

# 주기적인 온도를 갖는 두 수평 평판 사이에서의 자연 대류에 대한 다중해

유 주 식\* · 김 용 진\*

(2004년 6월 15일 접수, 2004년 8월 25일 심사완료)

## Multiple Solutions for Natural Convection Between Two Horizontal Plates with Periodic Temperatures

Joo-Sik Yoo and Yong-Jin Kim

**Key Words:** Natural Convection(자연 대류), Transition(전이), Dual Solutions(이중해), Multiple Solutions(다중해), Multicellular Convection(다수 셀 대류)

### Abstract

Multiple solutions in natural convection of air ( $Pr=0.7$ ) between two horizontal walls with mean temperature difference and the same periodic non-uniformities are investigated. An analytical solution is found for small Rayleigh number, and the general solution is investigated by using a numerical method. In the conduction-dominated regime, two upright cells are formed between two walls over one wave length. When the wave number is small, the flow becomes unstable with increase of the Rayleigh number, and multicellular convection occurs above a critical Rayleigh number. The multicellular flows at high Rayleigh numbers consist of approximately square-shape cells. And several kinds of multiple flows classified by the number of cells are found.

### 기호설명

$g$  : 중력 가속도  
 $H$  : 판 사이의 간격  
 $\vec{j}$  : 수직 방향의 단위벡터  
 $k$  : 벽면 온도 분포의 파동수  
 $Pr$  : Prandtl 수,  $\nu/\alpha$   
 $Ra$  : Rayleigh 수,  $g\beta\Delta T H^3/\nu\alpha$   
 $Ra_c$  : 임계 Rayleigh 수.  
 $Ra_{c,B}$  : Rayleigh-Benard 문제의 임계  $Ra$   
 $t$  : 무차원 시간  
 $T_L$  : 아래 벽면의 온도분포

$T_U$  : 위 벽면의 온도분포  
 $T_1$  : 아래 벽면의 평균온도  
 $T_2$  : 위 벽면의 평균온도  
 $\Delta T$  : 특성 온도차이,  $T_1 - T_2$   
 $\vec{u}$  : 무차원 속도벡터  
 $u$  : 수평 방향의 속도성분  
 $v$  : 수직 방향의 속도성분  
 $x$  : 무차원 수평좌표  
 $y$  : 무차원 수직좌표

### 그리스 문자

$\alpha$  : 열 팽창 계수  
 $\delta$  : 벽면 온도의 진폭 계수  
 $\eta$  : 확장된 수직 좌표

† 책임저자, 회원, 안동대학교 기계교육과  
 E-mail : jsyoo@andong.ac.kr  
 Tel : (054) 820-5671 FAX: (054) 823-1766  
 \* 회원, 한국기계연구원 열유체환경연구부

- $\theta$  : 무차원 온도
- $x$  : 열 확산 계수
- $\nu$  : 동점성 계수
- $\rho_0$  : 밀도
- $\Psi$  : 흐름 함수(streamfunction)
- $\omega$  : 와도(vorticity)

1. 서론

한 시스템 내에서 동일한 조건에 대해 일어나는 여러 가지 현상은 매우 흥미 있는 것으로서 여러 종류의 유체역학 문제에서 연구되어 왔다.<sup>(1~5)</sup> 유체 유동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식은 비선형(nonlinear)이므로, 이와 같은 다중해가 존재할 가능성이 언제든 있다. 이론적으로 흥미를 끌었던 문제는 von Kármán swirling flows<sup>(1)</sup>인데 이 시스템에는 무한히 많은 해가 존재한다고 알려져 있다. 이 외에도 다중해가 발견된 시스템에는 다음과 같은 것들이 있다 : 굽은 관에서의 강제 대류,<sup>(2)</sup> 회전하는 실린더들 사이에서의 유동 (Taylor problem<sup>(3)</sup>), 수평 덕트(duct)에서의 혼합 대류,<sup>(4)</sup> 환형 공간에서의 자연대류.<sup>(5)</sup>

본 연구에서는 일정한 온도 차이를 가지고 있는 표준적인 Rayleigh-Benard 문제에 같은 형태의 주기적인 불균일 벽면 온도가 상하 벽면에 가미되었을 때 일어나는 다중 현상을 조사한다(Fig. 1). 아래와 위 벽면은 각각  $T_L = T_1 + \delta\Delta T \sin kx$ ,  $T_U = T_2 + \delta\Delta T \sin kx$ 의 온도 분포를 가지고 있다. 이와 같은 주기적인 경계 조건을 갖는 문제로는 두 판의 형태가 길이 방향으로 정현적(sinusoidal)

이거나 삼각과 등과 같이 물결 모양을 이루는 판에 대한 연구가 수행되었다.<sup>(6~8)</sup> 이와 같은 문제에 있어서는 벽면의 온도가 늘 일정하다고 하였으며 주로 정상 상태의 대류 현상을 조사하였다. 한편 Yoo and Kim<sup>(9)</sup>은 같은 평균 온도를 갖고 주기적인 온도 분포를 갖는 평판 사이에서의 자연 대류에서 카오스로의 천이 경로(route to chaos)를 규명하였다.

주기적인 불균일 벽면 온도를 갖는 다공성 매질(porous medium)에서의 대류에 관한 연구로는 Paulikakos and Bejan,<sup>(10)</sup> Bradean 등,<sup>(11)</sup> Yoo,<sup>(12)</sup> Yoo and Schultz<sup>(13)</sup>의 연구가 있다. Paulikakos and Bejan,<sup>(10)</sup> Bradean 등<sup>(11)</sup>은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반 무한 다공성 매질에서의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo<sup>(12,13)</sup>는 다공성 매질에서 평균 온도 차이가 없는 두 벽면이 정현적인 온도 분포를 가지고 있을 때의 유동을 작은 Rayleigh 수에 대한 점근적인 해를 구하여 조사하였다.

본 연구에서 고려하는 시스템은 Fig. 1과 같이 두 벽면이 서로 다른 평균 온도를 갖고 주기적으로 변화하는 온도 분포를 갖고 있다. 유동장은 벽면 온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 파장(wave length)  $2\pi/k$ 는 시스템의 기하학적 형태를 나타낸다. 다중해에 대한 기존의 연구 결과 중 특히 흥미 있는 것은 종횡비(aspect ratio)가 12.61인 Taylor 실험 장치에서 Benjamin and Mullin<sup>(3)</sup>에 의해 발견된 15 가지의 정상유동(steady flow)이다. Taylor 문제와 Rayleigh-Benard 문제는 유동의 안정성과 관련하여 많이 연구되어 왔다. 여기에서는 과동수  $k=0.5$ 에 대해 중점적으로 조사하는데, 이 경우는 종횡비가  $2\pi/k \approx 12.57$ 인 얇은 캐비티(cavity)에 대응된다. 그리고, 벽면 온도의 진폭이 작은 경우( $\delta=0.1$ )에 대해 Prandtl 수가 0.7인 공기의 다중해를 조사한다.

2. 해석

두 개의 수평 평판 사이에 유체가 채워져 있으며, 두 벽면은 작은 진폭을 갖고 정현적으로 변화하는 불균일 온도 분포를 가지고 있다(Fig. 1). Boussinesq 근사 하에서 부력 항에서만 유체의 밀도 변화를 고려하고 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(dissipation)도 역시 무시한다. 이와 같은 가정 하

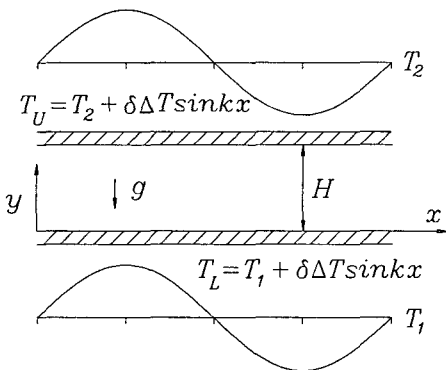


Fig. 1 Problem configuration

에서 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식 (Boussinesq equations<sup>(14)</sup>)을 특성 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도를 각각  $H, H^2/x, x/H, \rho_0 x^2/H^2, \Delta T$ 로 택하여 무차원화시키면 지배 방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + Pr Ra \theta \vec{j} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta \tag{3}$$

흐름 함수  $\Psi$ 와 와도  $\omega$ 로써 표현되는 무차원화된 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega + Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{4}$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \tag{6}$$

여기에서 와도( $\omega$ )와 흐름 함수( $\Psi$ ), Jacobian  $J(f, g)$  및 Laplacian은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{8}$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \tag{9}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{10}$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0, 1 \tag{11}$$

$$\theta = 1 + \delta \sin kx \quad \text{at } y=0 \tag{12}$$

$$\theta = \delta \sin(kx) \quad \text{at } y=1 \tag{13}$$

식 (4)~(6)으로부터 정상 상태의 지배 방정식을 다음과 같이 흐름 함수와 온도로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi - Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} = J(\nabla^2 \Psi, \Psi) / Pr \tag{14}$$

$$\nabla^2 \theta = J(\theta, \Psi) \tag{15}$$

작은 Rayleigh 수에서는 부력에 의해 일어나는

유동이 약하므로 전도(conduction) 상태의 온도 분포는 그와 같은 유체의 운동에 의해서 거의 영향을 받지 않는다. 즉, 유체 내에서의 온도 분포는 거의 전도 상태의 온도 분포를 유지할 것이며, 그 때의 온도 구배에 의해서 운동 방정식에서 비선형 항을 무시할 수 있는 약한 유동이 일어난다. 따라서 작은 Rayleigh 수에서는 흐름 함수와 온도를 다음과 같이 전개하여 식 (14)~(15)의 해를 구할 수 있다.

$$\Psi = \Psi^0 + Ra \Psi^1 + \dots \tag{16}$$

$$\theta = 1 - y + \phi^0 + Ra \phi^1 + \dots \tag{17}$$

식 (16)~(17)을 식 (14)~(15)에 대입하여  $Ra$ 에 대해서 같은 차수를 갖는 계수들을 모아서 정리한 다음 이들 식과 경계 조건 (11)~(13)으로부터 그 해를 구한다.

$O(Ra^0)$ 의 해는 유동이 없는 순수한 전도 상태에 해당된다.

$$\Psi^0 = 0, \quad \nabla^2 \phi^0 = 0 \tag{18}$$

$\phi^0$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^0 = \delta \left[ (1 - \cosh(ky)) \frac{\sinh(ky)}{\sinh(k)} + \cosh(ky) \right] \sin(kx) \tag{19}$$

흐름 함수에 대한  $O(Ra^1)$  방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi^1 = \frac{\partial \phi^0}{\partial x} \tag{20}$$

$$\Psi^1 = \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0, 1 \tag{21}$$

$\Psi^1$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\Psi^1 = \delta [f(y) + f(1-y)] \cos(kx) \tag{22}$$

$$f(y) = \left[ C + C \left\{ \frac{k}{\tanh(k)} - 1 \right\} y - \frac{y^2}{8k \tanh(k)} \right] \sinh(ky) + (-Cky + \frac{y^2}{8k}) \cosh(ky)$$

$$C = \frac{1}{8\{k^2 - \sinh^2(k)\}}$$

모든 Rayleigh 수에 대한 식 (4)~(13)의 일반해

는 Napolitano and Quartapelle<sup>(15)</sup>가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다. 계산 영역은  $(0 \leq x \leq 2\pi/k, 0 \leq y \leq 1)$ 가 되며,  $y$  방향으로는 경계조건 (11)~(13)이 적용되고,  $x$  방향으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 흐름 함수  $\Psi$ 와 와도  $\omega$ , 및 온도  $\theta$ 에 대해 적용된다.

$$F(x, y, t) = F[x + \frac{2\pi}{k}, y, t], \quad F = \Psi, \omega, \theta \quad (23)$$

벽면에서의 평균 Nusselt 수는 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{Nu} = -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx \quad \text{at } y=0, 1 \quad (24)$$

$x$  방향으로는 균일 격자계를 사용하고,  $y$  방향으로는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$y = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh\{B(2\eta-1)\}}{\tanh(B)} \right], \quad B=1.5 \quad (25)$$

수치적인 방법을 통하여 구한 작은 Rayleigh 수에서의 해는 해석적으로 구한 해와 일치한다. 여기에서 사용한 격자계는,  $k \geq 1$ 일 때  $(81 \times 25)$ ,  $k=0.5$ 일 때  $(161 \times 21)$ 이다. 이 격자계는 여러 가지의 격자계를 시험한 다음 충분하다고 생각되는 것을 택한 것이다. 예를 들어  $k=0.5, Ra=10^4$ 인 경우, 격자계에 따른  $\overline{Nu}$ 와  $\Psi_{\max}$ 의 값의 차이가  $(65 \times 21)$ 과  $(129 \times 21)$ 에서는 각각 0.8%와 1%이고,  $(129 \times 21)$ 과  $(257 \times 30)$ 에서는 각각 0.1%와 1.5%이다. 본 연구에서 계산한 Rayleigh 수의 범위는  $Ra < 10^4$ 이다.

### 3. 결과 및 논의

벽면 온도가 일정한 표준적인 Rayleigh-Benard

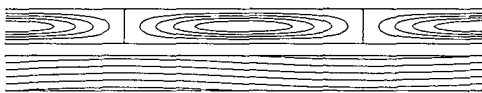


Fig. 2 Streamline and isotherm patterns in the conduction-dominated regime with  $k=0.5$  and  $Ra=500$ . The domain of  $x$  is  $0 \leq x \leq 2\pi/k$

문제인 경우, 비록 부력에 의한 불안정성이 언제나 존재하지만 임계 Rayleigh 수( $Ra_{c,B}=1708$ ) 이하에서는 유체의 점성력에 의해 정지 상태를 유지한다. 이 때에는 유동이 없는 순수한 전도 (conduction) 상태에 있으므로 그 해는 다음과 같다:  $\Psi = \omega = 0, \theta = 1 - y$ . 그러나 본 문제에서는, 벽면에서의 수평 방향의 온도 구배에 의해 정지 상태가 존재하지 않고 언제나 유동이 일어난다. 먼저, 유동이 일어나지만 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서의 유선과 등온선을  $k=0.5, Ra=500$ 으로 하여 Fig. 2에 도시하였다. 전도 영역에서의 유동은, 아래 벽면의 온도가 가장 큰,  $kx = \pi/2$  부근의 유체는 위로 올라가고, 가장 작은  $kx = 3\pi/2$  부근에서는 내려가는 모양을 갖는 셀(cell)이 형성된다. 그러나, 비록 유동은 일어나지만 그 세기는 약하므로 전도 영역의 등온선은 거의 수평으로 놓여진다. 즉, 벽면 온도가 일정한 표준적인 Rayleigh-Benard 문제에서의 순수한 전도 상태의 온도 분포( $\theta = 1 - y$ )와 거의 같다.

작은 Rayleigh 수에서는 Fig. 2와 같이 한 파장 ( $\lambda = 2\pi/k$ )에 걸쳐 두 개의 넓은 셀이 형성된다. 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 점성력보다 열적인 불안정이 증대되어 강한 대류가 일어나게 된다. Fig. 3에는 Rayleigh 수에 따른 유동의 변화 양상을 도시하였다. Rayleigh 수가 증가하여도  $Ra = 1710$ 까지는 Fig. 3(a)와 같이 2개의 셀을 갖는 전도 상태가 유지된다. 그러나  $Ra = 1715$ 에서는 같은 방향으로 회전하는 작은 셀들이 큰 셀 내에 형성된다[Fig. 3(b)]. 그리고, 일단 전도 상태가 깨어진 후에는  $Ra$ 의 증가에 따라 빠른 속도로 여러 개의 작은 셀들이 분리되기 시작한다. Fig. 3(b)~3(g)의 유동장은 이와 같은 셀의 생성 과정을 잘 보여주고 있다. 최종적으로  $Ra = 2000$ 에서는 Fig. 3(h)와 같이 거의 같은 크기의 셀들로써 구성되는 다수 셀 대류(multicellular convection)가 확립된다. 한편, 여러 개의 셀을 갖는 복잡한 유동이 일어나지만 Fig. 3(b-h)의 유동장은  $kx = \pi/2$  혹은  $kx = 3\pi/2$ 에 대한 좌우 대칭성을 모두 만족한다. 그리고 다수 셀 대류가 일어나기 시작하는 근사적인 임계 Rayleigh 수  $Ra_c \approx 1715$ 는 Rayleigh-Benard 문제의 임계 Rayleigh 수인  $Ra_{c,B} = 1708$ 에 가깝다.

다수 셀 대류가 확립된 Fig. 3(h)의 유동장은 한 주기에 걸쳐 12개의 셀을 보여 주고 있다. 본

연구에서는, 이와 같이 다수 셀 대류가 일어나는 영역에서는, 동일한 조건에서 여러 가지의 해가 존재한다는 것을 관찰하였다.

다중해(multiple solutions)에 대한 하나의 예로

써,  $k=0.5$ ,  $Ra=5000$ 에서 발견한 서로 다른 6개의 해를 Fig. 4에 도시하였다. 다중해의 종류는 셀의 갯수로써 구분되며, Fig. 4의 (a), (b), (c), (d), (e), (f)는 각각 8, 10, 12, 14, 16, 18개의 셀을

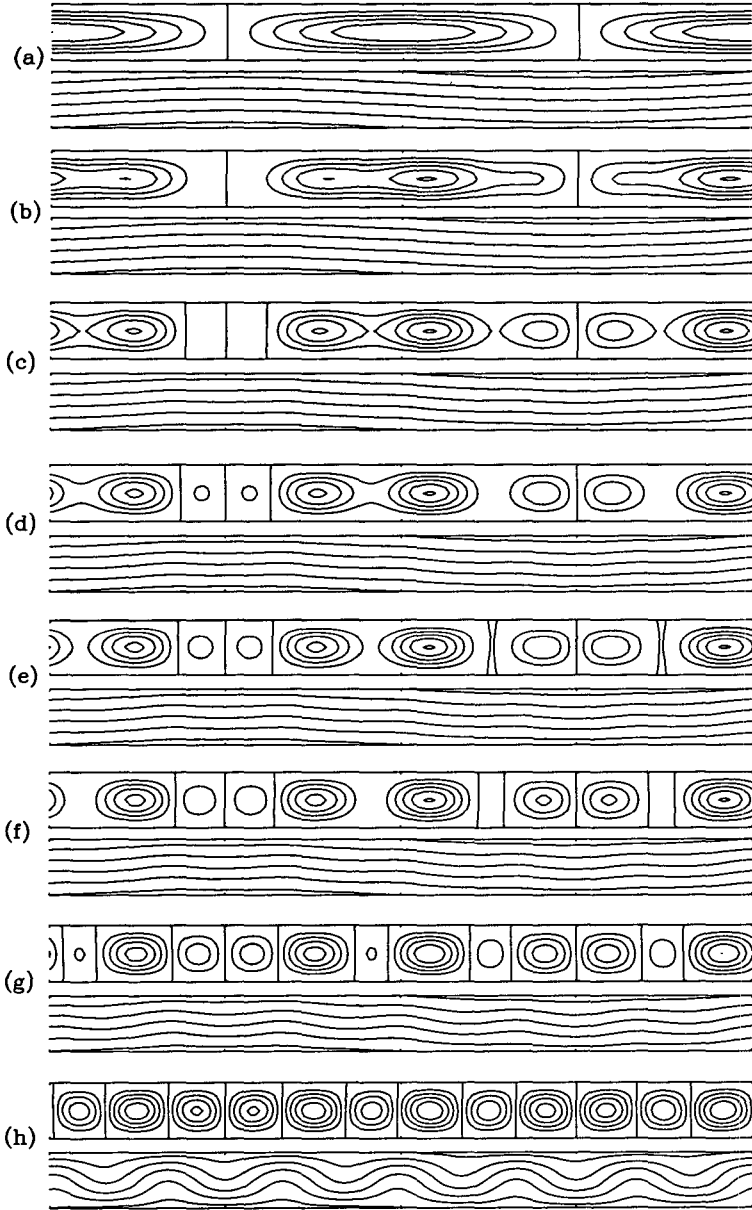


Fig. 3 Variation of flow patterns with respect to Rayleigh number at  $k=0.5$ : (a)  $Ra=1710$ ; (b)  $Ra=1715$ ; (c)  $Ra=1716$ ; (d)  $Ra=1717$ ; (e)  $Ra=1718$ ; (f)  $Ra=1720$ ; (g)  $Ra=1730$ ; (h)  $Ra=2000$ . The domain of  $x$  is  $0 \leq x \leq 2\pi/k$

갖는 유동을 보여주고 있다. 한편, 전도 영역과 대류 영역의 천이점 부근에서는 Fig. 5와 같은 이력(hysteresis) 현상이 관찰되었다.

Table 1에는 여러 가지 Rayleigh 수에서 발견한 다중해의 종류와 갯수를 나타내었다. 전 Rayleigh 수에 걸쳐 8개에서 18개의 셀을 갖는 유동이 일어나는데, 임계 Rayleigh 수 ( $Ra_c \approx 1715$ ) 부근의  $Ra=1750, 1800$ 에서는 Fig. 4(c)와 같이 12개의 셀을 갖는 하나의 해가 존재한다. 그러나 Rayleigh 수의 증가와 함께, 14개(at  $Ra=1900$ ), 10개(at

$Ra=2000$ ), 16개(at  $Ra=3000$ ), 18개(at  $Ra=4000$ ), 8개(at  $Ra=5000$ )의 셀을 갖는 유동이 차례로 추가되어 일어난다. 이와 같이 하여  $Ra=1900, 2000, 3000, 4000, 5000$ 에서는 각각 2, 3, 4, 5, 6개의 다중해를 갖는다.

무차원화된 시스템의 높이는 1이므로 평균적인 셀의 크기에 기초하여 파동수(wave number)를 정하면 Fig. 4의 (a), (b), (c), (d), (e), (f)의 유동장은 각각 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5의 파동수를 갖게 된다. 한편, 임계점 부근인  $Ra=1750, 1800$ 에서는

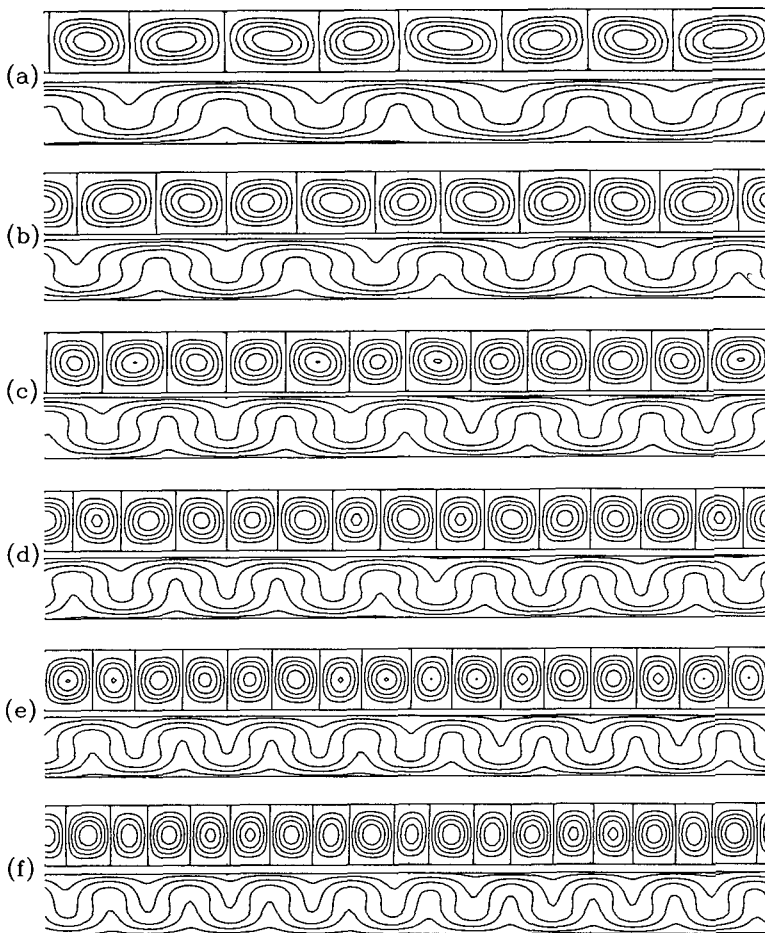


Fig. 4 Streamline and isotherm patterns showing six multiple solutions at  $k=0.5$  and  $Ra=5000$ . The domain of  $x$  is  $0 \leq x \leq 2\pi/k$ . The flows of (a), (b), (c), (d), (e), and (f) have 8, 10, 12, 14, 16, and 18 cells over one wave length, respectively

12개의 셀을 가지는 대류만 일어나는데, 이때의 파동수는 3이 되며 이것은 Rayleigh-Benard 문제에서의 임계 파동수인  $k_{c,B}=3.117$ 에 가깝다.  $Ra=1750, 1800$ 인 경우 다른 Rayleigh 수에서 구한 8, 10, 14, 16, 18개의 셀을 갖는 유동장을 초기 조건으로 사용하여도 언제나 12개의 셀을 갖는 유동이 구해졌다.

Fig. 4의 다중해는 Benjamin and Mullin<sup>(3)</sup>에 의해 Taylor 실험에서 발견된 여러 개의 유동과 아주 유사한 면을 가지고 있다. 그들은 aspect ratio가 12.61인 Taylor 실험 장치에서 같은 조건에서 8개에서 18개 사이의 셀을 갖는 서로 다른 15가지의 정상유동(steady flow)을 관측하였다. 유동의 안정성(stability)인 측면에서 볼 때, Taylor 문제에서는 안쪽 실린더의 회전에 의한 원심력이, Rayleigh-Benard 문제에서는 온도 차이에 의한 부력이 불안정을 일으키는 요인이 된다.  $k=0.5$ 일 때 종횡비 ( $2\pi/k$ )는 약 12.57이 되며, Fig. 4에서 보여주고 있는, 8개에서 18개의 셀을 갖는 유동은 Taylor 실험에서 관찰한 것과 좋은 비교가 된다. 한편, Benjamin and Mullin<sup>(3)</sup>의 실험에서는 9개, 11개 등의 홀수개의 셀을 갖는 유동도 발견되었다. 그러나 본 문제에서는, 주기적인 조건과 연속(continuity) 법칙에 의해 홀수 개의 셀을 갖는 유동은 발견되지 않았다.

Table 2에는 더욱 더 얇은 캐비티(cavity)를 나

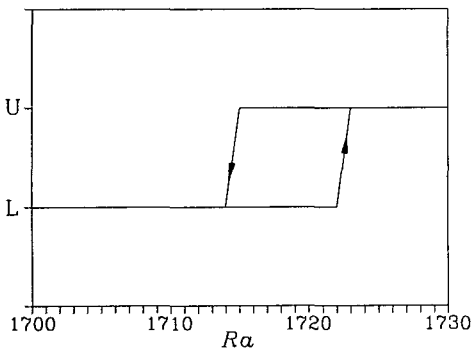


Fig. 5 Hysteresis phenomenon near the transition point at  $k=0.5$ . The letter 'L' represents the flow pattern in the conduction-dominated regime with two large cells over one length, and 'U' the flow with more than two eddies

타내는  $k=0.4$ 에 대한 다중해의 종류를 나타내었다. 이 경우는 aspect ratio가  $2\pi/k \approx 15.71$ 이 되며 임계점 부근인  $Ra=1750$ 에서는 16개의 셀을

Table 1 The number and the flow patterns of the multiple solutions as a function of Rayleigh number at  $k=0.5$ . The flow patterns are discriminated by the number of cells over one wave length

$Ra$	No. of solutions	Number of cells in the solutions
7000	6	8, 10, 12, 14, 16, 18
5000	6	8, 10, 12, 14, 16, 18
4000	5	10, 12, 14, 16, 18
3000	4	10, 12, 14, 16
2000	3	10, 12, 14
1900	2	12, 14
1800	1	12
1750	1	12

Table 2 The number and the flow patterns of the multiple solutions when  $k=0.4$ . The flow patterns are discriminated by the number of cells over one wave length

$Ra$	No. of solutions	Number of cells in the solutions
7000	8	12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26
5000	7	12, 14, 16, 18, 20, 22, 24
4000	6	12, 14, 16, 18, 20, 22
3000	5	12, 14, 16, 18, 20
2000	3	14, 16, 18
1900	2	14, 16
1800	2	14, 16
1750	1	16

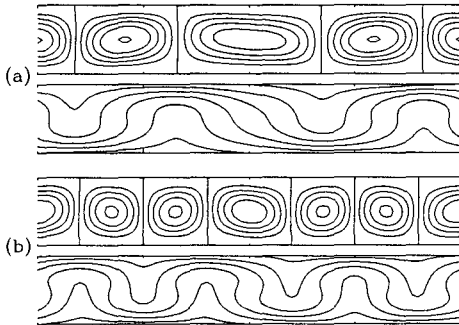


Fig. 6 Dual solutions at  $k=1$  with  $Ra=5000$ . The flows of (a) and (b) have 4 and 6 cells over one wave length, respectively. The domain of  $x$  is  $0 \leq x \leq 2\pi/k$

갖는 하나의 유동만 존재한다. 그러나 Rayleigh 수를 증가시키면 새로운 유동들이 나타나서  $Ra=7000$ 에서는 8개의 다중해가 발견되었다.

한편 상대적으로 큰 파동수인  $1 \leq k \leq 1.8$ 에서는 이중해(dual solutions)가 발견되었지만  $k \geq 1.9$ 에서는 하나의 해만 구해졌다. 이중해의 영역에서,  $1 \leq k \leq 1.3$ 에서는 4 셀 유동과 6 셀 유동,  $1.4 \leq k \leq 1.8$ 에서는 2 셀 유동과 4 셀 유동이 각각 존재한다. 이중해에 대한 한 예로써,  $k=1$ 일 때  $Ra=5000$ 에서 발견된 해를 Fig. 6에 도시하였다.

Table 1과 2는 여러 종류의 다중해를 보여주고 있다. 그런데 비록 여러 종류의 유동이 존재하지만,  $k=0.5$  ( $2\pi/k \approx 12.57$ )에서는 12 셀 유동,  $k=0.4$  ( $2\pi/k \approx 15.71$ )에서는 16 셀 유동이 언제나 존재한다. 즉, 다수 셀 대류가 일어날 때, 정방향에 가까운 셀을 갖는 대류가 언제나 존재한다는 것을 알 수 있다.

끝으로 Fig. 7에는  $k=0.5$ 일 때의 Rayleigh 수에 따른 Nusselt 수의 거동을 도시하였다. 다중해가 일어날 때, 벽면에서의 평균 Nusselt 수는 서로 큰 차이가 나지 않았다. 예를 들어  $Ra=4000$ 인 경우, 10, 12, 14, 16, 18 셀 유동의  $\overline{Nu}$ 는 각각 1.81, 1.90, 1.90, 1.85, 1.75이다. Fig. 7은 12 셀 유동의 값을 나타낸다. 유체 유동이 고려되지 않은 순수한 전도 상태에서의 Nusselt 수는 1이다.

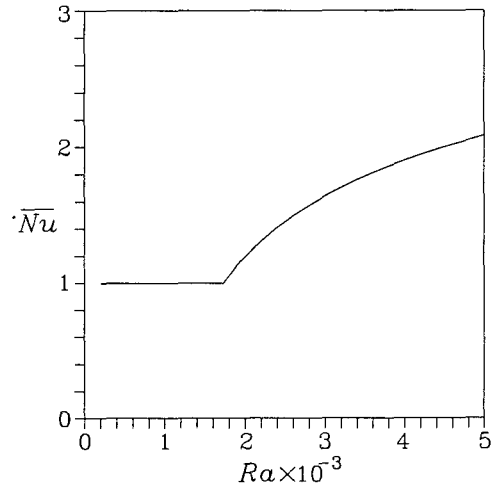


Fig. 7 Nusselt number as a function of Rayleigh number at  $k=0.5$ .  $\overline{Nu}$  was obtained by using the 12 cell flow as an initial condition

다수 셀 대류가 일어나지 않는 경우 ( $Ra \leq 1700$ )의 Nusselt 수는 거의 유동이 없는 전도해 (conduction solution)와 같은 일정한 값 ( $\overline{Nu} \approx 1$ )을 갖는다. 그러나 Fig. 3(b-g)와 같이 여러 개의 셀을 갖는 유동이 일어나는  $Ra=1720$  부근에서는 전도영역에 비해 상대적으로 큰 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 그리고 다수 셀 대류가 일어나는 난 후에는, Rayleigh 수에 따라 Nusselt 수가 점진적으로 증가한다. Fig. 7의 Nusselt 수의 모양은 일반적으로 보이는 분기(bifurcation) 다이어그램(diagram)과 유사하다. 즉, 이와 같은 정량적인 물리량 변화 모습으로도 어떤 유동 형태의 천이가 일어난다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

서로 다른 평균 온도와 같은 형태의 주기적인 불균일성을 갖는 두 수평 평판 사이에서 일어나는 자연 대류 현상을 조사하였다. 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 한 주기에 걸쳐 두 개의 셀(cell)을 갖는 유동이 일어난다. 그러나 파동수가 작은 경우, Rayleigh 수를 증가시키면 어떤 임계값 이상에서는 다수 셀 대류(multicellular conv-



ection)가 일어난다. 파동수  $k=0.5$  일 때, 한 주기에 걸쳐 8, 10, 12, 14, 16, 18개의 셀을 갖는 6개의 다중해(multiple solutions)가 발견되었다. 더욱 더 얇은 캐비티를 나타내는  $k=0.4$ 에서는 8개의 다중해가 발견되었지만 더 큰 파동수인  $1 \leq k \leq 1.8$ 에서는 이중해(dual solutions)가 존재한다. 그리고  $k \geq 1.9$ 에서는 하나의 해만 구해졌다. 다중해가 존재하는 영역에서는, 언제나 정방형에 가까운 셀을 갖는 대류가 일어난다.

### 후 기

이 연구는 2003년도 안동대학교 학술연구지원 사업에 의하여 연구되었습니다.

### 참고문헌

- (1) Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D., 1987, "Von Kármán Swirling Flows," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 465~491.
- (2) Nandakumar, K., and Masliyah, J. H., 1982, "Bifurcation in Steady Laminar Flow Through Curved Tubes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 119, pp. 475 ~ 490.
- (3) Benjamin, T. B. and Mullin, T., 1982, "Notes on the Multiplicity of Flows in the Taylor Experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp. 219~230.
- (4) Nandakumar, K., Masliyah, J. H. and Law, H. S., 1985, "Bifurcation in Steady Laminar Mixed Convection Flow in Horizontal Ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol. 152, pp. 145~161.
- (5) Yoo, J. S., 1999, "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3275~3286.
- (6) Watson, A. and Poots, G., 1971, "The Effect of Sinusoidal Protrusions on Laminar Free Convection Between Vertical Walls," *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 33~48.
- (7) Faghri, M. and Asako, Y., 1986, "Periodic, Fully Developed, Natural Convection in a Channel with Corrugated Confining Walls," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 1931~1936.
- (8) Asako, Y., Nakamura, H. and Faghri, M., 1988, "Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics in a Corrugated Duct with Rounded Corners," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1237~1245.
- (9) Yoo, J. S. and Kim, M. U., 1991, "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 7, pp. 181~200.
- (10) Poulikakos, D. and Bejan, A., 1984, "Natural Convection in a Porous Layer Heated and Cooled Along One Vertical Side," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, No. 10, pp. 1879~1891.
- (11) Bradean, R., Ingham, D. B., Heggs, P. J. and Pop, I., 1996, "Buoyancy-Induced Flow Adjacent to a Periodically Heated and Cooled Horizontal Surface in Porous Media," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 3, pp. 615~630.
- (12) Yoo, J. S., 2003, "Thermal Convection in a Vertical Porous Slot with Spatially Periodic Boundary Temperatures: Low Ra Flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 2, pp. 381~384.
- (13) Yoo, J. S. and Schultz, W. W., 2003, "Thermal Convection in a Horizontal Porous Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures: Small Ra Flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 24, pp. 4747~4750.
- (14) Drazin, P. and Reid, W., 1982, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- (15) Napolitano, M. and Quartapelle, L., 1985, "Block ADI Methods for Steady Natural Convection in Two Dimensions," in *Numerical Methods in Heat and Mass Transfer*, John Wiley and Sons, Vol. 3.