

형상 충전 및 격자 세분화를 이용한 삼차원 자유 표면 유동의 유한 요소 해석

김기돈* · 양동열† · 정준호**

(2004년 3월 27일 접수, 2004년 8월 31일 심사완료)

Three Dimensional Finite Element Analysis of Free Surface Flow Using Filling Pattern Technique and Adaptive Grid Refinement

Ki-Don Kim, Dong-Yol Yang and Jun-Ho Jeong

Key Words : Free Surface(자유표면), Transient Viscous Flow(비정상 점성 유동), Finite Element Method(유한요소법), Tetrahedral Control Volume(사면체 검사 체적)

Abstract

The filling pattern and an adaptive grid refinement based on the finite element method and Eulerian mesh advancement approach have been developed to analyze incompressible transient viscous flow with free surfaces. The governing equation for flow analysis is Navier-Stokes equation including inertia and gravity effects. The mixed FE formulation and predictor-corrector method are used effectively for unsteady numerical simulation. The flow front surface and the volume inflow rate are calculated using the filling pattern technique to select an adequate pattern among seven filling patterns at each tetrahedral control volume. By adaptive grid refinement, the new flow field that renders better prediction in flow surface shape is generated and the velocity field at the flow front part is calculated more exactly. In this domain the elements in the surface region are made finer than those in the remaining regions for more efficient computation. The collapse of a water dam and the filling of a fluidity spiral have been analyzed. The numerical results have been in good agreement with the experimental results and the efficiency of the adaptive grid refinement and filling pattern techniques have been verified.

기호설명			시간당 유출입량
dV_{in}	: 유출입량 증분	s^i	: 검사체적에서의 i -측면
dt_{min}	: 시간 간격	u	: 속도 벡터
du	: 속도 증분벡터	u^{t-1}	: 전시간 단계의 속도벡터
dU	: 속도 증분 벡터의 절점값	U	: 속도 벡터의 절점값
f_i	: 측면의 충전율	σ_{ij}	: 응력
f_{vol}	: 검사체적에서의 충전율	ρ	: 밀도
N_α, N_β	: 형상 함수	μ	: 점도
P	: 정수압	Δt	: 시간 간격
Q_{in}	: 검사 체적에서 유체의 단위	σ_n	: 수직 응력
		τ	: 전단 응력

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : dyyang@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3214 FAX : (042)869-5214

* 회원, 한국과학기술원 대학원 기계공학과
** 회원, 한국기계연구원 지능형정밀기계연구부

1. 서론

유동 선단이 존재하는 유동장을 해석하는 방법

에는 초기 격자의 절점이 이동하면서 해석하는 라그랑지안(Lagrangian) 격자기법⁽¹⁾과 절점이 고정된 오일러리안(Eulerian) 격자기법,⁽²⁾ 그리고 라그랑지안과 오일러리안 기법을 접목시킨 ALE 기법⁽⁴⁾으로 나눌 수 있다. 일반적으로 오일러리안 기법은 초기 격자의 형상을 그대로 사용하거나 선택적으로 사용하여 복잡한 유동의 해석에 용이하나 정확한 유동 선단의 예측이 어렵다. 이와 반대로 라그랑지안 기법은 정확한 유동 선단의 예측이 용이하지만, 많은 변형이 수반 되는 문제에 대하여 반복적인 격자 재구성이 필요하여 계산 시간의 증가를 초래한다. 이와 같은 이유로 본 논문에서는 변형이 많은 문제에 적합한 오일러리안 기법을 적용하였다. 오일러리안 격자 기법의 대표적인 방법은 Harlow 와 Welch 에 의한 MAC⁽²⁾법과 Hirt 와 Nichols 에 의한 VOF⁽³⁾법이 있다. 이 기법은 FDM 기법을 근간으로 발전되어 지금까지도 자유 표면 유동장 처리기법의 기본 개념을 제공하고 있다. MAC 법은 단위체(cell)들을 가로질러 이동하는 인자(maker)들을 따라가며 유동장을 해석하는 방법으로 유체의 유동 특성을 잘 표현하고 있으나 유동의 진전에 있어 비압축성 조건을 만족시키기 어렵다는 단점이 있다. VOF 법은 비압축성 연속방정식을 근간으로 한 VOF (Volume of Fluid)를 각 단위체 마다 계산하고 계산된 VOF 를 가지고 유동장을 정의하는 방법이다. 이 기법은 FEM 분야에서도 응용 발전되어 고분자 사출성형 공정에서는 Broyer⁽⁴⁾ 등에 의하여 고분자의 충전해석기법이 개발되었고, 금속 주조공정에 있어서는 Dhatt⁽⁵⁾ 등에 의하여 용융금속의 충전해석을 위한 연구 결과가 발표된 사례가 있다.

앞에서도 언급한 바와 같이 오일러리안 격자기법은 많은 장점을 가지고 있는 반면, 유동선단의 예측과 검사체적(control volume)에서의 유출입량 계산, 부분충전 검사체적에서 자유단 경계조건 처리에 많은 어려움이 따른다. 또한, 수치해석 결과의 정확도를 높이기 위한 미세한 격자의 사용은 격자 총 수의 증가와 더불어 검사체적의 증가를 가져와 해석에 소요되는 시간이 기하급수적으로 커지는 결과를 낳게 된다. 이러한 문제점을 해결하고자 일반적인 사각형 검사체적에 적용되는 형상충전기법(filling pattern technique)과 표면에서의 격자세분화 기법을 Jeong 과 Yang^(6,7)이 제안하여 보다 정확한 유동선단 및 유체 유동의 물리적 현상을 예측하였다. Kim 등^(8,9)은 요소 내부에 작은 단위체를 채워나가며 선단의 수직 방향 벡터를 계산하여 자유표면을 구현하는 방법으로 다양한 문제를 해석하였다.

본 연구에서는 이와 같은 형상 충전 기법과 격자세분화 기법을 사면체의 3 차원 검사체적에 적용하는 방법을 제안하여 유동 선단부를 포함한 유동장 전체에 있어서 수치해석 결과의 신뢰도를 높이고자 한다.

2. 본 론

2.1 지배 방정식

비정상 비압축성 점성 유동장 해석을 위한 지배 방정식은 가속도와 중력장을 모두 고려한 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 사용하였다.

연속(continuity)방정식:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

Navier-Stokes 방정식:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(u) + \rho f_i \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

여기서, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$,

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

그리고 $t, u_i, p, \rho, \mu, f_i$ 는 각각 시간, x_i 방향 속도 성분, 압력, 밀도, 점도, 내력이며 σ_{ij} 는 응력, d_{ij} 는 변형을 텐서(strain tensor)이다.

자유표면 $\partial\Omega_s$ 에서는 다음과 같은 응력에 대한 평형방정식이 적용된다.

$$\sigma_n = -p + 2\mu_{air} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_s, \quad (3)$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) = 0$$

여기서 σ_n, τ, μ 는 각각 수직응력, 전단응력, 점도이다. 첨자 n, t 는 유동선단에서의 수직과 수평 단위 방향 벡터를 의미한다. 유동선단에서 표면장력, 점성응력, 공기압은 고려하지 않는다. 벽면 경계면에서의 경계 조건은 다음과 같이 처리한다.

$$u_{nw} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_{wall} \quad (4)$$

$$\tau_w = 0$$

해석 초기($t=0$)에 설정된 속도 값 u_i^* 가 전체 영역에 대해 정의되며, 본 연구에서는 $u_i^* = 0$ 이 사용된다.

$$u_i = u_i^* \quad \text{on } \Omega \quad \text{at } t = 0 \quad (5)$$

2.2 유한요소수식화

유동장에 대한 지배방정식 (1)과 (2)를 복합유한 요소 수식화(mixed FE formulation)를 사용하여 약형(weak form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_i + \rho u_{j,i} u_{j,i} \bar{u}_i + \bar{d}_{ij} (-p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij})) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_i \bar{u}_i d\Omega \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \bar{p} (\frac{p}{\kappa} + u_{i,i}) d\Omega = 0$$

여기서 u_i, \bar{u}_i, κ 는 각각 속도함수, 가중함수, 체적 탄성 계수(bulk modulus) 이다. 식 (6)의 복합유한 요소 수식화를 위해서 사면체의 P1+/P1 요소를 사용하였다.^(10,11) 이 요소는 무게 중심에 5 번째 절점이 존재하며 Galerkin 방법으로 Navier-Stokes 방정식의 안정한 해를 얻기 위한 Brezzi-Babuska 조건을 만족한다. 이와 같은 MINI 요소는 삼차원에서 최소의 절점 수를 가지는 사면체 요소으로써 복잡한 형상을 나타내기 적합하며 선형 요소이므로 격자 세분화 방법의 적용에 유용하다. 무게 중심에 있는 5 번째 절점은 속도 분포에 대하여 부분적인 선형 근사를 나타내며 4 개의 부속 사면체로 분할한다. 속도에 대한 형상함수는 네 개의 선형 요소와 한 개의 버블(bubble)함수로 정의되며 압력은 네 개의 선형 형상함수를 사용한다. 본 연구에서 버블 함수는 수치 적분을 위해서 아래와 같이 요소의 꼭지점에서 0 값을 가지며 부속의 사면체에서는 부분 선형적이다.

$$u_k = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{i=1}^4 U_{k\beta} N_{\beta} + U_{kb} N_b, \quad \bar{u}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^4 \bar{U}_{i\alpha} N_{\alpha} + \bar{U}_{ib} N_b \quad (7)$$

$$N_b = C_1 \cdot N_1 N_2 N_3 N_4$$

$$p = \sum_{\gamma=1}^4 p_{\gamma} N_{\gamma}, \quad \bar{p} = \sum_{\delta=1}^4 \bar{p}_{\delta} N_{\delta}$$

여기서 $U_{k\beta}$ 과 $\bar{U}_{i\alpha}$ 는 속도함수와 가중함수(weighting function)에 대한 절점 값, $N_{\beta}, N_{\alpha}, N_b$ 는 속도성분, 가중함수에 대한 형상함수(shape function)과 버블 함수이며, p_{γ} 과 \bar{p}_{δ} 는 압력함수와 가중함수에 대한 절점(node)값, N_{γ} 와 N_{δ} 는 압력성분과 가중함수에 대한 형상함수이다.

각 요소에 해당하는 행렬을 구성할 때 사면체 요소의 경우 5 번째 절점에 대한 속도 근사가 이루어지지만 ‘static condensation’ 과정이 각 요소 수준에서 수행되어 4 절점의 사면체 해석으로 되돌아간다.⁽¹¹⁾ 식 (7)을 식 (6)에 대입하면 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻게 된다.

$$M\dot{U} + CU + N(u) = F \quad (8)$$

여기서,

$$M = \int \rho N_{\alpha} N_{\beta} \delta_{ij} d\Omega,$$

$$C = \int (-N_{\alpha,i} N_{\gamma} + \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,i} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k}) d\Omega,$$

$$N(u) = \int \rho \delta_{ij} N_{\alpha} N_{\beta,k} u_k d\Omega$$

$$F = \int N_{\alpha} f_i d\Omega$$

$$\bar{p}_{\delta} (-\int \frac{1}{\kappa} N_{\delta} N_{\gamma} d\Omega) p_{\gamma} + \bar{p}_{\delta} (-\int N_{\beta,j} N_{\delta} d\Omega) u_{j\beta} = 0$$

비선형 방정식인 식 (8)을 계산하기 위해 본 연구에서는 다음과 같은 Predictor-Corrector 방법을 채택했다.⁽¹²⁾

Predictor

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + (1-\gamma)\Delta t a_n,$$

$$u_{n+1}^0 = \tilde{u}_{n+1} \quad (9)$$

Corrector

from l=0 to l=L { (10)

$$(M_{i\alpha j\beta} + \gamma \Delta t C_{i\alpha j\beta}) U_{j\beta(n+1)}^{(l+1)} = M_{i\alpha j\beta} \tilde{U}_{j\beta(n+1)} + \gamma \Delta t (F_{i\alpha} - N(u_{i(n+1)}^{(l)}))_{i\alpha} \}$$

$$a_{n+1} = \frac{(u_{n+1}^{(L+1)} - \tilde{u}_{n+1})}{\gamma \Delta t}, \quad u_{n+1} = u_{n+1}^{(L+1)}$$

여기서, $u_n, a_n, \Delta t, \gamma$ 는 각각 속도, 가속도, 속도 증분, 해석의 안정성을 높이기 위한 설정 값이며 L 은 반복수정작업(corrector iteration)의 수다. 본 연구에서는 γ 와 L 값을 각각 1로 사용했다.

2.3 형상충전기법

오일러리안 기법은 실제 유동장과 계산에 사용되는 유동장이 일치하지 않는다. 그러므로 부분적으로 충전된 검사 체적에서 정확한 속도 분포를 구할 수 없다. 즉, 부분 충전된 검사체적에서 유체의 유출입량을 정확히 계산할 수 없다. 이와 같은 문제점의 해결방법으로 부분 충전 영역을 충전 영역에 포함시켜 유출입량을 계산 후 가중치를 주거나 부분 충전 영향을 지배 방정식에 첨가하여 반복 계산을 통해 해를 구하는 방법이 있다.

본 논문에서는 부분 충전 검사체적 사이에서 보다 정확한 유출입량 계산을 위해 사면체 검사체적의 형상 충전 기법을 제안하고 실제 물리적인 유동현상에 보다 근접한 계산 결과를 얻고자 한다. 여기서, 형상 충전 기법은 사면체 검사체적의 충전 형상을 7 가지 형상으로 정의하고 각 검사체적 단위로 정의된 형상 중 최적의 한 형상을 선정하여 이에 따라 유동선단과 각 검사 체적간의 유출입량을 계산하는 기법이다. 실제적으로, 각 부

분 충전 검사 체적 사이의 정확한 유출입량을 계산하기 위해서는, 인접하는 부분충전 검사체적에서 유체가 점유하는 영역과 그 영역에서의 속도분포를 알아야 한다.

본 기법에서는 일반적인 사면체 검사체적의 충전율로부터 인접면의 유체가 점유하는 영역을 계산함과 동시에 그 영역에서의 속도장을 구하여 보다 정확한 유출입량을 계산하고자 한다. 그러나, 이 두 가지 모두 스칼라 양인 충전을 만으로는 수학적으로 정확한 계산이 불가능하다. 그렇기 때문에 본 연구에서 제안한 형상충전기법에서는 다음과 같은 가정을 하였다. 먼저, 인접면에서 유체가 점유하는 영역을 예측하기 위하여 각 검사체적내의 유동선단 형태는 평면이고, 사면체 검사체적내의 유체 충전시 유동선단과 동시에 만나는 검사체적 측면들의 충전상수(α)는 일정하다고 가정하였다. 여기서, 충전상수는 충전형상에 따라 3차원 격자의 각 면에서 전체 넓이에 대한 유체의 점유 넓이 또는 비점유 넓이의 비로 정의한다. 위의 가정은 각 검사체적 내에서 발생될 실제의 자유 곡면의 유동 형태와는 차이가 있으나, 각 검사체적의 크기가 전체 유동장에 비하여 상대적으로 매우 작다고 전제한다면 이로 인하여 발생하는 오차는 무시할 수 있다고 판단된다. 이러한 가정은 일반적인 사면체 검사체적에 있어 체적율로부터 충전형상과 인접면에서 유체가 점유하는 영역의 예측을 가능하게 한다.

또한, 부분충전 검사체적에서 유체가 존재하지 않는 영역을 유체가 존재하는 영역으로 가정하고 계산을 했을 때, 전체 유동장 중 유체가 존재하는 영역에서의 속도장은 실제 유체가 존재하는 영역만으로 구성된 유동장으로 계산한 속도장과 거의 일치한다. 위와 같은 가정을 사용하여 부분충전 검사체적에서 유체가 존재하는 영역의 속도장을 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 부분 충전 검사체적을 완전 충전 검사체적으로 가정하여 속도장을 구하고, 형상충전기법을 사용하여 부분충전 검사체적 내부를 유체가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구분함과 동시에 검사체적의 각 측면에서 측면 충전율(side filling ratio)을 계산한다. 측면 충전율은 3차원 유동장에 있어서 사면체 검사체적의 각 측면과 유체가 접하는 면적을 각 측면의 전체 면적으로 나누어 구한 값으로 정의한다 (Fig. 1). 이 값으로 유체가 각 측면과 접하는 영역을 정의할 수 있을 뿐만 아니라, 보간법에 의하여 유체의 존재 영역(A_f)과 비존재 영역(A_e)의 경계선인 유동 선단과 측면이 만나는 점의 속도를 구할

$$\text{side filling ratio: } f_i = \frac{A^{i \text{ total}}}{A^{i \text{ wet}}} \quad (A : \text{area})$$

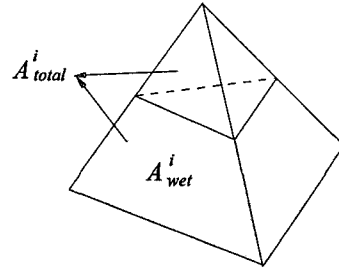


Fig. 1 The definition of side filling ratio

수 있다.

유체의 존재 영역(A_f)과 비존재 영역(A_e)의 경계선인 유동 선단과 측면이 만나는 점의 속도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{V}_i^m &= f_i \vec{V}_s^a + (1-f_i) \vec{V}_s^b, \quad \text{at } 0 < f_i < 1 \text{ \& } a \subset A_f \\ \vec{V}_i^m &= (1-f_i) \vec{V}_s^a + f_i \vec{V}_s^b, \quad \text{at } 0 < f_i < 1 \text{ \& } b \subset A_f \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, s^i 는 i 측면, f_i 는 측면 충전율, \vec{V}_s^a, \vec{V}_s^b 는 측면 s^i 에서의 양쪽 절점 속도이다.

앞에서도 언급한 바와 같이 위의 식에서 유도된 속도장은 측면 충전율의 계산과 유동선단의 예측이 이루어져야만 하기 때문에 이에 대하여 설명하면 다음과 같다. 먼저, 계산하고자 하는 검사체적의 충전율과 주위 검사 체적들의 충전율을 사용하여 본 연구에서 제시한 7 가지의 충전 형상 중 해당되는 충전 형상을 선택한다(Fig. 2). 그리고, 각각의 충전 형상에 따른 측면 충전율을 구하고 계산된 측면 충전율로부터 각각의 측면과 유동선단의 교점을 계산하여 유동선단을 구하게 된다. 이와 같이 속도장과 유동선단을 구하는데 사용되는 측면 충전율을 계산하기 위해서는 먼저 충전 상수를 구해야 하는데 앞에서 언급한 가정을 전제로 하고 Fig. 2를 참조하여 기하학적으로 수식을 유도하면 각 충전 형상에 대하여 다음과 같이 충전 상수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{case 3) } \alpha_{III} &= \sqrt[3]{\frac{6f_{vol} \cdot V}{|a_3 \cdot (a_1 \times a_2)|}} = \sqrt[3]{f_{vol}} \\ \text{case 4) } \alpha_{IV} &= \sqrt[3]{(1-f_{vol})} \\ \text{case 5) } \{ \alpha_V^3 - m_1 \alpha_V^2 - m_2 = 0 \mid \alpha_V \in R \} \end{aligned} \quad (12)$$

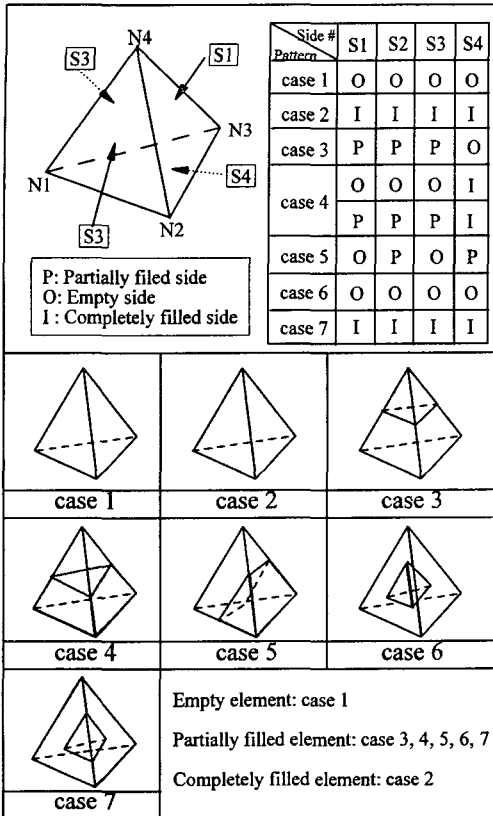


Fig. 2 Rule table of pattern types for filling pattern

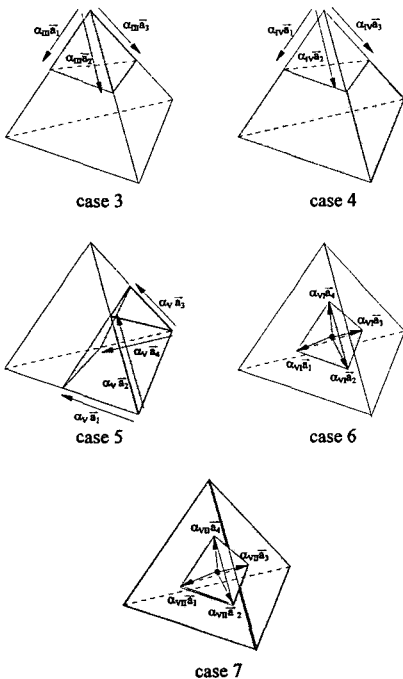


Fig. 3 Detail description of pattern type

여기서

$$m_1 = \frac{1}{6f_{vol} \cdot V} (-\vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_4 \times \vec{a}_3) + \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_4))$$

$$\& m_2 = \frac{1}{6f_{vol} \cdot V} (-\vec{a}_5 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_4) + \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_5 \times \vec{a}_4))$$

$$\text{case 6) } \alpha_{VI} = \sqrt{\frac{6f_{vol} \cdot V}{(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}} = \sqrt[3]{f_{vol}}$$

$$\text{case 7) } \alpha_{VII} = \sqrt[3]{1 - f_{vol}}$$

여기서, f_{vol} 은 검사체적의 충전율, V 는 검사체적의 체적이다.

이와 같이 계산된 충전상수 α_{III} , α_{IV} , α_V , α_{VI} , α_{VII} 를 사용하고 Fig. 3을 참조하여 각 충전 형상에서의 측면 충전율을 구할 수 있다.

2.4 검사체적에서의 유출입량 계산

본 연구에서 유한요소해석을 위한 격자는 4 절점의 사면체를 사용하였으며 검사체적은 충전율과 비압축성 유동 조건에 따라 다음과 같이 3 가지로 구분된다.

- (1) 내부검사체적($f_{vol} = 1$ & $Q_m = 0$)
- (2) 선단검사체적($0 \leq f_{vol} \leq 1$ & $Q_m \neq 0$)
- (3) 외부검사체적($f_{vol} = 0$ & $Q_m = 0$)

여기서 유한 요소 계산을 위한 유동장은 $0 \leq f_{vol} \leq 1$ 인 검사체적과 일치되는 격자들로 구성된다. 내부 검사체적은 유동장의 내부를 구성하고 유체 유출입의 총합이 0 이며, 선단 검사체적은 유동장의 외각을 둘러싸고 있기 때문에 유체의 유출입이 존재하고 시간에 따라 충전율이 변하며 유동 선단이 존재하는 영역이다. 또한, 외부 검사체적은 유동장 외부에 존재하며 충전율은 0 으로 변하지 않는다. 앞에서 언급한 검사체적들 중 유출입량의 계산이 필요한 것은 선단 검사체적이며, 이곳에서 형상 충전 기법에 의한 유출입량은 다음과 같이 계산한다.

$$Q_m^A = \sum_{i=1}^4 Q_i = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{l_{m_i}} Q_{s,i,k} W_s^k \quad (13)$$

여기서, W_s^k 는 VOF 법의 안정화를 위한 가중치로 Hirt 등⁽³⁾이 제안한 기법에 의한 값이다.

이와 같이 각 선단 검사체적에서 총 유속량을 계산한 후 각 선단 검사체적을 채우거나 비우는 데 소요되는 최단 시간 간격을 계산한다. 이와 같이 계산된 시간 간격과 수치해석상의 안정성을 보장하기 위한 임계 시간 간격을 비교하여 작은 값을

현재 시간 간격 dt_{min} 으로 사용하여 현재의 유출입량을 다음과 같이 계산한다.

$$dV_{in}^A = Q_{in}^A dt_{min} \quad (14)$$

최종적으로 계산된 유출입량을 사용하여 충전율을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$f'_{vol} = f'_{vol}{}^{(i-1)} + \frac{dV_{in}^A}{V_{total}^A} \quad (15)$$

여기서, V'_{total} 는 검사체적 A 의 총부피이다.

2.5 적응 격자 세분화

검사체적에서의 유출입량을 보다 실제적 유동 특성에 맞도록 계산하고자 하는 형상충전 기법도 부분 충전 검사체적을 완전 충전된 검사체적으로 가정하여 속도장과 압력장을 계산했기 때문에 이러한 가정에서부터 비롯되는 수치적 오차는 필연적으로 존재하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 적응 격자 세분화 기법은 유동의 선단 부분의 격자를 세분화하여 새로운 계산 영역을 설정함으로써 보다 실제의 유동과 비슷한 조건에서 해석이 수행될 수 있다. 이와 같은 적응 격자 세분화는 선단 부분에서만 격자의 세분화가 이뤄지므로 계산 영역의 요소수가 전체를 세분화한 방법에 비해 적으므로 계산시간의 감소와 저장용량을 절약할 수 있다. 또한, 선단의 세분화 정도를 조절하여 아주 유연한 자유 표면의 결과를 얻을 수 있다.

2.5.1 형상 충전 VOF 법에 적용된 적응 격자기법

적응 격자기법의 적용을 위해서는 세분화가 될 표면 요소와 이미 세분화와 결합과정을 거친 내부와 외부요소로 전체 영역이 나누어진다. 이와 같은 적응 격자 기법을 요약하면 다음과 같다.

step 1: 전체 영역의 요소들을 내부, 외부 및 표면 요소로 분리.

step 2: 현재의 새로운 표면 요소들을 이미 정한 세분화 수준으로 세분화를 수행.

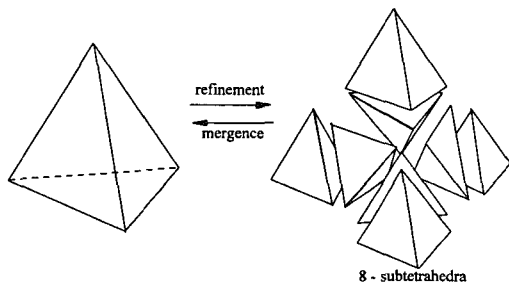


Fig. 4 The procedure of refinement and mergerce

Step 3: 새로운 내부 및 외부의 요소들 중 세분화가 이뤄진 요소에 대한 결합과정을 수행.

세분화의 과정은 사면체 요소의 경우 8 개의 사면체 요소로 분리되며 8 개의 요소로 분리됐던 내부 및 외부의 요소들은 하나의 요소로 결합된다. (Fig. 4) 이와 같은 세분화와 결합 과정에서 한 요소의 세분화 수준은 주변 요소의 세분화 수준과 일치하거나 한 단계의 차이를 넘어서는 안 된다. 이와 같은 규약은 유한 요소 해석의 편의성을 위한 것으로 한 변의 불연속 절점의 개수가 2 개 이상인 경우 해석상의 어려움이 발생한다.

다음의 조건들을 만족시키는 경우에 격자 세분화와 세분화된 격자의 결합 과정이 이뤄지게 된다.

(1) 세분화를 위한 조건:

- (a) 세분화된 표면 요소의 세분화 수준이 미리 정한 세분화 수준을 넘지 않아야 함.
- (b) 내부 및 외부 요소인 경우 다음의 조건을 만족시킴.

$$N - N^a < -1$$

여기서, N 과 N^a 은 요소의 세분화 수준과 주변 요소의 세분화 수준을 의미한다.

(2) 세분화된 격자의 결합 조건:

이미 4 개로 분리 되었던 요소이고 아래의 조건을 만족시킴.

$$N - N^a > -1$$

2.5.2 불연속 절점의 처리

3 차원 사면체 요소를 8 개의 요소로 세분화 하는 경우 주변 요소의 절점과 일치하지 않는 절점이 발생한다. 주변 요소의 세분화 수준에 따라서, 즉 세분화 수준이 한 단계 높거나 낮은 경우에 따라 각 요소의 모서리에 불연속 절점이 발생할 수 있다.

Fig. 5 와 같이 요소는 1-6 개의 불연속 절점을 갖게 된다. 이와 같은 경우 유한요소 해석을 위해서 절점에 특별한 제한 요건들이 필요하지만, 사

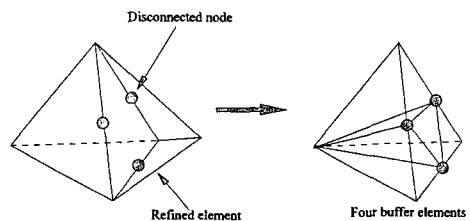


Fig. 5 Generation of buffer elements

면체 요소의 특성을 이용하여 Fig. 5와 같이 불연속 절점과 꼭지점들로 구성되는 사면체를 내부적으로 생성할 수 있다. 이와 같이 새롭게 생성된 요소는 항상 내부의 요소에 존재하기 때문에 자유 표면의 형상을 위해 표면 격자를 세분화하는 것에 영향을 미치지 않으며, 단지 세분화된 격자에 대한 해석만을 더 수행함으로써 격자 세분화로 발생하는 불연속 절점의 문제를 쉽게 처리할 수 있다. 이러한 요소들은 유한 요소 해석을 수행하는 과정 이전에 잠시 생성되었다가 해석이 수행된 후 바로 제거되어 각 요소의 VOF 등을 계산하는 부분에 영향을 미치지 않게 된다.

3. 해석결과

3.1 붕괴하는 물 댐의 해석

본 절에서는 자유 표면 비정상 유동 해석의 대표적 문제인 댐의 붕괴 문제에 대하여 제안한 방법을 검증한다. 붕괴하는 댐의 문제는 벽면에서 미끄럼 조건을 사용하므로 오일러(Euler)방정식으로 해석이 가능하지만 본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다.

3 가지의 격자 형태에 대하여 해석이 진행되는 데, case I, II는 고정 격자이며 case III은 적응 격자 세분화가 적용된다. 각 경우에 대하여 유동의 선단을 Martin⁽¹³⁾의 실험 결과와 비교하고 전체 자유 표면에 대한 이론 및 실험적 해가 없어 가장 격자의 밀도가 높은 case I의 경우를 전체 자유 표면의 근접한 해라고 가정하여 case II, III을 비교한다. 각 경우의 초기 격자의 수를 살펴보면, case II는 case I의 격자 수의 40%이며 case III은 case I의 격자 수의 1.5%이다. 해석하고자 하는 댐의 형상은 Fig. 6과 같이 댐 기둥의 폭에 대한 높이의 비(b/a)가 2이다. 계산에 사용된 물질 상수는 물의 밀도 1000 kg/m³, 점성 0.001kg/m·s 그리고 중력가속도 9.8 m/s² 등이다.

해석 결과의 표현에는 무차원화된 시간 $T = t \sqrt{\frac{2g}{a}}$ 를 사용하여 나타낸다. Fig. 7은 각 경우에 대한 초기 격자를 나타내고 있다. Fig. 8은 case III의 각 시간에 대한 격자 구성을 나타낸다. 자유 표면에서 효과적으로 격자 세분화 과정이 수행되었음을 알 수 있다. Fig. 9는 바닥과 맞닿아 흐르는 유동 선단의 위치를 Martin⁽¹³⁾의 실험과 비교한 결과를 나타낸다. case I, III은 실험 결과와 매우 근접한 결과를 나타내지만, case II의 경우는 자유 표면을 구성하는 격자 크기의 한계로 실험 결과와 부분적

인 오차를 나타내고 있다. Fig. 10은 붕괴되는 댐의 전체 자유 표면의 형상을 각 시간에 대하여 case II, III을 case I과 비교한 결과이다.

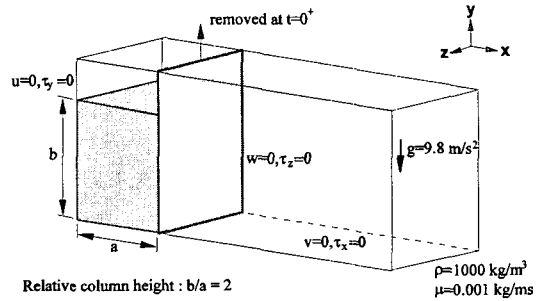
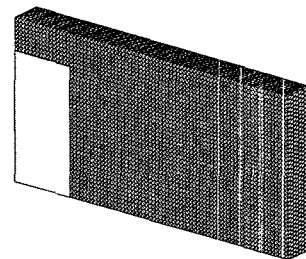
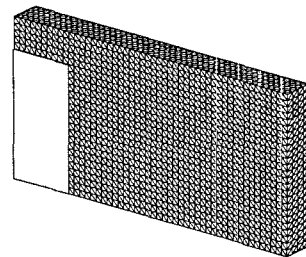


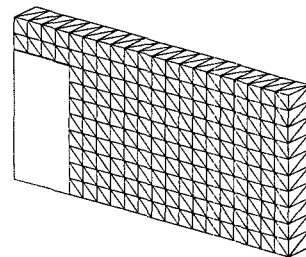
Fig. 6 Schematic diagram of initial water dam and boundary condition on walls



(a)



(b)



(c)

Fig. 7 Initial grids configuration case I(a), case II(b) and case III(c)

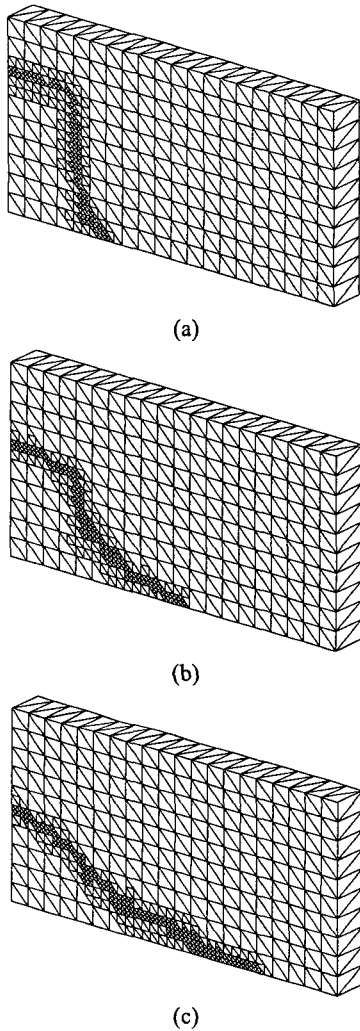


Fig. 8 Adaptive grids (refinement level 2) at (a) T=1.0, (b) T=2.0 and (c) T=2.9 obtained in case III

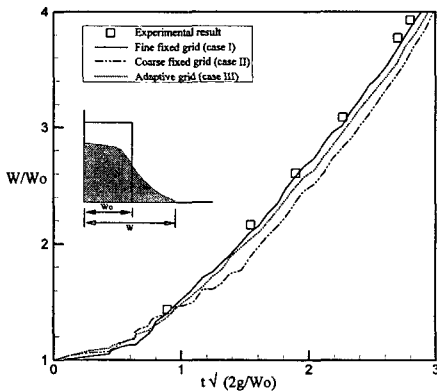


Fig. 9 Predicted front position variation versus time compared with experimental result by Martin⁽¹³⁾

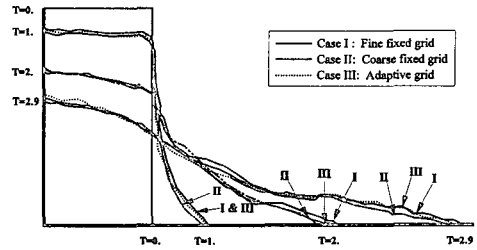


Fig. 10 Comparison between predicted free surfaces obtained in all cases

Table 1 Comparison of results obtained in cases

	Case I (Fine fixed grid)	Case II (Coarse fixed grid)	Case III (Adaptive grid)
Grid of flow field			
Ave. total # of elements	12,967	5,197	4,268
Ave. total # of nodes	3,087	1,328	1,197
Grid of total region			
Ave. total # of elements	76,800	30,000	6,896
Ave. total # of nodes	16,605	6,630	1,873
Relative computation time	7.0(24,151 s)	1.0(3,464 s)	1.3(4,452 s)

전체적인 자유 표면의 형상과 바닥 면에 닿은 유동 선단의 위치에서 적응 격자 세분화가 이뤄진 case III가 case II에 비하여 case I에 좀 더 근접함을 알 수 있다. 해석 중의 평균적인 격자와 절점의 수를 각 경우에 대하여 Table 1에 비교하였으며 더불어 각 경우의 계산 시간에 대한 비교도 덧붙였다. 비교 결과에서 보듯 case I의 경우가 가장 많은 시간과 메모리를 소모하며 case III은 사용된 평균 격자의 수에서 가장 적은 메모리를 사용하였고 계산 시간에서는 case II에 비하여 약 30% 정도 더 많은 시간이 소요되었다. 이와 같은 결과는 계산에 사용된 격자의 수에서 평균적으로는 효율적이었지만, 표면에서 격자 세분화를 하는 과정의 수행으로 실제의 유동 계산 외에 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다.

더 많은 격자를 사용한 case II에 비해 초기 격자가 적은 상태로 격자 세분화를 적용한 case III가 전체적인 자유 표면을 구성함에 있어 case I과 더욱 일치하였으며 case III의 경우 가장 효율적인 메모리가 사용됨을 알 수 있다. 계산 시간에 있어서는 case I과 case II의 사이에 case III의 계산 시간 결과가 존재한다. 자유 표면을 갖는 비정상 유동인 댐의 붕괴 문제 해석으로부터 적응

격자 세분화의 효율성을 보였다.

3.2 나선 형상의 충전

사면체 적응격자 세분화 기법의 효율성을 평가하기 위하여 용융 금속의 유동성을 측정하는 형상을 이용하여 유동 해석을 수행하였다.⁽¹⁴⁾ Fig. 11 과 같이 주입구로 용융 금속이 주입되어 중력에 의하여 나선 형상의 캐비티(cavity)를 충전하는 모델이다. 주입구의 상단 부분이 수두로 작용하며, 속도 경계층의 두께가 격자의 크기보다 작다는 가정으로 벽면에서는 미끄럼 조건을 사용하였다. 초기에 사용된 전체 요소는 Fig. 12 와 같다. 해석에 사용된 물질 상수는 용융 Al 의 밀도 2800 kg/m^3 , 용융 Al 의 점성 $0.0013 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 그리고 중력가속도 9.8 m/s^2 등이다. 격자 세분화의 수준은 1 로써 표면에서 한 번의 세분화를 수행하였다. 용융 Al 의 응고는 고려하지 않고 유동 특성만을 비교하기 위하여 본 모델을 사용하였다.

Fig. 13 은 충전이 진행되면서 계산에 사용된 요소들을 나타내고 있다. 같은 충전율에 대하여 격자 세분화를 적용한 경우 주입구로부터 더 먼 거리까지 계산 영역으로 설정되었다. 이것은 격자 세분화를 통하여 자유표면을 더욱 정확하게 추적하면서 미세한 체적 유동을 표현하기 때문이다.

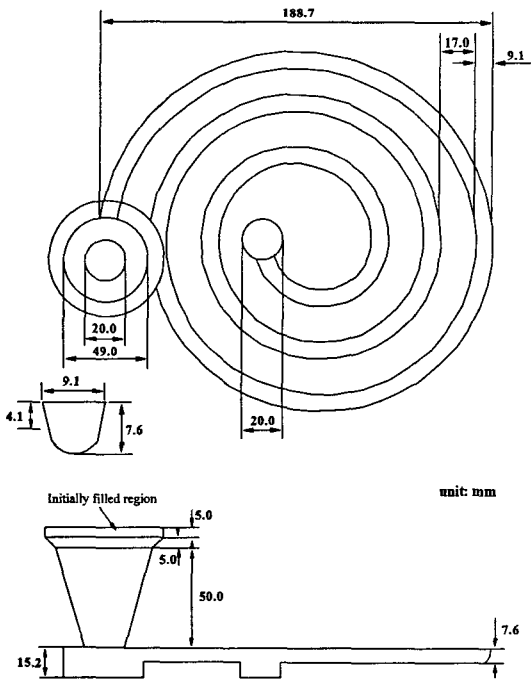


Fig. 11 Schematic diagram of a spiral cavity and initially filled region

완전 충전이 이뤄진 캐비티 부분은 격자 세분화 후 격자 병합화 과정을 통해 세분화 이전의 격자로 복원되었고 자유 표면 부분에만 1 차의 격자 세분화가 적용되고 있음을 나타내고 있다.

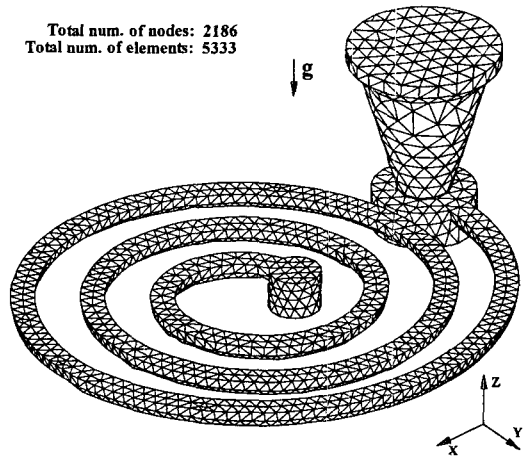


Fig. 12 Initial grid configuration of a fluidity spiral

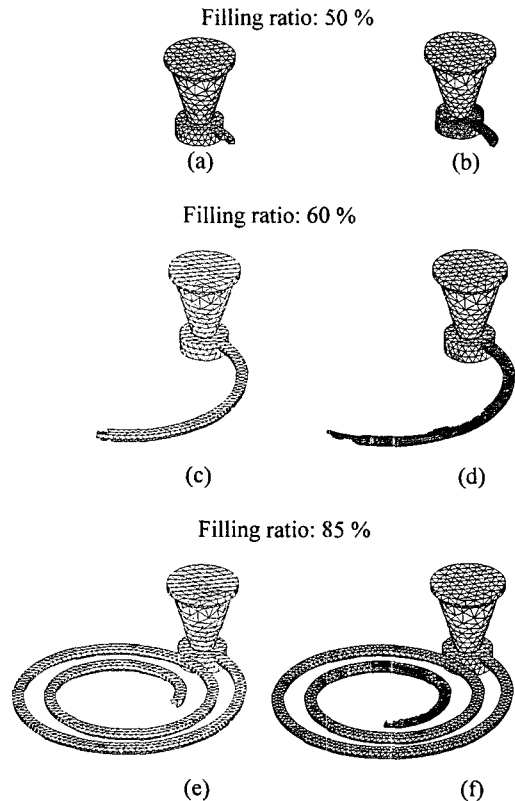


Fig. 13 Computational domain of fixed grids[(a),(c), (e)] and adaptive grids[(b),(d),(f)]

Fig. 14는 각 충전율의 자유 표면을 나타내고 있다. 격자 세분화를 적용한 경우 유동의 표면이 더욱 세밀하게 표현되고 있음을 알 수 있다. 주입구에서 자유 낙하한 용융금속이 주입구 바닥에 닿아 위로 솟구치면서 나선형 캐비티로 유입되었다. 이때 나선형 캐비티의 상부와 바깥쪽 부분부터 충전이 시작되었고 세분화가 적용된 경우 이와 같은 현상이 더욱 잘 묘사되었다. Fig. 13에서와 같이 동일한 충전율에서 격자 세분화의 경우가 주입구로부터 더욱 멀리까지 충전이 진행되었음을 알 수 있다.

Table 2는 해석 중에 사용된 격자의 수와 계산 시간을 고정격자와 격자세분화의 경우를 비교하였다. 자유표면의 정확도는 이론적으로 8 배 증가하였으나 계산 시간은 약 3 배 증가하였으며 격자 수와 절점의 수에서 약 2 배 정도의 증가를 나타냈다.

4. 결론

사면체의 검사체적을 갖는 3 차원 요소에 대한 형상 충전 기법과 적응격자 세분화 기법의 타당성 검토를 위하여 물 탕의 붓고 시 유체의 흐름을 예측하는 예제와 나선 형상의 충전 해석에 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 사면체 검사 체적 요소에 적용된 형상 충전 기법은 부분 충전 검사체적에서의 유출입량 계산에 있어 유체 충전부의 비압축성 유동 조건을 만족시키는 효율적인 방법으로 유체의 유동 진전 현상 묘사에 있어 좋은 결과를 보였다.

(2) 일반적인 사면체 검사 체적을 7 가지 충전 형상으로 정의 하고 측면 충전율을 계산함으로써 단순 수치 값인 충전율로부터 실제 물리적 유동 형태에 보다 근접한 유동 선단을 예측할 수 있었다.

(3) 적응 격자 세분화 기법의 적용은 부분 충전 검사체적에서의 미충전 부분의 제거가 가능하여 유동 선단에 의하여 예측된 형태에 보다 근접한 유동장을 얻을 수 있었고, 유동선단부의 격자를 미세하게 생성시킴으로써 속도장을 보다 효율적이면서 정확하게 계산할 수 있었다.

(4) 사면체 요소의 형상충전과 적응격자 세분화 기법을 물 탕의 붓고 문제의 수치 묘사에 적용하여 안정적인 유체의 흐름 현상 예측과 실험 결과에 근접한 해석 결과를 얻을 수 있었다.

(5) 나선 형상의 충전 수치 묘사에서 적응 격자 세분화를 적용하여 표면 유동의 예측의 정확도를 높이고 같은 표면 정밀도에 대하여 계산 시간의

감소와 메모리의 효율적인 활용을 하였다.

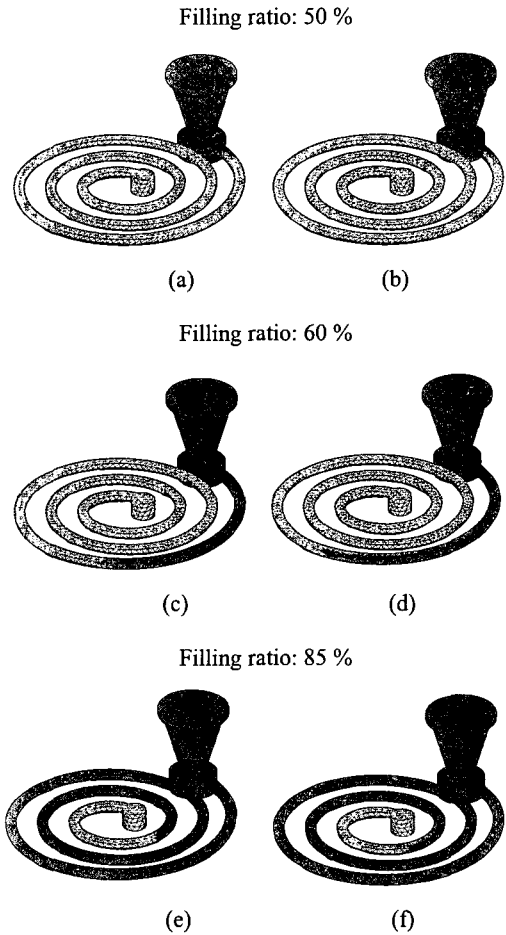


Fig. 14 Predicted free surfaces of fixed grids[(a),(c), (e)] and adaptive grids[(b),(d),(f)]

Table 2 Comparison of results obtained in fluidity spiral filling

	fixed grid	Adaptive grid
Grid of flow field		
Ave. total # of elements	3,857	8,786
Ave. total # of nodes	1,554	2,904
Grid of total region		
Ave. total # of elements	5,333	9,370
Ave. total # of nodes	2,186	3,804
Relative computation time	1.0(22,819 s)	3.2(73,025 s)

참고문헌

- (1) Balasubramaniam Ramaswamy and Mutsuto Kawahara, 1987, "Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 953~984.
- (2) Harlow, F. H. and Welch, J. E., 1995, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2182~2189.
- (3) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (4) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, "A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding," *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 19, pp. 423~444.
- (5) Dhatt, G., Gao, D. M. and Ben, Cheikh, A., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 823~831.
- (6) Jeong, J. H. and Yang, D. Y., 1996, "Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flow with Surface Using Pattern Filling and Refined Flow Field Regeneration Technique," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 20, No. 3, pp. 933~944.
- (7) Jeong, J. H. and Yang, D. Y., 1998, "Finite Element Analysis of Transient Fluid Flow with Free Surface Using VOF Method and Adaptive Grid," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 26, pp. 1127~1154.
- (8) Kim, M. S., Shin, S. H. and Lee, W. I., 2000, "A NewVOF-Based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (I) - New Free Surface Tracking Algorithm and Its Verification -," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 24, No. 12, pp. 1555~1569.
- (9) Kim, M. S., Park, J. S. and Lee, W. I., 2000, "A New VOF-based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (II) - Application to the Cavity Filling and Sloshing Problems -," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 24, No. 12, pp. 1570~1579.
- (10) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedure*, Prentice Hall, New Jersey, pp. 268~296.
- (11) Gao, D. M., 1999, "A Three-Dimensional Hybrid Finite Element-Volume Tracking Model for Mould Filling in Casting Processes," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 29, pp. 877~895.
- (12) Hughes, T. J., Liu, W. K. and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, pp. 1~60.
- (13) Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.
- (14) Kim, S. K. and Kim, Y. J., 2000, "Rheological Behaviour and Fluidity of SiCp+AZ91HP Magnesium Composites," *Mater. Sci. Technol.*, Vol. 16, pp. 887~881.