 뿐만 아니라 주위 건축물의 균열을 유발하여 안전성에 심각한 문제를 초래하고 있다. 따라서 건축 기초작업을 위한 다양한 건축 공법들이 연구되고 있으며, 이러한 결과들 중 하나가 Benato 공법이다.

Benato 공법은 다음과 같이 이루어진다. 먼저 대구경 증공형 파일인 케이싱(casing)을 지면으로부터 목표 깊이까지 외부 토크를 이용하여 삽입한 후, 케이싱 내부의 흙을 굴착 및 배토하여 철근이나 H-빔 등의 응력재를 삽입한다. 다음으로 케이

싱 내부를 콘크리트로 타설한 후 케이싱을 인발하여 기초 작업을 완료한다. 이때 케이싱을 지면에 삽입하거나 인발하기 위해 설치된 유압 구동식 건설 중장비를 케이싱 오실레이터(casing oscillator)<sup>(1,2)</sup>라 한다.

케이싱을 지면에 최초 삽입할 때 지면의 기울기와는 관계없이 해수면에 항상 수직인 방향을 유지하는 것이 중요하다. 그러나 현재 건설현장에서는 작업도중 케이싱에 기울어짐이 발생하는 경우, 기중기나 크레인과 같은 중장비를 사용하여 물리적인 방법으로 수직을 보정하고 있다. 따라서 이러한 방법으로는 수직 삽입의 정확도가 떨어질 뿐만 아니라 보정 작업을 위한 추가의 시간이 요구된다. 특히 외력에 의해 케이싱에 피로가 누적됨으로써 구조물의 강도를 약화시켜 사고의 위험이 뒤따른다.

이러한 문제를 해결하기 위해, 케이싱을 항상 해수면에 수직한 방향으로 유지시켜 주는 Auto-Balancing 기능을 가진 케이싱 오실레이터에 관한 연구가 중요하다. Auto-Balancing 시스템을 구현하기 위해서는 케이싱 오실레이터의 동작 특성에 관한 연구, 즉 기구학 해석이 선행되어야 하며 이전

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

E-mail : mkpark1@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2464 FAX : (051)514-0685

\* 부산대학교 대학원 지능기계공학과

연구에서 역기구학 및 작업영역 해석<sup>(1)</sup>이 수행된 바 있다.

본 논문에서는 케이싱 오실레이터의 순기구학 해석을 수행하고자 한다. 케이싱의 기울어짐이 발생하는 원인은 크게 케이싱 오실레이터가 설치되는 불규칙한 지면의 형태와 케이싱 오실레이터 자체의 구조적 문제를 들 수 있다. 전자의 경우는 케이싱의 삽입 작업 위치에 대한 정보를 작업전에 측정을 통해 제거 가능하나,<sup>(2)</sup> 후자와 같이 케이싱 오실레이터의 동작 시 발생하는 불필요한 미소의 롤, 피치 운동을 제거하기 위해서는 케이싱 오실레이터의 위치 기구학적 정보를 필요로 한다. 따라서 케이싱 오실레이터의 각 실린더의 길이 변화에 따른 상판의 위치/자세의 변화에 관한 정보는 Auto-Balancing 시스템 구현에 필수적이다.

케이싱 오실레이터는 병렬형 매니플레이터(parallel manipulator)와 유사한 구조이므로, 병렬형 매니플레이터의 순기구학(forward kinematics) 해석에 관한 연구를 응용하여 본 연구를 수행하였다.

직렬형 매니플레이터에 비해 병렬형 매니플레이터의 역기구학 해석 과정은 간단하고 닫힌 해를 갖는 반면 순기구학 해석 과정은 각 링크의 복잡한 기구학적 구속조건으로 인한 고차 비선형 방정식을 포함하기 때문에 일반적으로 그 유도과정이 복잡하고 닫힌 해를 갖지 않을 수도 있다. 따라서 닫힌 해를 가지면서 수렴속도가 빠른 순기구학 해를 찾기 위한 연구가 계속되고 있다.

병렬형 매니플레이터의 순기구학 해석은 크게 해석적 방법, 수치 해석적 방법, 여분의 센서를 이용하는 방법 및 추정기 설계에 의한 방법 등으로 크게 분류될 수 있다. 해석적 방법<sup>(3-9)</sup>은 고차 비선형 방정식의 해를 대수적 방법으로 구하기 때문에 닫힌 해를 얻을 수 있다. 그러나 계산과정에서 발산할 가능성을 포함하고 있으며, 다수개의 해가 얻어지므로 정확 해를 선정하기 위한 추가적인 문제를 가진다. 수치해석적 방법<sup>(10-12)</sup>은 Newton-Raphson 방법으로 주로 구해진다. 역기구학 식을 근거로 목적함수를 제안하고, 그 목적 함수의 해를 구하는 방법으로 단순한 알고리즘에 의해 해를 얻을 수 있다. 그러나 초기값에 따라 서로 다른 해가 구해 질 수 있을 뿐만 아니라 수렴속도의 차이가 발생한다. 또한 계산 시간이 길어 실시간 제어에 불리하며, 특이점(singularity)에 대한 해석이 선행되어야 한다. 여분의 센서를 이용하는 방법<sup>(13-17)</sup>은 여분의 센서를 추가로 설치하여 순기구학식을 초과구속(over-constraint)함으로써 고차 비선형 방정식을 단순화시켜 유일한 닫힌 해를 구할 수

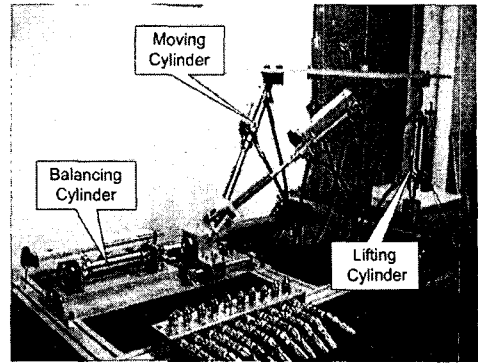


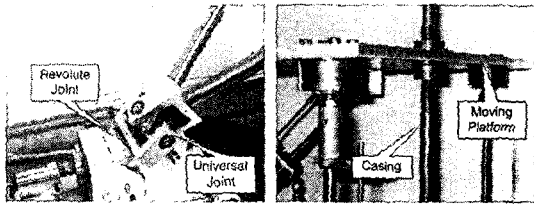
Fig. 1 Prototype of the casing oscillator

있다. 비교적 빠르고 정확하게 해를 구할 수 있는 반면, 센서 설치에 의한 공간적 제약을 받으며 센서의 성능에 크게 의존한다. 또한 센서의 추가 설치에 따른 비용문제를 가진다. 추정기 설계를 이용한 방법<sup>(18,19)</sup>은 칼만 필터와 같은 추정기를 이용하여 해를 구하는 방법으로 해를 빠르게 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 매니플레이터의 동적 특성이 충분히 고려되어야 하며, 선형 추정기일 경우 선형오차가 발생하고 비선형 추정기일 경우 추정 계인의 선택에 어려움이 있다는 단점을 가진다. 따라서, 본 논문에서는 케이싱 오실레이터의 구조적 특징을 이용하여 기하학적 방법에 의해 순기구학 해석을 수행하고자 한다. 케이싱 오실레이터의 작업기의 위치와 자세는 순기구학의 출력으로 고려될 수 있는 케이싱의 길이에 대한 함수로 주어지기 때문에, 순기구학의 입출력 변수에 종속되는 또다른 하나의 매개변수를 요구하는 해석적 방법에 비해 유도과정이 직관적이며, 모든 가능한 해로부터 실제 해를 선별하는 알고리즘이 간단해진다. 또한, 해석적 방법과 같이 모든 가능한 해를 찾을 수 있으므로 기구학적 거동에 대한 관점을 제시해 주며, 수렴시간은 수치해석적 방법과는 달리 수 millisecond 이내로 요구되므로 실시간 제어에도 용이하다. 비록 케이싱의 길이를 결정하는 다항식으로부터 최대 8 개의 해가 얻어지나, 항상 같은 크기의 다른 부호를 가지는 네 쌍의 근이 구해지므로 케이싱 오실레이터의 실제 가능한 닫힌 해를 순조롭게 구할 수 있다.

## 2. 케이싱 오실레이터의 구조 및 좌표계 설정

### 2.1 케이싱 오실레이터의 구조

본 논문에서 제안된 케이싱 오실레이터의 시제



(a) 4 d-o-f joint (b) Bolt and nut  
Fig. 2 Specification of primary elements

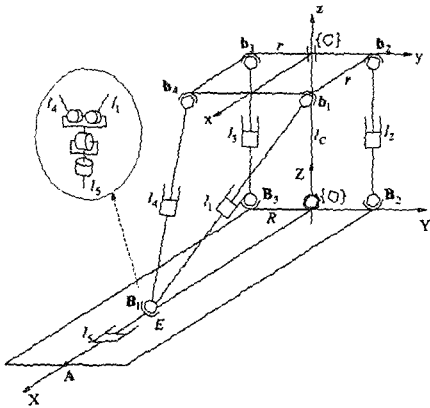


Fig. 3 Kinematic modeling of the casing oscillator

품을 Fig. 1에서 보여준다. 케이싱 오실레이터는 상판과 하판 그리고 5개의 실린더로 구성되어 있다. 하판은 바닥에 고정되어 있고 상판은 1자유도 직선운동이 가능한 5개의 실린더에 의해 공간 운동이 가능하다.

리프팅 실린더(Lifting Cylinder)와 무빙 실린더(Moving Cylinder)는 상판과 3자유도 볼 조인트로 연결되어 있다. 밸런싱 실린더(Balancing Cylinder)의 한 쪽 끝은 하판에 고정되어 있으며, 다른 한 쪽 끝은 두 개의 무빙 실린더와, 4자유도 운동이 가능하도록 제작된 조인트로 연결되어 있다. 이때 4자유도 조인트는 Fig. 2(a)와 같이 각각의 무빙 실린더를 연결하는 3자유도 유니버설(universal) 조인트와, 밸런싱 실린더와 연결된 1자유도 회전 조인트의 결합된 형태이며, 밸런싱 실린더의 동작에 의해 하판 위를 직선운동 할 수 있게 설치되었다.

실제 케이싱은 케이싱 오실레이터의 상판에 클램프(clamp)를 이용하여 고정되어 있으며, 케이싱의 끝단 부분은 작업 위치에 놓여 케이싱 오실레이터에 의해 회전운동과 삽입을 위한 직선운동을 하게 된다. 이러한 효과를 구현하기 위해 시제품의 케이싱은 Fig. 2(b)와 같이 상판에 체결되어 있으며, 하판과는 미끄럼-볼 베어링에 의해 연결되어 있다. 미끄럼-볼 베어링은 케이싱의 삽입효과

에 해당하는 직선운동과 케이싱 오실레이터에 의해 수행되는 회전운동을 모두 가능하게 해 준다.

2.2 좌표계 설정

케이싱 오실레이터의 하판에 대한 상판의 공간 운동을 기술하기 위해 좌표계를 설정하고 각 볼 조인트의 좌표를 기술한다. Fig. 3은 케이싱 오실레이터의 단순화된 기하학적 모델링을 나타낸다.

먼저 하판상에 {O}를 중심으로 하는 고정된 좌표계를 XYZ로 표기하며 이것은 항상 고정된 좌표계로 기준좌표계이다. 또한 상판 상에 {C}를 중심으로 하는 xyz 좌표계를 설정하며, 이것은 상판의 공간 운동과 함께 움직이는 이동좌표계이다. 하판 상의 조인트 B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>과 상판 상의 볼 조인트 b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, b<sub>4</sub>를 연결하는 각 실린더의 길이는 l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub>, l<sub>3</sub>, l<sub>4</sub>라 표시하며, 하판 상의 고정점 A와 조인트 B<sub>1</sub>까지 연결하는 실린더의 길이를 l<sub>5</sub>라 한다.

XYZ 좌표계에 대한 하판 상의 조인트의 좌표는 다음과 같다.

$$B_1 = [E, 0, 0]^T \tag{1}$$

$$B_2 = [0, R, 0]^T \tag{2}$$

$$B_3 = [0, -R, 0]^T \tag{3}$$

xyz 좌표계에 대한 상판 상의 조인트의 좌표는 다음과 같다.

$$b_1 = [r, r, 0]^T \tag{4}$$

$$b_2 = [0, r, 0]^T \tag{5}$$

$$b_3 = [0, -r, 0]^T \tag{6}$$

$$b_4 = [r, -r, 0]^T \tag{7}$$

하판에 대한 상판의 공간 운동을 기술하기 위해 3개의 병진운동 성분과 3개의 회전운동 성분이 필요하다. 따라서 XYZ 좌표계에 대한 xyz 좌표계의 중심 {C}의 위치를 다음과 같이 나타낸다.

$$C = [x_c, y_c, z_c]^T \tag{8}$$

또한 롤(φ)-피치(θ)-요(ψ)각을 이용하여 XYZ 좌표계에 대한 xyz 좌표계의 자세를 나타내는 회전행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$R = R(z, \psi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(x, \phi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ ,  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ .

### 3. 자유도 해석

케이싱 오실레이터의 자유도는 공간운동을 하는 기구의 자유도 판별식에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{D.O.F} &= \lambda(n-j-1) + \sum_i^n f_i - f_r \\ &= 6(14-17-1) + 31 - 3 = 4 \end{aligned} \quad (10)$$

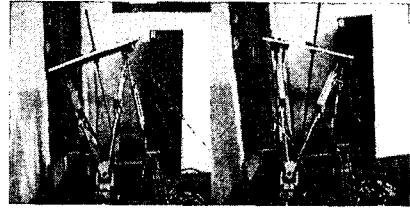
여기서 D.O.F는 기구의 자유도,  $\lambda$ 는 기구부가 작동하는 공간의 자유도,  $n$ 는 하판을 포함한 링크들의 수,  $j$ 는 관절들의 수,  $f_i$ 는  $i$ 번째 관절의 자유도, 그리고  $f_r$ 는 여유 자유도의 수이다.

케이싱 오실레이터는 케이싱을 땅속에 삽입하기 위해 먼저 두 개의 무빙 실린더를 서로 반대 방향으로 작동시켜 상판의 요잉 운동을 일으킨다. 즉, 실린더  $l_1$ 이 수축하면  $l_4$ 는 인장하며, 반대로  $l_1$ 이 인장하면  $l_4$ 가 수축한다. 이때 기구적 특성상 상판에는 미소의 롤과 피칭 운동이 발생하게 되므로 상판의 수평을 유지하기 위해 밸런싱 실린더의 변위를 제어하여 피칭 운동을, 리프팅 실린더의 변위를 제어하여 롤 운동을 보상한다. 이러한 보상 운동은 상판을 항상 수평면에 대해 평행하도록 하는 Auto-Balancing 기능과 부합한다. 또한 두 개의 리프팅 실린더와 밸런싱 실린더를 동시에 수축 또는 인장함으로써 케이싱을 땅속에 삽입시키는 Z축 병진운동을 가능케 한다. Fig. 4는 케이싱 오실레이터의 모든 가능한 공간 운동을 보여준다.

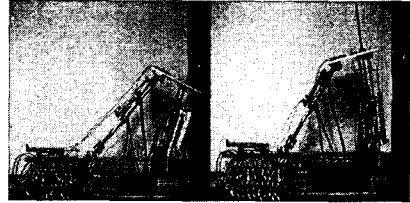
케이싱 오실레이터는 밸런싱 실린더가 없더라도 4 자유도 운동이 가능하나 밸런싱 실린더  $l_5$ 를 설치하여 추가의 피칭운동이 가능하도록 제작되었다. 이는 무빙 실린더의 작동을 피칭운동에서 분리시킴에 따라 가장 큰 요잉 운동을 구현하게 해준다. 따라서 작업의 효율성을 극대화 할 수 있으며, 상판의 수평 제어 또한 가능하다.

### 4. 역기구학 해석

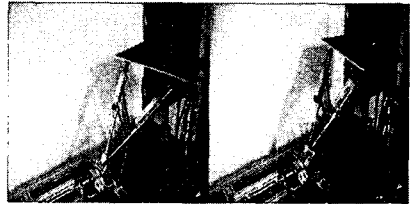
역기구학(inverse kinematic) 문제는 주어진 상판의 위치와 자세로부터 작동기의 길이를 결정하는



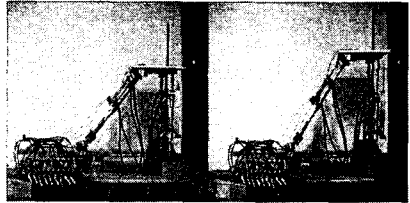
(a) Rolling motion



(b) Pitching motion



(c) Yawing motion



(d) z-translation motion

Fig. 4 Motions of the casing oscillator

문제이다. 각 작동기들의 길이를 나타내는 구속방정식은 다음과 같다.

$$l_i = \sqrt{(C+R \cdot b_i - B_i) \cdot (C+R \cdot b_i - B_i)} \quad \text{If } i=4, \text{ then } B_4 = B_1 \quad (i=1 \sim 4) \quad (11)$$

$$l_5 = \sqrt{(A - B_1) \cdot (A - B_1)} \quad (12)$$

케이싱 오실레이터는 4 자유도 이므로 역기구학 해석을 위해 요구되는 상판의 위치와 자세에 대한 정보는 롤, 피치, 요각 그리고 Z축 병진 변위이다 상판은 항상 케이싱과 수직을 유지함으로써 상판의 중심 {C}의 좌표는 다음과 같은 구속방정식을 만족한다.

$$x_C = (c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi) \cdot l_C \quad (13)$$

$$y_C = (s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi) \cdot l_C \quad (14)$$

$$z_C = (c\theta c\varphi) \cdot l_C \quad (15)$$

따라서 상판의 병진운동은 케이싱의 길이  $l_c$  와 롤-피치-요각의 함수로 표현되므로 이들은 역기구학 해석을 위한 독립된 4 개의 입력으로 고려될 수 있다. 그러나 입력은 4 개인데 반해 5 개의 실린더 길이를 출력으로 가지므로 무한개의 역기구학 해가 존재하게 된다. 이는 밸런싱 실린더의 추가 설치에 의한 여유구동으로부터 기인된 결과이다. 앞서 설명한 바와 같이 케이싱 오실레이터의 작업효율을 극대화하기 위해서는 가능한 큰 요잉 운동이 요구될 뿐만 아니라 Auto-Balancing 기능을 위해 미소의 피칭운동에 대한 적절한 보상이 이루어져야 하므로 작업 초기조건으로써 밸런싱 실린더  $l_5$  를 구동 범위의 중립에 위치시키는 것이 바람직하다.<sup>(1)</sup> 따라서 역기구학 해석은 (11)의 문제로 귀결될 수 있으며, 유일한 역기구학 해를 구하는 것이 가능하다.

### 5. 순기구학 해석

순기구학 문제는 주어진 각 작동기의 길이로부터 상판의 위치와 자세를 구하는 문제이다. 케이싱 오실레이터의 상판의 위치는 역기구학 해석에서 언급한 바와 같이 케이싱의 길이 및 롤-피치-요각의 함수로 표현되므로 케이싱 오실레이터의 순기구학 문제는 주어진 5 개의 실린더 길이로부터 케이싱의 길이  $l_c$  와 상판의 자세를 구하는 문제로 정의된다.

역기구학 식에서는 밸런싱 실린더의 여유구동에 의해 4 개의 입력에 대한 5 개의 출력을 결정해야 하므로 그 해가  $l_5$  의 위치에 의존하나, 순기구학 식에서는 5 개의 입력에 대해 4 개의 출력을 결정하게 되므로 밸런싱 실린더  $l_5$  의 구동에 대한 관계식이 기구학적 초과 구속의 역할을 한다. 이는 해석적 방법에 의해 얻어지는 고차 비선형 다항식을 단순화시키는데 이용될 수 있으며, 순기구학 식을 유도하는 과정에서 정의되는 여분의 미지수의 수를 줄이는 효과를 얻게 한다. 따라서 케이싱 오실레이터의 구조적 이점에 기인한 기하학적 접근 방법에 의해 순기구학 식의 실제 가능한 닫힌 해를 용이하게 얻을 수 있다.

#### 5.1 기구학적 전이

기구학적 전이(kinematic inversion)란 기준 좌표계와 이동좌표계의 역할을 바꾸는 것을 의미한다. 기구의 모든 운동은 하나의 기준에 의해 상대적으로

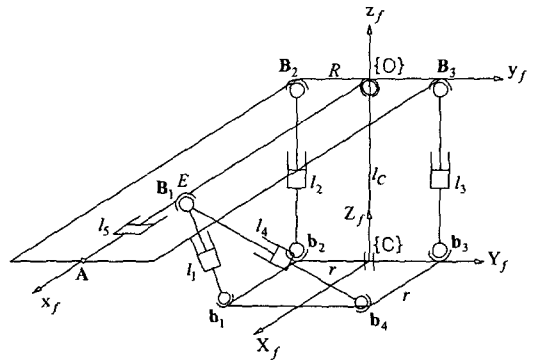


Fig. 5 Kinematic inversion modeling of the casing oscillator

로 기술되므로 기준의 변화에 의해 수학적 기술은 변하더라도 정의된 운동은 절대적이다.<sup>(20)</sup>

Fig. 3 과 같이 역기구학 해석을 위해 제시된 기구학적 모델링을 이용하여 순기구학을 해석하는 것은 다수의 기구학적 구속조건에 의해 매우 복잡하다. 특히 하판 위를 병진 운동하는  $B_1$  의 운동은 이를 더욱 어렵게 한다. 따라서 기구학적 전이를 이용하여 순기구학 해석을 위한 새로운 기구학적 모델링을 Fig. 5 와 같이 제시한다.

상판을 기준으로 하판의 위치와 자세를 결정하기 위해 새로운 좌표계를 설정한다. 먼저 상판 상에  $\{C\}$ 를 중심으로 하는 고정된 좌표계를  $X_f Y_f Z_f$ 로 표기하며, 이것이 기준 좌표계가 된다. 하판에는  $\{O\}$ 를 중심으로 하는  $x_f y_f z_f$  좌표계를 설정하며, 이것은 하판의 공간운동과 함께 하는 이동 좌표계이다. 케이싱은 상판에 항상 수직하게 고정되어 있으므로  $X_f$  축 방향과 일치한다.

#### 5.2 기구학적 구속조건

이 절에서는 5 개의 실린더의 길이가 주어졌을 때 하판 상의 조인트  $B_1$ ,  $B_2$  그리고  $B_3$ 의 위치를 결정한다. 케이싱의 길이는 순기구학 해석에서 구해야 하는 하나의 출력값이나, 하판 상의 각 조인트의 좌표를 쉽게 얻기 위해서 그 값을 알고있는 매개 변수라 가정한다.

먼저  $X_f Y_f Z_f$  좌표계에 대한 하판 상의 조인트의 좌표는 다음과 같이 정의된다.

$$B_i = [x_i, y_i, z_i]^T \quad (i=1-3) \tag{16}$$

실린더 길이  $l_1$  과  $l_4$  가 주어졌을 때, 각각 상판 상의  $b_1$  과  $b_4$  를 중심으로 하며  $l_1$  과  $l_4$  을 반지름으로 하는 구의 방정식을 다음과 같이 정의할 수

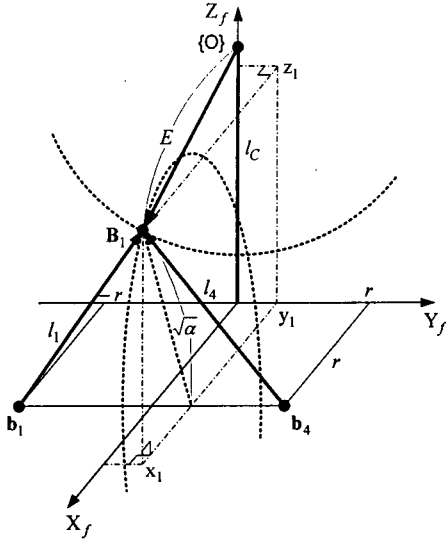


Fig. 6 Loci of  $B_1$  connecting  $l_1$ ,  $l_4$  and  $E$

있다.

$$(x_1 - r)^2 + (y_1 + r)^2 + z_1^2 = l_1^2 \quad (17)$$

$$(x_1 - r)^2 + (y_1 - r)^2 + z_1^2 = l_4^2 \quad (18)$$

식 (17)와 (18)에 의해 생성된 구가 만나는 점의 궤적은 원이며,  $B_1$ 은 항상 이 원 위에 존재한다. 위 식을 연립하여 정리하면 다음과 같은 원의 방정식을 얻을 수 있으며, Fig. 6은 이를 도식화하고

$$(x_1 - r)^2 + z_1^2 = \frac{l_1^2 + l_4^2}{2} - \left( \frac{l_1^2 - l_4^2}{4r} \right)^2 - r^2 \equiv \alpha \quad (19)$$

$$y_1 = \frac{l_1^2 - l_4^2}{4r} \quad (20)$$

있다. 실린더  $l_5$ 의 길이가 주어졌을 때, 매개변수로 정의한 케이싱의 길이  $l_c$ 를 이용하여  $B_1$ 의 좌표를 구하기 위한 또 하나의 구속방정식을 얻을 수 있다. 케이싱은 상판에 항상 수직을 이루고 있어 {O}까지의 거리는 케이싱의 길이와 동일하다. 따라서 {O}를 중심으로 반지름  $E$ 인 구의 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - l_c)^2 = E^2 \quad (21)$$

조인트  $B_1$ 의 위치는 (19)과 (20)에 의해 정의되는 원과 (21)의 구가 만나는 점에서 결정되므로, 식 (21)은 계산을 위해 다음과 같이 정리될 수 있다.

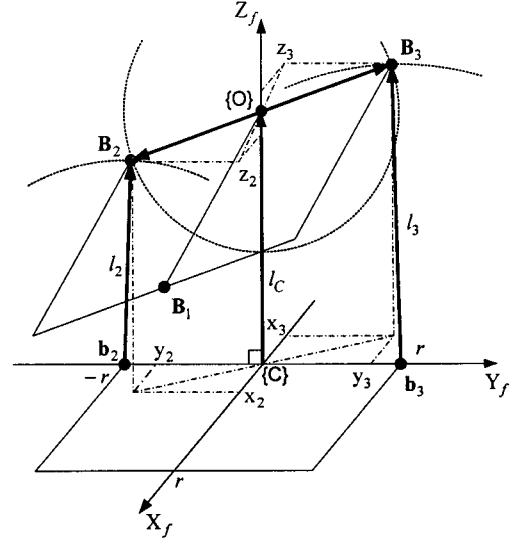


Fig. 7 Loci of  $B_2$  and  $B_3$  connecting  $l_2$  and  $l_3$

$$x_1^2 + (z_1 - l_c)^2 = E^2 - \left( \frac{l_1^2 - l_4^2}{4r} \right)^2 \equiv \beta \quad (22)$$

식 (19)와 (22)를 연립하여 정리하면

$$x_1 = \frac{(1 - \chi / L_c) \cdot r + \sqrt{(r - \chi \cdot r / L_c)^2 - (1 + r^2 / L_c^2)(r^2 + \chi^2 - \alpha)}}{1 + r^2 / L_c^2} \quad (23)$$

$$z_1 = \left( \frac{r}{l_c} \right) \cdot x_1 + \chi \quad (24)$$

여기서  $\chi = (l_c^2 + \alpha - \beta - r^2) / (2l_c)$ 이다.

또한  $l_2$ 와  $l_3$ 가 주어졌을 때, 각각 상판 상의  $b_2$ 과  $b_3$ 을 중심으로 하며  $l_2$ 와  $l_3$ 를 반지름으로 하는 구의 방정식은 다음과 같으며, Fig. 7은 이를 보여준다.

$$x_2^2 + (y_2 + r)^2 + z_2^2 = l_2^2 \quad (25)$$

$$x_3^2 + (y_3 - r)^2 + z_3^2 = l_3^2 \quad (26)$$

조인트  $B_2$ 와  $B_3$ 는 항상 하판의 중심 {O}에 대칭을 이루고 있으므로 다음과 같은 구속방정식을 얻을 수 있다.

$$x_2 + x_3 = 0 \quad (27)$$

$$y_2 + y_3 = 0 \quad (28)$$

$$z_2 + z_3 = 2l_c \quad (29)$$

위의 구속방정식을 (26)에 대입하여 정리하면

$$x_2^2 + (y_2 + r)^2 + (2l_C - z_2)^2 = l_3^2 \quad (30)$$

이다. 식 (25)와 (30)을 연립하면

$$z_2 = \frac{l_2^2 - l_3^2 + 4l_C^2}{4l_C} \quad (31)$$

$$z_3 = \frac{-l_2^2 + l_3^2 + 4l_C^2}{4l_C} \quad (32)$$

이다. 그리고 하판의 중심 {O}로부터 각 조인트  $B_2$ 와  $B_3$ 까지의 거리는 설계변수로 주어진  $r$ 이므로 다음의 기구학적 구속방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + (z_2 - l_C)^2 = r^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + (z_3 - l_C)^2 = r^2 \end{cases} \quad (33)$$

식 (24)와 (32)를 연립하여 정리하면

$$y_2 = \frac{l_2^2 + l_3^2 - 2l_C^2 - 4r^2}{4r} \quad (34)$$

$$y_3 = \frac{-l_2^2 - l_3^2 + 2l_C^2 + 4r^2}{4r} \quad (35)$$

이다. 하판 위의 조인트의 운동을 구속하는 또 하나의 구속조건은  $\overline{B_2B_3}$ 와  $\overline{OB_1}$ 가 항상 수직을 이룬다는 것이므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{B_2B_3} \cdot \overline{OB_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + (z_1 - l_C) \cdot (z_2 - l_C) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

위 식에 식 (30)와 (33)을 대입하면 다음과 같다.

$$x_2 = \frac{y_1 \cdot y_2 + (z_1 - l_C) \cdot (z_2 - l_C)}{-x_1} \quad (37)$$

$$x_3 = \frac{y_1 \cdot y_2 + (z_1 - l_C) \cdot (z_2 - l_C)}{x_1} \quad (38)$$

위에서 얻어진 하판 위의 각 조인트의 좌표들은 매개변수로 정의된 케이싱의 길이  $l_C$ 에 대한 함수이다. 따라서 케이싱의 길이를 알아야 정확하게 정의될 수 있다. 케이싱 오실레이터는 밸런싱 실린더  $l_5$ 에 의해 여유 구동하는 기구이므로 이에 대한 운동을 나타내는 조건은  $l_C$ 를 알기 위한 구속방정식을 제공하며, 다음과 같다.

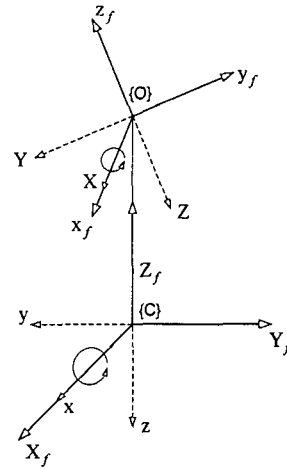


Fig. 8 Coordinate systems of kinematic inversion before and after

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = E^2 + r^2 \quad (39)$$

문자형 변수를 가진 식의 연산이 용이한 소프트웨어 MATHEMATICA를 이용하여 각 조인트의 좌표를 위식에 대입하여 정리하면  $l_C^2$ 에 대한 4차 비선형 다항식을 얻을 수 있다. 해석적 방법에 의한 순기구학 해석은 기구의 설계변수가 아닌 여분의 미지수를 정의하고 이에 대한 비선형 고차방정식을 유도해야 한다. 또한 방정식에 포함된 삼각함수 형태의 항들은 비선형성을 증가시키므로 그 해를 더욱 찾기 힘들게 한다. 이에 반해, 케이싱 오실레이터는 기구학적 방법에 의해 순기구학의 결과값으로 고려할 수 있는 케이싱의 길이  $l_C$ 를 미지수로 갖는  $l_C^2$ 에 대한 4차 방정식의 유도가 가능하다. 이는 케이싱 오실레이터의 여유구동 특성과 기구학적 전이라는 방법을 이용한 것이다.

한 개의 미지수를 가진 단일 비선형 다항식의 모든 해를 구하는 것은 쉽다라는 명제에 근거하여 (39)의 모든 해를 구하는 것이 가능하다. 또한  $l_C^2$ 에 관한 다항식으로 주어 지기 때문에 항상 크기가 같으며 부호가 반대인 근이 네 쌍이 얻어진다. 케이싱의 길이는 물리적으로 가능한 양의 실수값으로 고려될 수 있으므로 이를 선별하여 실제 값을 얻는 것은 매우 간단한 알고리즘에 의해 가능하다. 특히, 제안된 순기구학의 실제 해는 2 millisecond 내에서 얻어지므로 케이싱 오실레이터의 실시간 제어 및 Auto-Balancing 기능의 수행이 가능하다.

5.3 동차변환 행렬

이 절에서는 기구학적 전이 이전의 실제 기구학적 모델링(Fig. 3)을 기준으로 하판에 대한 상판의 자세를 기술할 수 있는 변환 행렬을 유도한다.

기구학적 전이에 의해 새롭게 정의된 기구학 모델링(Fig.5)에서 상판에 대한 하판의 자세를 나타내는 회전행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_f(z, \varphi) \cdot \mathbf{R}_f(y, \theta) \cdot \mathbf{R}_f(x, \phi)$$

$$= \begin{bmatrix} n_{f1} & o_{f1} & a_{f1} \\ n_{f2} & o_{f2} & a_{f2} \\ n_{f3} & o_{f3} & a_{f3} \end{bmatrix} \quad (40)$$

회전행렬을 이용한  $X_f Y_f Z_f$  좌표계에 대한 하판상의 조인트  $\mathbf{B}_1$  은 다음과 같이 벡터식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{R}_f \cdot \overline{\mathbf{OB}_1} + \overline{\mathbf{CO}}$$

$$= \begin{bmatrix} n_{f1} & o_{f1} & a_{f1} \\ n_{f2} & o_{f2} & a_{f2} \\ n_{f3} & o_{f3} & a_{f3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_C \end{bmatrix} \quad (41)$$

식 (41)을 정리하면 회전행렬  $\mathbf{R}_f$  의 1 열에 대한 정보를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} n_{f1} = x_1 / E \\ n_{f2} = y_1 / E \\ n_{f3} = (z_1 - l_C) / E \end{cases} \quad (42)$$

마찬가지로  $X_f Y_f Z_f$  좌표계에 대한 하판상의 조인트  $\mathbf{B}_2$  와  $\mathbf{B}_3$  를 벡터식으로 표현하여 정리하면 회전행렬  $\mathbf{R}_f$  의 2 열에 대한 정보를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} o_{f1} = -x_2 / r = x_3 / r \\ o_{f2} = -y_2 / r = y_3 / r \\ o_{f3} = (l_C - z_2) / r = (z_3 - l_C) / r \end{cases} \quad (43)$$

또한, 기구학적 전이 이전의 XYZ 좌표계에 대한 상판 위의 볼 조인트는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{b}_{XYZ} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}_{xyz} + \mathbf{T}_{XYZ} \quad (44)$$

여기서 하첨자 XYZ 와 xyz 는 각각 XYZ 좌표계와 xyz 좌표계를 기준으로 한 좌표임을 나타내며,

$\mathbf{T}$  는 병진행렬을 의미한다. 기구학적 전이 이후의  $X_f Y_f Z_f$  좌표계에 대한 하판 위의 조인트들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{B}_{X_f Y_f Z_f} = \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{B}_{x_f y_f z_f} + \mathbf{T}_{X_f Y_f Z_f} \quad (45)$$

여기서 하첨자  $X_f Y_f Z_f$  와  $x_f y_f z_f$  는  $X_f Y_f Z_f$  좌표계와  $x_f y_f z_f$  좌표계를 기준으로 한 좌표임을 의미한다. 또한 기구학적 전이 이전의 좌표계와 기구학적 전이 이후의 좌표계에 대한 관계는 다음과 같으며, Fig. 8 에 도시 되어 있다.

$$\mathbf{B}_{X_f Y_f Z_f} = \mathbf{R}_\Pi \cdot \mathbf{b}_{xyz} \quad (46)$$

$$\mathbf{B}_{x_f y_f z_f} = \mathbf{R}_\Pi \cdot \mathbf{b}_{XYZ} \quad (47)$$

여기서  $\mathbf{R}_\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  이다.

식 (46)과 (47)를 (45)에 대입하여 정리하면

$$\mathbf{b}_{XYZ} = \mathbf{R}_\Pi^T \mathbf{R}_f^T \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{b}_{xyz} - \mathbf{R}_\Pi^T \mathbf{R}_f^T \mathbf{T}_{X_f Y_f Z_f} \quad (48)$$

그러면, 식 (44)와 (48)의 비교에 의해 기구학적 전이 전·후의 회전행렬의 관계가 얻어질 수 있다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\Pi^T \mathbf{R}_f^T \mathbf{R}_f$$

$$= \begin{bmatrix} n_{f1} & -n_{f2} & -n_{f3} \\ -o_{f1} & o_{f2} & o_{f3} \\ -a_{f1} & a_{f2} & a_{f3} \end{bmatrix} \quad (49)$$

그리고 식 (49)와 (9)를 비교하여 하판에 대한 상판의 자세를 나타내는 롤-피치-요각은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-o_{f1}}{n_{f1}} \right) \quad (50)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{n_{f2} - o_{f2} \tan(\phi)}{n_{f3} - o_{f3} \tan(\phi)} \right) \quad (51)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{n_{f2} - \sin(\phi) \cos(\varphi)}{-n_{f1} \sin(\varphi)} \right) \quad (52)$$

또한 기구학적 전이 전후의 병진행렬에 대한 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}_{XYZ} = -\mathbf{R}_\Pi^T \mathbf{R}_f^T \mathbf{T}_{X_f Y_f Z_f} \quad (53)$$



**Table 1** Specifications of the casing oscillator

Actuator	Length Limit (mm)	
	Min.	Max.
$l_1$	673.3	773.3
$l_2$	417.5	542.5
$l_3$	417.5	542.5
$l_4$	673.3	773.3
$l_5$	487.5	612.2
Joint	Limit of Moving Angle	
$b_1, b_2, b_3, b_4$	$\pm 20^\circ$	
$B_1, B_2, B_3$	$\pm 20^\circ$	
Upper Platform	Length (mm)	
$r$	250	
Bottom Platform	Length (mm)	
$R$	250	
$A$	1160	

여기서  $T_{x_f y_f z_f} = [0, 0, l_c]^T$  이므로 (53)을 정리하면

$$T_{XYZ} = [-n_{f3} \cdot l_c, o_{f3} \cdot l_c, a_{f3} \cdot l_c]^T = [x_c, y_c, z_c]^T \quad (54)$$

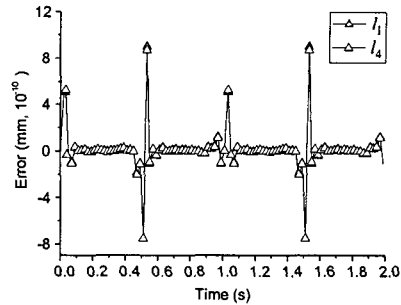
이다. 식 (54)는 역기구학 해석에서 기구학적 구속 조건으로 주어진 (13)~(15)와 같음을 알 수 있다. 따라서 케이싱 오실레이터의 순기구학 문제는 실린더  $l_1 \sim l_5$ 가 주어질 때 (39)에 의해서 케이싱의 길이  $l_c$ 와 (50)~(52)에 의해 상판의 자세를 유일하면서도 해석적으로 구할 수 있다.

### 6. 수치 예제

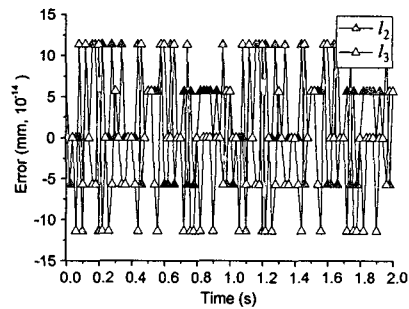
케이싱 오실레이터의 역기구학 해석은 단순하며 유일한 닫힌 해를 비교적 쉽게 얻을 수 있기 때문에 앞서 제시한 순기구학 해석의 타당성을 입증하는데 기준으로써 이용될 수 있다.

케이싱 오실레이터의 각 실린더의 길이를 입력으로 하였을 때, 순기구학 식 (39)와 (50)~(52)을 이용하여 얻어지는 상판의 위치와 자세에 대한 정보를 다시 역기구학 식 (11)에 입력으로 사용하여 각 실린더의 길이를 출력으로 얻을 수 있다. 그리고 입력으로 주어진 실린더의 길이와 출력으로 얻을 수 있는 실린더의 길이를 각각 비교함으로써 순기구학 해석의 타당성을 검증하였다.

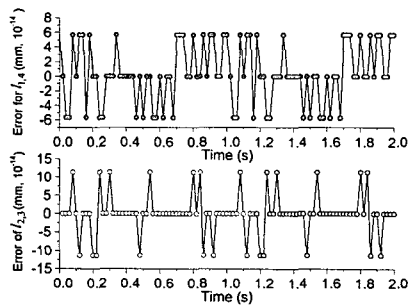
케이싱 오실레이터의 주요 재원은 Table 1에 주어졌다. 케이싱 오실레이터의 동작 특성을 고려하여 3가지의 경우에 대해서 순기구학 해석을 실시하였으며, 그 때 각각 사용된 입력은 실제 케이싱



**Fig. 9** Errors between input and output lengths  $l_1$  and  $l_4$



**Fig. 10** Errors between input and output lengths  $l_2$  and  $l_3$



**Fig. 11** Errors between input and output lengths  $l_1 \sim l_4$  according to variations of  $l_5$

오실레이터의 실린더 운동과 같이 정현파로 설정하였다.

Case 1:  $l_1 = 723.39 + 100 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

$l_2 = 480$

$l_3 = 480$

$l_4 = 723.39 - 100 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

$l_5 = 430$

Case 2:  $l_1 = 723.39$

$l_2 = 480 + 125 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

$l_3 = 480 - 125 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

$$l_4 = 723$$

$$l_5 = 430$$

$$\text{Case 3: } l_1 = 723.39$$

$$l_2 = 480$$

$$l_3 = 480$$

$$l_4 = 723$$

$$l_5 = 430 + 125 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$$

Case 1은 케이싱 오실레이터의 무빙 실린더만을 작동시켰을 때의 경우로 상판의 요잉 운동을 얻을 수 있다. 또한 Case 2는 케이싱 오실레이터의 리프팅 실린더만을 작동시켰을 때의 경우로 상판의 롤 운동을 얻을 수 있다. 그리고 Case 3은 밸런싱 실린더의 작동에 따라 상판의 피칭 운동이 발생하는 경우이다. 여유 구동의 영향으로 역기구학 해석의 해가 밸런싱 실린더의 위치에 의존하여 결정되기 때문에 밸런싱 실린더의 길이가 역기구학 해석의 출력으로 얻어질 수 없다. 따라서 이에 대한 순기구학 해석의 검증은 위해서 변화하는 밸런싱 실린더와 그 밖의 실린더의 길이를 순기구학 해석의 입력으로 하여 얻어진 상판의 위치와 자세에 대한 정보를 밸런싱 실린더의 위치를 고려하여 결정되는 역기구학 식에 대입하여  $l_1 \sim l_4$ 의 출력을 얻었다. 이는 순기구학 해석에 의해 상판의 위치와 자세가 얼마나 정확하게 결정되었는지를 알게 해 준다. 각각의 경우에 대해서 순기구학 입력과 역기구학의 출력 차이는 Fig. 9~11에서 보여준다.

세 개의 예시에서 볼 수 있듯이, 순기구학의 입력으로 사용된 각 실린더의 길이와 역기구학의 결과로 얻어진 각 실린더의 길이는 거의 동일하며, 오차 또한 매우 작기 때문에 순기구학 식이 타당함을 알 수 있다. 또한 계산 시간이 2 millisecond라는 점을 감안할 때, 케이싱 오실레이터의 실시간 Auto-Balancing 제어에 순기구학의 적용가능성이 입증되었다.

## 7. 결론

건설용 중장비이면서 그 형태가 1자유도 여유 구동하는 병렬형 매니플레이터와 매우 유사한 구조를 가지고 있는 케이싱 오실레이터의 순기구학 해석을 수행하였다.

케이싱 오실레이터의 순기구학 해석을 위해 기하학적 방법을 이용하였으며, 이는 케이싱 오실레이터의 구동 특성과 여유 구동하는 밸런싱 실린더에 의해 하나의 주요한 초과구속 방정식이 추가로 얻어지기 때문에 가능했었다.

순기구학 해석의 해는 출력값 중 하나인 케이싱

의 길이를 하나의 미지수로 갖는 4차의 제차 다항식으로부터 얻어졌다. 이 다항식은 해석적 방법에 의해 얻어진 고차 비선형 다항식과 달리 삼각함수 형태의 항이 포함되어 있지 않기 때문에 그 해를 용이하게 얻을 수 있었다. 또한 다항식을 만족하는 해가 비록 8개이나 제차 방정식의 특성으로 인해 실제의 정확한 해를 쉽게 얻을 수 있었다. 따라서 일반적으로 순기구학 해석이 난해한 다른 병렬형 매니플레이터에 비해 실제 가능한 단란 순기구학 해를 쉽게 구할 수 있었다. 그리고 이에 대한 타당성은 역기구학 해석을 이용하여 3개의 수치예제에서 검증되었으며, 계산 시간은 2 millisecond 이내이므로 실시간 제어에 응용될 수 있음을 확인하였다. 따라서, 케이싱 오실레이터의 순기구학 해석 결과는 상판의 실시간 Auto-Balancing 제어에 대한 가능성을 제시해 줄 뿐만 아니라 케이싱 오실레이터가 병렬형 매니플레이터로의 적용 가능성을 보여준다.

덧붙여서, 병렬형 매니플레이터의 순기구학 해석을 위한 또 하나의 기하학적 접근 방법인 tetrahedron approach를 이용하여 케이싱 오실레이터의 순기구학을 수행한 결과, 본 논문에서 제시한 방법과 거의 유사한 결과를 얻을 수 있었으며, 계산 시간 또한 거의 일치하였음을 확인하였다. 이러한 접근 방법 또한 기구학적 전이를 통해서만 가능하며, 케이싱의 길이를 미지수로 지정하여야 원하는 결과를 얻을 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) Rhee, E. J., Bae, J. M. and Park M. K., 2000, "A Study on the Inverse Kinematic Analysis of a Casing Oscillator," *Korean Soc. Precision Eng.*, Vol. 17, No. 12, pp. 47~53.
- (2) Rhee, E. J., Kim, J. Y., Baek, J. H. and Park, M. K., 2003, "A Study on the Real Time Auto-Balancing of a Casing Oscillator Using Posture Feedback Control," *Korean Soc. Mech. Eng.*, Vol. 27, No. 5, pp. 688~696.
- (3) Nanua, P., Waldron, K. J. and Murthy, V., 1990, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform," *IEEE Tans. Robot. Automat.*, Vol. 6, No. 4, pp. 438~444.
- (4) Didrit, O., Petitot, M. and Walter, E., 1998, "Guaranteed Solution of Direct Kinematic Problems for General Configurations of Parallel Manipulators," *IEEE Tans. Robot. Automat.*, Vol.14, No. 2, pp. 259~266.
- (5) Bruyninckx, H., 1999, "Forward Kinematics for Hunt-Primrose Parallel Manipulators," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 34, No. 4, pp. 657~664.
- (6) Innocenti, C., 2001, "Forward Kinematics in Polynomial Form of the General Stewart Platform,"

- ASME J. Mech. Des.*, Vol. 123, pp. 254~260.
- (7) Lee, T. Y. and Shim, J. K., 2001, "Algebraic Elimination-Based Real-Time Forward Kinematics of the 6-6 Stewart Platform with Planar Base and Platform," *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat., Seoul, Korea*, pp. 1301~1306.
- (8) Mu, Z. and Kazerounian, K., 2002, "A Real Parameter Continuation Method for Complete Solution of Forward Position Analysis of the General Stewart," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 124, No. 2, pp. 236~244.
- (9) Song, S. K. and Kwon, D. S., 2002, "Geometric Formulation Approach for Determining the Actual Solution of the Forward Kinematics of 6-dof Parallel Manipulators," *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intel. Robot. Sys. Lausanne, Switzerland*, pp. 1930~1935.
- (10) Goo, S. H. and Son, K., 2001, "Study on Forward Kinematics of Stewart Platform Using Neural Network Algorithm together with Newton-Raphson Method," *Korean Soc. Auto. Eng.*, Vol. 9, No. 1, pp. 156~162.
- (11) Ha, H. P. and Han, M. C., 2001, "A Fast Forward Kinematic Analysis of Stewart Platform," *Korean Soc. Mech. Eng. (Part A)*, Vol. 25, No. 3, pp. 339~352.
- (12) Ku, D. M., 2000, "Forward Kinematic Analysis of a 6-3 Type Stewart Platform Mechanism," *Proc. Instn. Mech. Eng. (Part K)*, Vol. 214, No. 4, pp. 233~241.
- (13) Lee, T. Y. and Shim, J. K., 2001, "Real-Time Forward Kinematics of the 6-6 Stewart Platform with One Extra Linear Sensor," *Korean Soc. Mech. Eng. (Part A)*, Vol. 25, No. 9, pp. 1384~1390.
- (14) Han, K. Y., Chung, W. K. and Youm, Y., 1995, "Local Structurization for the Forward Kinematics of Parallel Manipulators Using Extra Sensor Data," *IEEE Int. Conf. Robot. Automat., Nagoya, Japan*, pp. 514~520.
- (15) Merlet, J. P., 1993, "Closed-Form Resolution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators Using Extra Data," *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat., Atlanta, USA*, pp. 200~204.
- (16) Bonev, I. A., Ryu, J., Kim, S. G. and Lee, S. K., 2001, "A Closed-Form Solution to the Direct Kinematics of Nearly General Parallel Manipulators with Optimally Located Three Linear Extra Sensors," *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 17, No. 2, pp. 148~156.
- (17) Nguyen, C. C., Antrazi, S. S., Zhou, Z. L. and Campbell, C. E., 1993, "Adaptive Control of a Stewart Platform-Based Manipulator," *J. Robot. Sys.*, Vol. 10, No. 5, pp. 657~687.
- (18) Jung, G. H. and Lee, K. I., 1994, "Real-Time Estimation of Stewart Platform Forward Kinematic Solution," *Korean Soc. Mech. Eng.*, Vol. 18, No. 7, pp. 1632~1642.
- (19) Lee, H. S., Han, M. C. and Lee, M. C., 1999, "The Estimation for the Forward Kinematic Solution of Stewart Platform Using the Neural Network," *Korean Soc. Precision Eng.*, Vol. 16, No. 8, pp. 186~192.
- (20) Duffy, J., 1996, *Statics and Kinematics with applications to Robotics*, Cambridge Univ. Press.