

FEM에 의한 볼트 결합 판재의 동특성 해석

The Dynamic Characteristics of Bolt Jointed Plates Using the Finite Element Method

홍 상 준* · 유 정 훈† · 김 윤 영** · 이 동 진*** · 이 석 원***

Sang-joon Hong, Jeonghoon Yoo, Yoon Young Kim, Dong Jin Lee and Suk Won Lee

(2004년 6월 11일 접수 ; 2004년 8월 4일 심사완료)

Key Words : Bolted Joint (볼트결합), Finite Element Method (유한요소법), Cone Frusta Method (콘프러스타 방법), Modal Analysis (모달해석), Design of Experiment (실험계획법)

ABSTRACT

There have been lots of efforts to analyze the dynamic characteristics of mechanical systems. However, it is difficult to know the dynamic characteristics of mechanical systems composed of many parts with joints. Specially, in case of a bolted joint structure, no effective modeling method has been defined to acquire dynamic characteristics of the structure using the finite element (FE) analysis. In this research, a linear dynamic model is developed for bolted joints and large interfaces using cone frusta method and linear spring elements, respectively. The developed modeling method for bolted joints is verified based on the experimental result.

1. 서 론

현재 기계 부품의 조립 방법으로는 볼트에 의한 체결이 가장 많이 사용되고 있다. 기존의 볼트 체결에 대한 유한요소해석(finite element method, FEM) 모델링 방법은 해석 대상을 하나의 체적, 즉 강결합 모델링 방식으로 진행 되어왔다. 그러나, 동적 해석 시 용접결합을 제외한 볼트, 리벳 및 핀 등의 결합 방법은 강결합의 특성이 아닌 탄성 결합의 특성을 지닌 것으로 확인되었다.^(1, 2) 이는 모달테스트(modal test)를 통한 공진주파수와 강결합된 모델의 동적 해석 시 물레이션 결과를 비교하였을 때, 실험에 의해 구한 공진주파수 값이 강결합된 시물레이션에 의한 결과

값보다 현저히 낮게 나오는 것에서 파악이 가능하다. 그러나 현재 탄성 결합을 고려한 볼트 결합 관련 유한 요소 해석 모델링 방법은 동적 해석에 있어 정의되지 않고 있는 실정이다.

현재까지, 볼트 결합 구조물에 대한 연구는 1969년 Klosterman이 빌딩블럭법^(1~4)(building block approach, BBA)을 창안해 낸 이후, 실험에 의해 얻어진 결과를 부분구조 합성법에 의해 볼트 결합부의 동적 특성을 찾아내 이를 타 구조물에 적용하는 방법과 유한요소해석법을 이용하여 결합부를 상세 모델링하여 정적인 해석을 통해 결합부의 강성을 추출, 동적 해석을 하는 방법^(5~8)으로 진행되어 왔다. 그러나, 전자의 방법으로는 각 볼트 결합조건 즉, 볼트의 강성, 체결대상(bolted members)의 강성 등에 따라 볼트 결합부의 동적 특성이 다르게 나타나며, 결합부의 동적 특성을 구하기 위해서는 많은 횟수의 실험이 요구되기 때문에 일반적인 해답을 구할 수 없다. 그리고 후자의 경우는, 볼트 결합부에 관한 모델링 방법으로 좁은 접합면을 가지는 대상에 대한 연구가 주를 이루고 있고, 기존의 방법은 특정 유한요소해석 소프

† 책임저자 : 정회원, 연세대학교 기계공학부

E-mail : yoojh@yonsei.ac.kr

Tel : (02) 2123-2859, Fax : (02) 362-2736

* 정회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

*** 삼성전자 메카트로닉스 센터

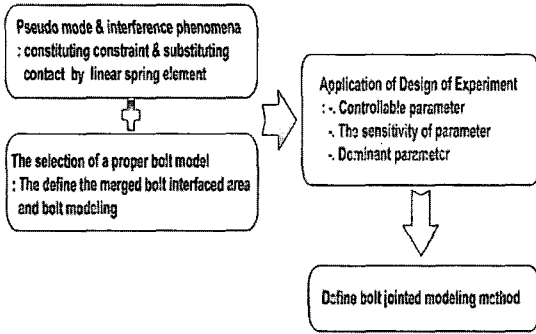


Fig. 1 Research process

트웨어에서만 적용이 가능하며, 접합면의 요소(mesh)를 형성하는데 있어 한계점을 가지고 있다.

이 연구에서는 유한요소 해석 범용프로그램인 ANSYS 7.0/multiphysics을 이용하여 결합부의 특성을 고려한 전체 구조물의 동적 특성을 얻을 수 있는 일반화된 모델링 방법을 연구하였다. 먼저, 볼트 구조물의 정적 해석 모델 기법인 콘프루스타 방법(cone frusta method)^(9, 10)를 기반으로 하여 접합 대상의 접합면에서 볼트에 의해 구속되는 면적을 결정하고 이를 기존의 모델링 방법과 비교하였다. 또한, 선형 스프링 요소를 이용하여 넓은 접합면적을 갖는 경우에 대해 접합면의 노드(node) 사이의 비연계로 발생하는 방법에 대한 간섭현상(interference effect)을 해결하였다. Fig. 1은 전체적인 연구개요를 나타내고 있으며, 모델링 결과는 모드 실험을 통하여 검증하였다.

2. 모델링 기법 검증을 위한 실험

2.1 실험 구성 및 대상

이 연구의 실험 대상은 초정밀 생산 장비에 사용되는 강판과 그라나이트(granite) 판재로 구성된 결합

구조물이다. Fig. 2는 이 실험의 구성도를 보여주고 있다. 실험 장비는 B&K사의 펄스 시스템을 사용하였으며, 여기서 제공된 S/W를 이용하여 주파수 응답 함수(frequency response function, FRF)를 구하였다. 센서는 가속도 센서를 이용하였으며, 측정(sensing) 위치는 절점(nodal point)에서 벗어나기 위해 Fig. 3(a)와 같이 설정하였다. 가진 위치는 균일 분포(evenly distribution)로 35개의 지점(7×5)을 매트릭스 형태로 구성하였고, 전계(assembled structure)에 대한 실험 이전에 분계(substructure)에 대한 튜닝(tuning)을 실시하였다. 실험 조건은 M6×20 볼트를 사용하여 4볼트, 6볼트A(길이방향), 6볼트B(폭방향), 8볼트 결합으로 설정 하고, 볼트에는 정격 토크인 150 kgf·cm를 가하여 관심구간인 0~2000 Hz까지의 응답을 구하였다. 6볼트 A, B에 대한 결합조건은 Fig. 3(b)에 나타내었다.

2.2 실험 결과

전계에 대한 모달 테스트 결과는 Table 1과 Fig. 4

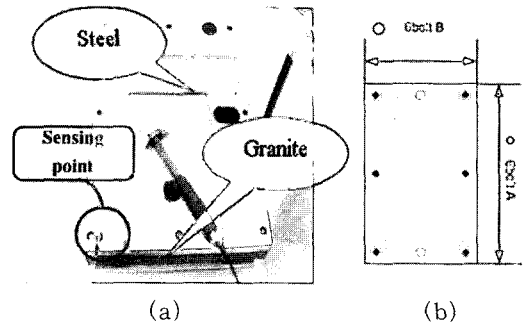


Fig. 3 Set-up for experiment & bolting location (a) Experiment object (b) Bolting location (6 bolts)

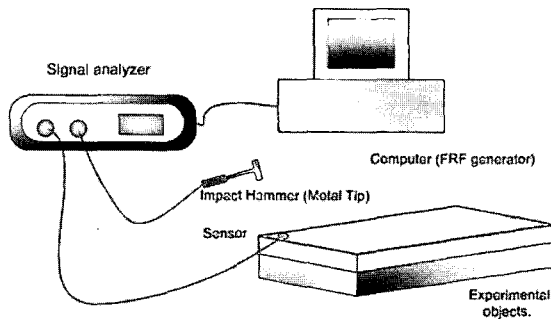


Fig. 2 Experimental equipments

Table 1 Experiment results(Hz)

mode	4 bolt	6 bolt A	6 bolt B	8 bolt
1st mode	661	704	665	726
2nd mode	768	778	811	840
3rd mode	1153	1380	1041	1390
4th mode	1239	1410	1276	1440
5th mode	1325	1630	1361	1830
6th mode	1439	1800	1808	1850
7th mode	1678	2060	2077	2160
8th mode	1817	-	-	-
9th mode	1944	-	-	-

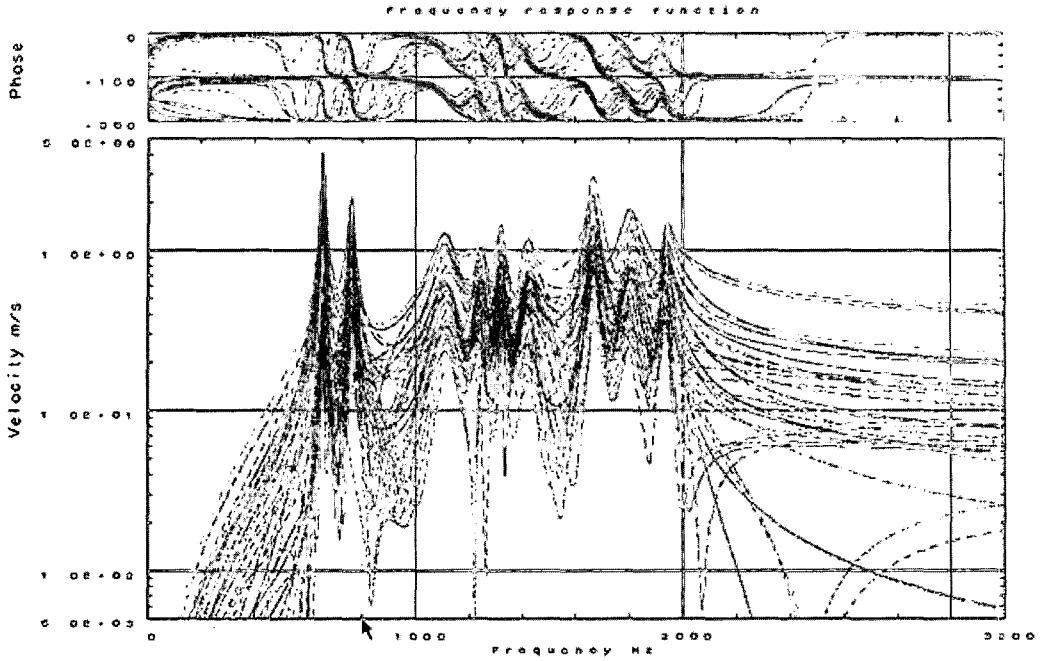


Fig. 4 Curve fitted FRF for 4 bolt(150 kgf·cm) model

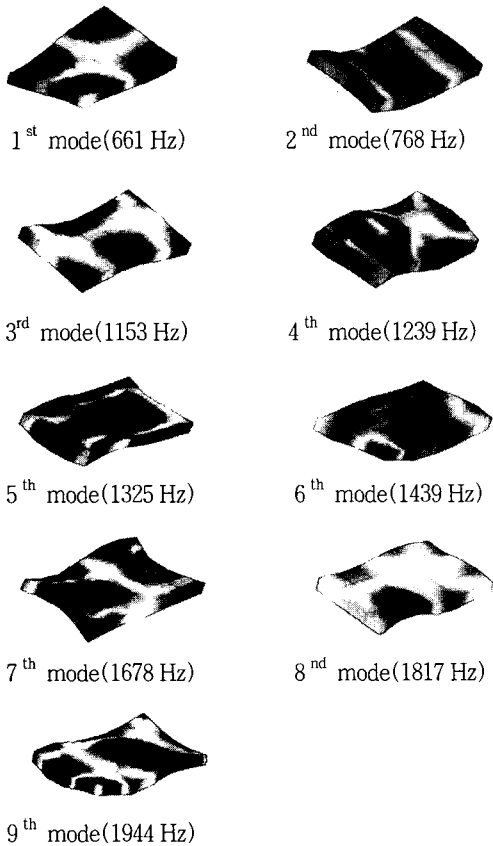


Fig. 5 Mode shapes for 4 bolt assembled plates

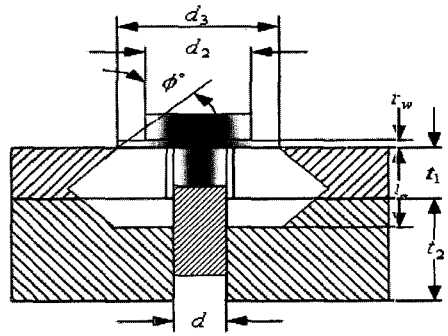


Fig. 6 Cap screw frusta model

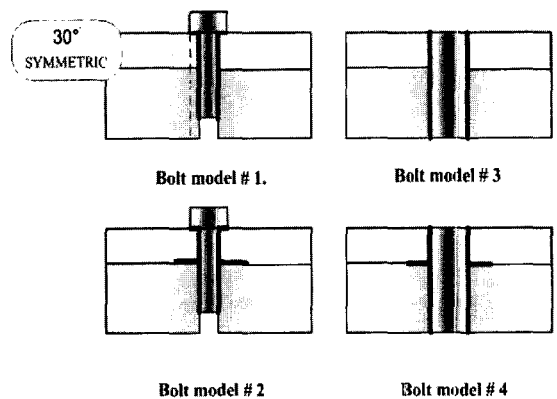


Fig. 7 Bolt models

에 나타난 것과 같다. 실험결과는 이론적으로 볼트 수가 증가하면 결합 강성이 증가하면서 공진 주파수가 상승하는 것을 보여주고 있다. 모드형상(mode shape)은 볼트 개수와 위치에 따라 변하며 볼트의 위치에 따라 모드 형상의 순서가 바뀌거나 부분적 형상 변형이 있음을 알 수 있다. Fig. 5는 4개의 볼트에 의해 고정된 관재의 실험에 의해 구해진 모드 형상을 나타내고 있다.

3. 볼트 모델링 기법 연구

3.1 콘프러스타 방법(Cone Frusta Method)

콘프러스타 방법(cone frusta method)은 정적 해석의 경우 볼트와 결합 대상이 되는 부재의 응력 분포 영역을 추정하고, 볼트 체결된 대상물에 대한 강성을 구하는 이론이다. Rötischer는 Fig. 6과 같은 볼트 결합부에서 다음과 같은 판 요소 등이 결합된 강성을 추출하였다.^(10, 11)

$$k_m = \frac{\pi E}{4L} \left[\left(d_w + \frac{L}{2} \right)^2 - d^2 \right] \quad (1)$$

여기서,

L : the grip length of the joint

d : the bolt diameter

d_w : the diameter of the washer

Shigley와 Micshke는 적분 과정에서 콘의 각도 (cone angle, ϕ°)를 미지수로 두어, 식 (2)와 같이 강성을 표현하였다.⁽⁹⁻¹¹⁾

$$k_m = \frac{\pi E d \tan \phi^\circ}{2 \ln \left\{ \frac{(L \tan \phi^\circ + d_w - d)(d_w + d)}{(\tan \phi^\circ + d_w + d)(d_w - d)} \right\}} \quad (2)$$

이 연구에서는 ϕ° 가 30° 인 정적 해석 관계를 이용하여 이를 동적 해석에 적용하였다.

3.2 볼트 모델링

볼트 모델링은 Fig. 6과 같이 캡스크류 프러스타 (cap screw frusta) 모델을 적용한다. Shigley가 제안한 콘프러스타 방법의 기하학적 정리는 다음과 같

다.^(9, 10)

$$l_m = t_1 + t_2 / 2 \quad \text{if } t_2 < d$$

$$= t_1 + d / 2 \quad \text{if } t_2 \geq d \quad (3)$$

$$d_3 = 1.5d + l_m \tan \phi \quad (4)$$

이 관계를 이용하여, Fig. 7에 나타난 바와 같이 볼트 모델을 설정하였다. Fig. 7에서 볼트 모델 1, 2번은 볼트 머리 부분을 상세 모델링 한 것이다.

2번 모델은 콘프러스타 방법에 따라 분계 간의 접합면에 분계와 분계가 정적 거동에서 하나의 강체로 응력흐름(stress flow)이 있는 부분을 기하학적 계산을 통하여 자유도 구속을 한 모델이며, 1번 모델은 콘프러스타 방법을 적용하지 않은 모델이다. 볼트 모델 3, 4번에서는 볼트 머리부 직경을 가지는 원통형 강체로 볼트 모델링을 간편화 하였으며 1,2번 모델과 마찬가지로 콘프러스타 방법의 적용 유무에 따라 구분된다. Fig. 7에서 실선으로 표시된 부분은 노드간 자유도를 상호 구속한 영역이다. 이는 기존의 전계를 하나의 강체로 모델링하는 기존의 방식보다 전체 및 국부적 강성을 낮추는 결과를 가져온다. Fig. 8은 볼트 모델에 대한 검증 결과를 보여준다. 콘프러스타 방법에 의해 접합 대상의 접합면에서 자유도를 구속하는 것은 자유도를 구속하지 않는 모델 보다 오차가 적으며, 상세 모델링의 경우, 보다 정확한 값을 나타낸다. 콘프러스타 방법을 적용한 간편모델 4번 또한

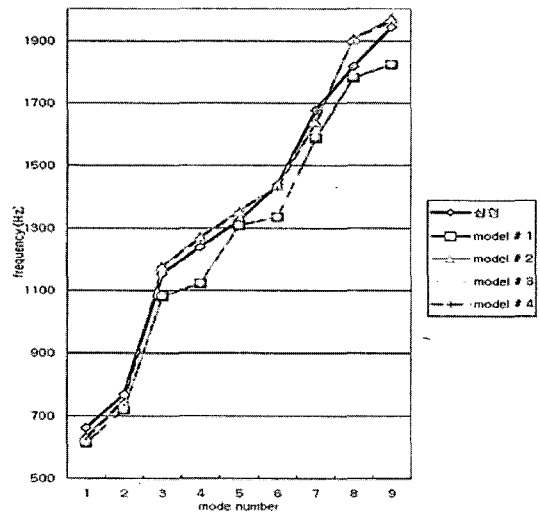


Fig. 8 Frequencies with respect to bolt models

만족스런 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있다.

4. 접합면 모델링

4.1 간섭현상(Interference Effect)

간섭현상은 유한요소해석에서 동적 선형 해석(linear dynamic analysis)을 하는 경우 전계를 구성하는 방법으로, 분계 사이의 접합면에서 부분 자유도만 상호 구속할 때 나타나는 현상이다. 볼트 체결 시, 콘프러스타 방법을 적용하여 자유도를 분계 간의 볼트 결합 영역만 부분적으로 구속 하게 되면, 전계에 대한 동적 해석의 결과는 자유도가 상호 구속된 이외의 영역에서 교호작용(interaction)이 인접한 분계의 노드 사이에서 발생하지 않게 된다. 이는 해석 결과에서 모드 형상을 구성하는 고유 벡터가 분계 상호간 독립적으로 계산되는 결과를 초래하며, 인접한 분계의 고유 벡터 사이에 중첩이 발생하지 않고 인접한 분계는 자유도가 구속된 영역을 제외하고는 구속 조건으로서의 역할을 하지 못하는 것을 의미한다. Fig. 9는 이러한 영향에 의한 간섭현상을 보여주고 있다. 이러한 간섭현상은 시스템의 강성 오차를 증가시켜 정확한 해를 구할 수 없게 하며 각 분계의 공진 주파수에 따라 이종모드(pseudo mode)가 나타나는 결과를 초래한다.

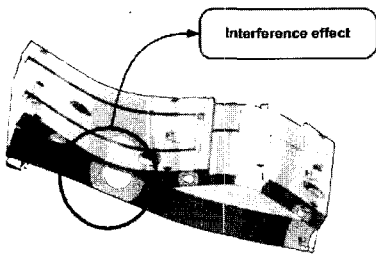


Fig. 9 Interference effect in FEM

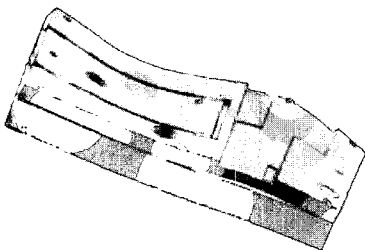


Fig. 10 Spring element installed part mode shape

4.2 스프링 요소에 의한 접합면 모델링

간섭 현상을 해결하기 위해서는 볼트 결합에 의해 자유도가 구속된 이외의 영역에 대한 모델링 기법이 요구된다. 비선형 해석의 경우에는 접합면을 설정하여 해를 도출할 수도 있지만, 동적 해석의 경우 비선형 계산의 한계로 인해 이러한 방법의 적용이 쉽지 않다. 이를 극복하기 위한 방법으로 제시된 것은 인접한 분계의 접합면에 갭요소(gap element)를 이용하는 방법이다.⁽⁹⁾ 그러나 이 방법의 경우 접합면의 요소망 모양을 일치 시켜야하는 제약이 따르며, 갭요소를 지원하는 상용 유한요소 해석 프로그램을 사용해야 하는 단점이 있다. 이에 대한 해결책으로 이 연구에서 제시하는 것은 스프링 요소를 사용하여, 변형 구속 조건과 노드 간의 교호작용을 유도하는 것이다. Fig. 10은 Fig. 9의 모델에 스프링을 사용한 경우의 모드 형상으로 스프링에 의해 변형 구속 조건이 가해지는 것을 확인할 수 있다. Fig. 11은 스프링 요소의 개요도이다.

(1) 모델링 변수의 선정

접합면에 스프링 설치 시 고려해야 할 사항은 스프링의 개수, 위치 그리고 강성계수이다. 스프링 강성계수의 허용 설계 영역은 간섭효과의 유무와 강체모드(rigid body mode) 개수를 통하여 구해진다.

접합면의 변형 구속 조건으로서의 기능을 하게 되는 최소의 스프링 상수는 허용 설계 영역의 하한 값으로 설정된다. 강체모드는 포텐셜 에너지(potential energy)를 0으로 만족시키는 상대 변위가 0인 병진 또는 회전 운동을 나타내는 모드이다.⁽¹²⁾ 자유 구속(free-free) 시스템의 경우 6자유도 방향으로 6개의 강체모드가 나타난다. 그러나 접합면의 스프링 강성이 한계 이상으로 설정되면 스프링이 시스템에 대한 부분 자유도 구속을 발생시키고 강체모드의 개수를 감소시킨다. 이는 시스템의 강성 전체 행렬(stiffness global matrix)에서 오차의 요인으로 작용한다. 이는

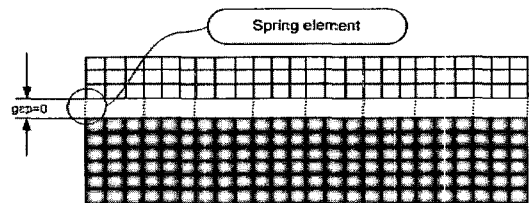


Fig. 11 Configure of spring element installation

스프링의 강성과 요소의 질량 비율이 한계 범위를 벗어나는 특이성(singularity)에 인한 것으로 이를 통해 설계 허용 영역의 상한 값을 설정 할 수 있다.

이상의 방법으로 이 모델에 제시된 스프링 개수의 허용 설계 영역은 1.0E+7~1.0E+18 N/m이며 이 구간 내에서 구한 시스템의 동적 특성은 실험 오차에 수렴한다. 스프링 강성 외에도 스프링의 위치와 스프링의 개수 또한 중요한 요소이다. 그러나, 스프링에 의한 접합면 모델링 방법을 일반적으로 사용하기 위해서는 설계 변수를 줄이는 것이 요구된다. 따라서, 이 연구에서는 스프링을 매트릭스 형태로 균일분포시키는 방안을 제시하여 스프링의 개수에 따라 스프링의 위치가 결정되도록 설정하였다.

(2) 실험 계획법(Design of Experiment)

실험계획법을 통하여 모델링 변수(modeling parameter)의 민감도를 해석하여, 튜닝(tuning) 과정에 필요한 변수의 경향성을 파악하였다. S/N비의 계산에서는 STB(smaller the better)를 사용하였다. 실험에 의한 값을 기준 값으로 설정하였으며, 이에 따라 식 (5)에 의해 S/N비를 구하였다.

$$S/N_{STB} = -10 \log \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (y_i - \bar{y})^2 \right) \quad (5)$$

Table 2 experiment by L16 orthogonal array

Level	A (4 Level)	B (4 Level)	C (4 Level)
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	3	3
4	1	4	4
5	2	1	2
6	2	2	1
7	2	3	4
8	2	4	3
9	3	1	3
10	3	2	4
11	3	3	1
12	3	4	2
13	4	1	4
14	4	2	3
15	4	3	2
16	4	4	1

여기서,

y_i : FEM results

\bar{y} : experimental result

N : the number of interesting mode

실험계획법에서 설정된 모델링 변수는 스프링의 강성을 1.0E+7~1.0E+18 N/m 범위에서 4수준으로, 스프링의 개수는 5×5의 분포에서 13×13 분포의 범위 내에서 4수준으로 설정하였고, 볼트의 배열은 Table 1과 같이 4수준으로 설정하였다. 실험의 수행을 위한 직교배열표(orthogonal array)는 Table 2에

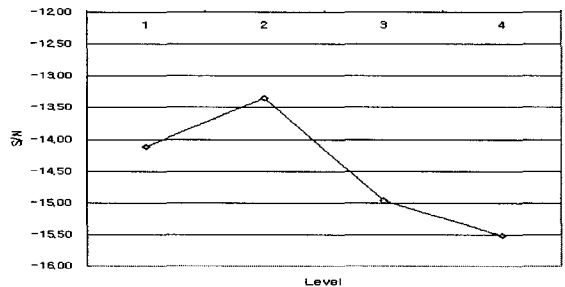


Fig. 12 S/N ratio vs. factor for the number of springs

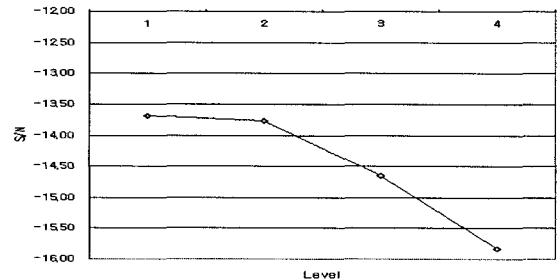


Fig. 13 S/N ratio vs. factor for spring constant

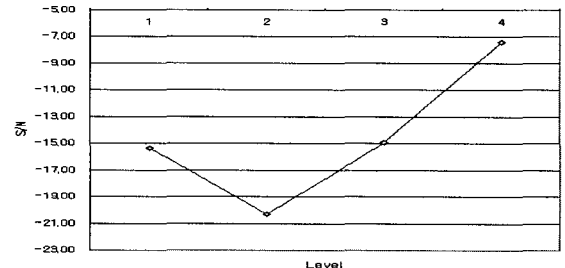


Fig. 14 S/N ratio vs. factor for the number of bolts

나타난 바와 같으며, 이에 대한 결과는 Fig.12~14에 나타내었다. 실험 계획법에 의해 얻어진 최적 설계 변수의 결과, 스프링 강성계수의 값은 $1.0E+10$ N/m, 스프링 개수는 11×11 를 갖는다. 그리고 볼트 개수가 8개인 경우 실험 값에 가장 근접한 결과를 얻을 수 있었다.

(3) 실험계획법 결과 분석

실험계획법에 의해 구해진 스프링 요소의 최적 설계 파라미터를 이용하여 FEM에 의해 구한 결과는 Table 3과 Fig. 15에서 나타난 것과 같다. Fig. 5와 Fig. 15를 비교하면 각각의 볼트 개수에 따른 FEM으로 해석된 모드 형상과 실험에 의해 곡면 접합된 모드 형상이 일치하는 것을 알 수 있다. 고차 모드에서 오차 값이 증가하는 것은 국부 모드(local mode)의 발생이 원인이 된다. Fig. 5의 8번째 모드 형상은 길이 방향으로 국부적인 3차 굽힘(bending)이 발생하는데, Table 3에서 4볼트 8번째 모드의 경우 오차가 12%로 증가하는 것을 관찰할 수 있다. 6볼트 B(short)의 경우는 3, 4번 모드의 오차가 다른 체결 조건에 비해 큼을 알 수 있다. 볼트 수의 증가는 전

체 시스템의 결합 강성을 증가시키며 이는 공진 주파수의 정량적 증가로 연결된다. 그러나 4볼트의 3, 4번째 공진 주파수에 비해서 6볼트 B의 경우 실험 측정 값이 오히려 50~100 Hz 정도 낮게 나온 것을 확인할 수 있으며 6볼트 B에서 과도한 오차의 발생은 실험상의 오류에서 기인한 것으로 판단된다.

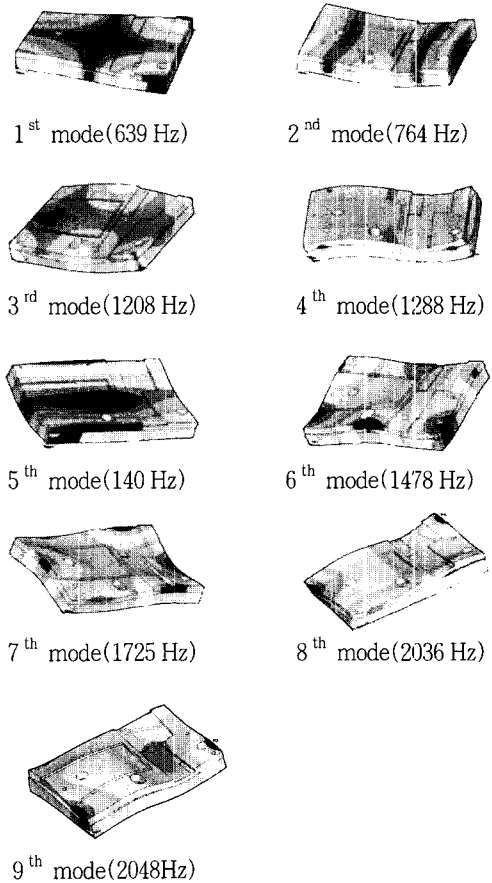


Fig. 15 Mode shapes by FEM

Table 3 Optimal results

Mode	4 bolt			6 bolt B(short)		
	Exp. (Hz)	FEM (Hz)	Error (%)	Exp. (Hz)	FEM (Hz)	Error (%)
1st	661	639	3.36	665	652	1.91
2nd	768	764	0.54	811	825	1.72
3rd	1153	1208	4.79	1041	1267	21.68
4th	1239	1288	3.99	1276	1410	10.49
5th	1325	1407	6.19	1361	1466	7.73
6th	1439	1487	3.33	1808	1831	1.27
7th	1678	1725	2.78	2077	1871	9.93
8th	1817	2036	12.04	-	-	-
9th	1944	2048	5.34	-	-	-

Mode	6 bolt A(long)			8 bolt		
	Exp. (Hz)	FEM (Hz)	Error (%)	Exp. (Hz)	FEM (Hz)	Error (%)
1st	704	696	1.17	726	733	0.99
2nd	778	768	1.29	840	826	1.62
3rd	1380	1395	1.06	1390	1399	0.65
4th	1410	1476	4.68	1440	1480	2.78
5th	1630	1706	4.64	1830	1817	0.72
6th	1800	1748	2.92	1850	1832	0.97
7th	2060	1807	12.29	2160	2158	0.09
8th	-	-	-	-	-	-
9th	-	-	-	-	-	-

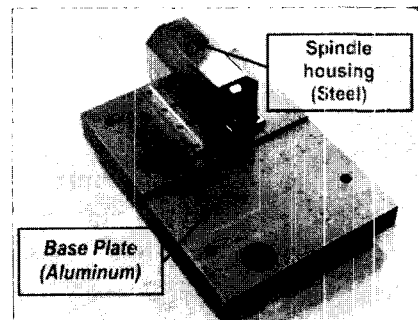


Fig. 16 Off-line servo track writer

4.3 볼트모델링 방법의 적용

이 연구에서 제시된 방법을 통하여 Fig. 16과 같은 초정밀 생산 장비(off-line servo track writer, STW)의 기본 판재(base plate)와 스핀들 하우징(spindle housing)의 볼트 결합된 시스템에 대하여 해석을 수행, 모델링 방법을 검증 하였다. 결합대상인 기본 판재는 알루미늄의 재질로 되어 있으며 스핀들 하우징은 철로 되어있다. 전계에 대한 실험 및 해석에 앞서 각각의 분계에 대한 튜닝을 실시하였다. 전계는 Fig. 18과 같이 측정점을 선택하여 실험을 하였으며, 임의로 스프링 상수 $1.0E+14$ N/m와 Fig. 18과 같이 균일 분포로 스프링 개수(6×5)를 선택하여 FEM을 통해 시스템의 동적 특성을 구하였다. 이에 대한 결과는 Table 4에 나타나 있다. 결과에서 모드

의 차수 증가는 스핀들 하우징의 국부적 모드가 증가로 연결 되며, 이는 기본 판재의 결과와 같이 실험과 FEM에 의한 해석 결과의 오차 증가 원인이 된다.

5. 결 론

유한요소법을 이용하여 볼트로 체결된 결합 전계의 동특성을 해석하기 위한 방법으로 콘프러스타 방법과 스프링 요소를 사용하였다. 콘프러스타 방법을 이용하여, 동적 해석에서의 이론적 자유도의 구속 영역을 설정하고 검증하였으며, 자유도 구속 이외의 부분에 대한 형상 변형 구속 및 인접한 분계 사이의 교호작용을 유도하기 위해 스프링 요소를 사용하는 방법을 개발하였다. 그리고 다른 모델에 이 방법을 적용하여 타당성을 검증 하였다. 이상의 방법은 선형 동적 해석에서 기타 다른 방법보다 모델링이 간단하며, 접합면의 요소망을 일치 시켜야 하는 기존 방법의 단점을 보완하고 있다.

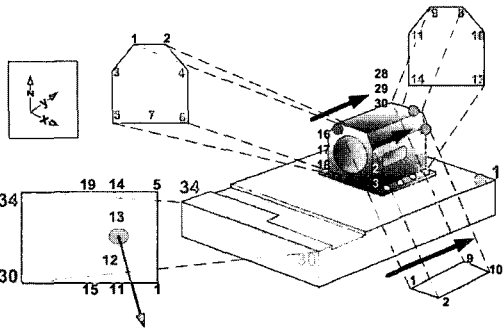
이 연구의 결과는 접촉면에 스프링 요소를 사용할 경우, 연구에서 제시된 스프링 허용 설계 범위 내의 스프링 상수를 선정하고 스프링 개수를 적절히 선정한다면 접촉면이 넓은 경우에도 실험 오차 이내의 해석결과를 얻을 수 있음을 보인다. 이러한 방법은 이종모드와 간섭 효과를 억제할 수 있으며 대부분의 상용 유한요소해석 프로그램에서 사용이 가능한 요소를 이용한다는 장점을 가지고 있다.

후 기

이 연구는 삼성전자 메카트로닉스센터의 지원을 받아 이루어졌습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Wang, J. H. and Yang, M. J., 1999, "Problems and Solutions in Identification of the Parameters of Mechanical Joints", 3rd International Conference on Inverse Problems in Engineering.
- (2) Wang, J. H. and Liou, C. M., 1990, "Experimental Substructure Synthesis with Special Consideration of Joint Effects", The International Journal of Analytical and Experimental Modal



Spindle-housing에 의해 측정 불가능 번호 : Impact points
○ : sensing points

Fig. 17 Sensing & impact point in experiment

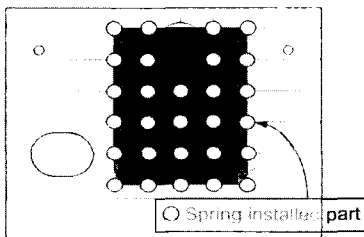


Fig. 18 Spring installed points in FEM analysis

Table 4 The result of dynamic characteristics in STW

Mode No.	1	2	3	4	5	6
Exp.(Hz)	1227	1265	1600	2052	2380	2696
FEM(Hz)	1266	1310	1724	2107	2537	2769
Error(%)	3.14	3.5	7.8	2.7	6.2	7.2

Analysis, pp. 13~24.

(3) 부분구조합성법편찬위원회, 1996, 부분구조합성법, 과학기술.

(4) Jung, J. H., Jee, T. H. and Park, Y. P., 1994, "Modal Analysis of Plate by Substructure Synthesis Method", Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 11. No. 6., pp. 65~74.

(5) 김진곤 등, 1996, "볼트결합부가 있는 구조물의 유한요소 모델링 및 실험적 검증", 대한기계학회 논문집(A), 제 20 권, 제 6 호, pp. 1854~1861.

(6) Ahmadian, H. and Ebrahimi, M., 2002, "Identification of Bolted - Joint Interface Models", ISMA 27, pp. 1741~1747.

(7) 김선민 등, 1999, "외경연삭 휠 주축의 진동 특성에 미치는 플랜지 결합부의 영향", 한국정밀공학회지, 제 16 권, 제 10 호, pp. 108~125.

(8) 권영두 등, 2002, "볼트결합부를 포함한 구조물의 정적 및 동적 해석을 위한 유한 요소 모델링", 대한기계학회논문집(A), 제 26 권, 제 4 호, pp. 667~676.

(9) Norton R., 1998, Machine Design, An Integrated Approach 2nd ed, Prentice-Hall, Inc., New York.

(10) Shigley J. E. and Mischke C. R., 1988, Mechanical Engineering Design, Mc Graw-Hill, Inc., New York.

(11) Wileman J., Choudhury M., and Green I., 1991, "Computation of Member Stiffness in Bolted Connections", Trans. ASME, J. Mech. Design, Vol. 113, pp. 432~437.

(12) Merovitch L., 1967, Analytical Methods in Vibration, The Macmillan Company, New York.