

마찰력을 고려한 로봇의 가속도 타원 해석

Acceleration Ellipsoid of Multiple Cooperating Robots with Friction Contact

이 지 홍*, 이 원 희
(Jihong Lee and Wonhee Lee)

Abstract : In this paper a mathematical framework for deriving acceleration bounds from given joint torque limits of multiple cooperating robots are described. Especially when the different frictional contacts for every contact are assumed and the torque limits are given in 2-norm sense, we show that the resultant geometrical configuration for the acceleration is composed of corresponding parts of ellipsoids. Since the frictional forces at the contacts are proportional to the normal squeezing forces, the key points of the work includes how to determine internal forces exerted by each robot in order not to cause slip at the contacts while the object is carried by external forces. A set of examples composed of two robot systems are shown with point-contact-with-friction model and insufficient or proper degree of freedom robots.

Keywords : ellipsoid, friction coefficient, multiple robots, contact conditions, dynamic constraints, dynamic manipulability

I. 서론

로봇의 조작도란 각 관절 수준에서 구속 조건이 주어졌을 때 로봇의 동작 능력을 평가하는 척도로[1, 2] 최근에 공유 작업 공간에서 여러 대의 로봇이 하나의 목표로 협동 작업을 하는 로봇 시스템에 관한 연구로 확장되어 왔다[1, 3]. 다중 협동 로봇 시스템에 대한 이러한 연구는 로봇의 기구학적인 분석(속도 관계 해석)[4, 5, 6, 7]과 동력학적인 분석(가속도 및 힘이 관련된 해석)[2, 8, 9]을 포함한다.

기구학적 분석의 큰 흐름은 주로 두 가지로 정리될 수 있는데 첫 번째는 관절에 대한 구속 조건이 2-norm으로 주어질 때 유도되는 manipulability ellipsoid[5, 10]에 대한 분석이고 두 번째로는 관절에 대한 구속 조건이 infinity-norm으로 주어질 때 유도되는 다각형분석[7, 11, 12]이다. 이러한 로봇 조작도에 관한 연구는 항상 현 로봇 자세에 그 결과들이 종속 된다. 로봇 조작도 분석은 로봇과 물체 사이의 접촉 조건(point-contact-with-friction model, soft-finger model, complete-constraint model)[7]에 따라서 달라진다. 특히 동역학이 고려된 상황에서는 조작도를 분석하는데 접촉 조건은 대단히 중요한 요소가 되어 로봇이 물체를 잡고 있을 때, 로봇의 팔 끝으로부터 물체까지 힘과 모멘트를 전달하는 형태를 결정한다. 마찰은 일반적인 로봇 동력학식이나 물체 동력학식에 포함시키는 것이 매우 어렵기 때문에 현재까지도 마찰이 고려된 로봇 조작도에 대한 분석은 찾기 어려운 실정이다. 그래서 본 논문에서는 마찰력이 고려된 상황에서 여러 로봇이 마찰력에 의해 물건을 지지하고 있는 상황에서 각 로봇의 관절 능력을 나르고 있는 물체의 운동 범위로 변환하는 방법을 제안하고 그 결과를 도식화 하여 보기로 한다.

좀 더 자세히 기술하면, 본 논문의 목적은 마찰이 있는 접촉이 로봇 손끝과 물체 사이에 존재할 때, 제한된 토크를 가

진 협동 로봇으로 물체를 움직이는 가속도 영역을 유도하는 것이다. 로봇이 외부로 가하는 힘은 물체의 운동으로 전달되는 힘(본 논문에서는 '외부 힘'이라 부른다.)과 물체의 운동으로 나타나지 않고 여러 로봇이 물체를 지지하는 과정에서 서로 상쇄되어 로봇의 운동으로 변환되지 않는 힘(본 논문에서는 '내부 힘'이라 부른다.)의 합으로 이루어진다. 이 내부 힘은 접촉면에서 필요한 마찰력을 생성하게 되는데 외부 힘과 내부 힘의 조합은 매우 다양하며 그 조합 방법에 따라 로봇이 잡고 있는 물체의 가속도 영역이 달라지기 때문에 물체의 가속도 영역을 해석하려면 로봇의 힘 분배 방법을 결정해야 한다. 그래서 본 논문에서는 세 가지의 방법으로 내부 힘과 외부 힘의 서로 다른 조합을 결정하여 물체의 가속도 영역을 구하였다. 그리고 내부 힘을 구하기 위하여 물체와 로봇이 만나는 곳에 마찰차원[3]을 도입하여 로봇과 물체 사이에 미끄러짐이 발생하는 영역과 미끄러짐이 발생하지 않는 영역을 나누어 힘 분배 법칙을 적용하였고, 미끄러짐이 발생하지 않는 영역에서는 로봇이 따로 물체에 쥐는 힘을 주지 않아도 되지만 미끄러짐이 발생하는 영역의 경우, 로봇의 내부 힘을 이용해 미끄러짐을 방지하는 수식을 유도하여 마찰력이 고려된 동력학식을 만들었다.

본 논문에서는 2차원 해석만을 다루었지만 3차원 상에서 로봇이 물체를 잡고 있을 때에도 각 로봇과 물체 사이에는 마찰차원이 존재하기 때문에 마찰차원을 이용해 로봇의 미끄러짐을 방지하는 본 논문의 내용을 적용할 수 있다. 3차원에 적용할 경우 로봇의 힘이 공간상에 존재하므로 마찰차원을 적용할 때 접촉면에 대하여 고려해야 한다.

본 논문의 전개는 다음과 같다. II 장에서는 마찰차원서 소개하고 로봇과 물체 사이의 마찰 조건으로부터 마찰차원하는 방법을 기술하였다. 그리고 물체가 로봇 손끝에서 미끄러지지 않고 이동하기 위하여 필요한 힘을 friction cone을 사용하여 결정하는 방법을 다루고 마지막으로 로봇의 외부 힘과 마찰차원 구분되는 물체의 가속도 영역에 대해 기술하였다. III 장에서는 여러 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있을 때 동력학식을 유도하여 토크와 물체의 가속도 사이의 관계식

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 5. 31., 채택확정 : 2004. 8. 31.

이지홍, 이원희: 충남대학교 메카트로닉스공학과

(jihong@cnu.ac.kr/s_wonhee@cnu.ac.kr)

※ 본 논문은 한국과학재단 지역대학우수과학자지원사업(과제 : R05-2003-000-10215-0)의 지원하에 이루어졌음.

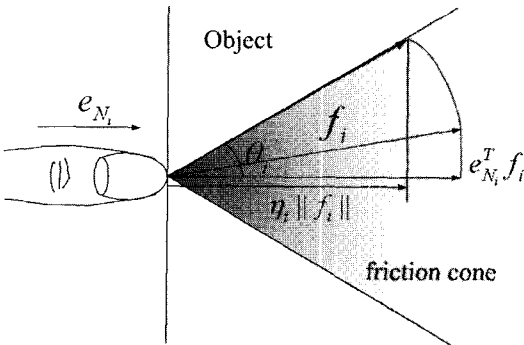


그림 1. 외부 힘과 friction cone의 관계.
Fig. 1. Static frictional constraints.

을 구하였다. IV장에서는 로봇의 외부 힘과 내부 힘을 분배하는 방법에 대해 기술하고 로봇의 내부 힘과 외부 힘을 특정 로봇의 외부 힘으로 표시하는 방법을 서술하였다. V장에서는 토크에 구속조건을 주었을 때 물체 가속도가 가지는 모양이 타원이 됨을 보였다. VI장은 본 논문에서 다른 방법에 대한 시뮬레이션 결과를 담았으며 VII장에서 본 논문의 연구결과와 앞으로의 연구 방향을 정리하였고 VIII장에서는 부족자유도 시스템에 대한 동력학식과 VI장의 시뮬레이션을 하는데 필요한 벡터와 행렬을 부록으로 첨부하였다.

II. Friction Cone을 이용한 내부 힘 계산

1. Friction Cone

로봇과 물체 사이에 마찰력이 존재하고 i 번째 로봇과 물체가 점 접촉을 하고 있을 때 그림 1의 어두운 영역(일반적으로 friction cone이라 불린다[3])에서는 미끄러짐이 발생하지 않는다.

그림 1에서 로봇이 물체와의 접촉면에 가하는 수직 방향의 힘의 절대 값에 마찰계수를 곱한 값이 마찰력보다 크면 미끄러짐이 발생한다. 그래서 미끄러짐이 없이 로봇이 물체를 잡고 있으려면 물체의 표면에 접하는 방향의 힘이 마찰력보다 크지 않아야 한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mu_i \|f_{iN}\| \geq \|f_{iT}\| \tag{1}$$

위 식에서 f_{iN} 는 f_i 의 접촉면에 수직 방향 성분, f_{iT} 는 f_i 의 접촉면에 수평 방향 성분, μ_i 는 물체와 i 번째 로봇 사이에 최대 정지 마찰 계수이다. (1)로부터 힘이 friction cone 안에 있을 조건을 구하면 다음과 같다.

$$\cos \theta_i \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu_i^2}} \tag{2}$$

그러므로 마찰 계수 μ_i 를 알면 friction cone의 각 θ_i 를 알 수 있다.

2. 내부 힘

m 대의 로봇이 힘($F = [F_1^T \ F_2^T \ \dots \ F_m^T]^T \in R^{md}$)을 가해서 접촉한 물체의 힘(Q)에 영향을 줄 때 그 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

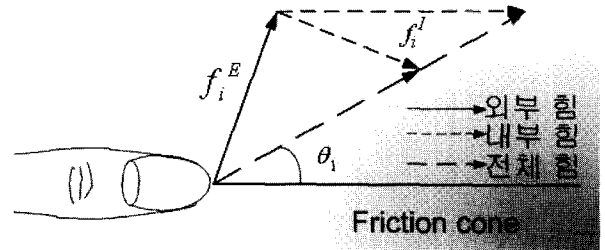


그림 2. 내부 힘과 외부 힘의 다양한 조합.
Fig. 2. Associations of internal force and external force.

$$Q = WF \tag{3}$$

$Q = [f_o \ n_o]^T \in R^d$ 는 물체 중심에 가해지는 힘($f_o \in R^s$)과 모멘트($n_o \in R^p$)이다. $W \in R^{d \times md}$ 는 $[W_1 \ \dots \ W_m]$ 로 구성되어 로봇이 물체에 힘을 가하는 관계를 나타낸다. Point contact 이므로 각 W_i 는 $\begin{bmatrix} E_s & 0_p \\ P_i & 0_p \end{bmatrix}$ 이다. 단, 3차원의 경우는 $d = 6, s = p = 3$ 이고, 2차원 평면상에서의 경우는 $d = 3, s = 2, p = 1$ 이다. 위 식을 로봇의 힘을 물체의 힘으로 표시하도록 재배열하면 다음과 같이 된다[13].

$$F = W^*Q + (E - W^*W)V \tag{4}$$

위 식에서 W^*Q 는 로봇이 물체가 움직이는데 기여하는 힘(본 논문에서는 ‘외부 힘’이라 부름)을 나타내고 $(E - W^*W)V$ 는 물체의 동작에는 영향을 주지 못하고 로봇이 물체를 쥐고 미끄러짐을 방지하는 힘(본 논문에서는 ‘내부 힘’이라 부름)을 나타낸다. (4)에서 E 는 $md \times md$ 단위행렬이다.

(4)와 같이 i 번째 로봇의 힘($f_i \in R^s$)은 외부 힘($f_i^E \in R^s$)과 내부 힘($f_i^I \in R^s$)의 합으로 이루어진다.

$$f_i = f_i^E + f_i^I \tag{5}$$

그림 1에서 i 번째 로봇이 물체에 가하는 힘 f_i 이 friction cone 안에 있을 때 로봇과 물체는 미끄러지지 않는다. 외부 힘이 friction cone의 안에 있을 때에는 내부 힘이 없어도 friction cone 안에 있으므로 로봇 i 는 물체와 미끄러지지 않는다 ($f_i = f_i^E$). 그런데 외부 힘이 friction cone의 바깥에 있을 때에는 내부 힘이 없으면 미끄러지므로 로봇 i 의 힘을 friction cone의 경계 안으로 유도하는 역할을 하는 내부 힘이 필요하다.

내부 힘은 물체의 운동에 영향을 주지 않으므로 (3)과 (4)로부터 다음의 조건을 만족한다.

$$WF^I = 0 \tag{6}$$

위 식에서 F^I 는 $[(f_1^I)^T \ (f_2^I)^T \ \dots \ (f_m^I)^T]^T$ 으로 (4)의

$(E-W^TW)V$ 에 해당한다.

그림 2를 보면 외부 힘과 내부 힘(접선으로 이루어진 벡터)의 합으로 로봇 i 의 힘이 friction cone에 접하는 경우가 다양하다는 것을 알 수 있다.

물체의 가속도 영역이 최대가 될 때는 물체의 운동으로 전달되는 외부 힘이 최대가 될 때이다. 그런데 내부 힘을 최소로 할 때에 외부 힘을 최대한 발휘할 수 있다. 그래서 본 논문에서는 그림 2와 같이 내부 힘을 최소화 하기 위하여 friction cone의 안쪽에 힘을 놓지 않고 경계에 힘을 놓고 내부 힘을 계산하였다.

3. 물체의 가속도 영역 구분

i 번째 로봇의 힘이 friction cone 안에 있을 조건(C_i)과 로봇이 미는 방향으로 힘을 줄 수 있는 조건(P_i)을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$C_i = \{f \mid \mu_i |f_{in}| \geq |f_{ir}|\}, P_i = \{f \mid f_{in} > 0\} \quad (7)$$

그래서 i 번째 로봇의 힘이 friction cone 안에 없을 때에는 \bar{C}_i , 로봇이 미는 방향으로 힘을 주지 못할 때에는 \bar{P}_i 로 나타낼 수 있다.

로봇의 외부 힘과 물체 가속도 사이에는 선형 관계를 가진다(IV. 4참조). 그리고 friction cone의 영역 구분은 로봇의 외부 힘의 위치가 어디에 있는가를 다룬 것이다. 그러므로 물체의 가속도 또한 friction cone의 영역 구분을 따르게 된다. 그러므로 조건 (7)에 따라서 물체의 가속도 영역의 구분이 가능하다. 다음은 두 조건에 대한 사용 예이다.

그림 3(a)와 같이 작업공간에서 두 대의 로봇이 하나의 물체를 협력해서 잡고 있는 시스템에서 각 로봇의 팔과 물체

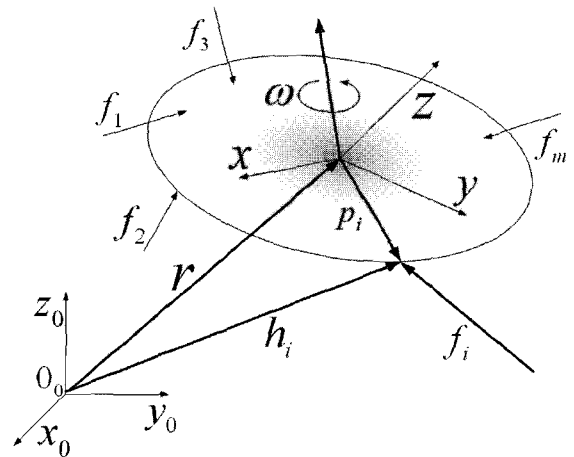


그림 4. 다중 협동 로봇 시스템.
Fig. 4. Multiple-arm cooperating robot system.

사이에는 마찰이 있다고 할 때, 각 로봇의 friction cone은 그림 3(a)와 같이 접촉면에 형성된다. 두 friction cone을 물체의 무게 중심으로 이동하면 그림 3(b)의 어둡게 표시한 영역이 생성된다. 그리고 로봇 별로 밀 수 있는 영역이 다르므로 그 부분을 추가하면 3(c)가 된다. 즉, 영역 3과 4를 구분 짓는 직선은 그림 3(a)의 오른쪽 로봇의 접촉 점의 접선이고 영역 4와 5를 구분 짓는 직선은 그림 3(a)의 왼쪽 로봇의 접촉 점의 접선이므로 3(b)의 로봇 1에 의한 friction cone이 3(c)에서 영역 2로 표시되고 로봇 2에 의한 friction cone이 3(c)에서 영역 6으로 표시된다.

그림 3(c)의 '영역 1'을 살펴보면 로봇 1이 밀 수 있고(P_1) 로봇 2는 밀 수 없고(\bar{P}_2) 두 friction cone 밖에 있는 위치($\bar{C}_1\bar{C}_2$)하므로 조건 (7)로 표현하면 $\bar{C}_1P_1\bar{C}_2\bar{P}_2$ 이 되며 로봇 1이 힘을 내서 로봇 1의 friction cone의 경계로 로봇 1의 힘을 가져가야 한다.

반면, 영역 5는 로봇 1은 밀 수 없고(\bar{P}_1) 로봇 2가 밀 수 있으면서(P_2) 두 friction cone밖에 위치($\bar{C}_1\bar{C}_2$)하므로 조건 (7)로 표현하면 $\bar{C}_1\bar{P}_1\bar{C}_2P_2$ 이 되며 로봇 2가 힘을 내서 로봇 2의 friction cone의 경계로 로봇 2의 힘을 가져가야 한다.

이와 같이 그림 3(c)의 모든 영역을 조건 (7)에 맞추어 구분하면 다음과 같이 나타나서 영역 1과 3, 5와 7은 각각 같은 영역으로 구분된다.

- 영역1 = $\bar{C}_1P_1\bar{C}_2\bar{P}_2$, 영역2 = $C_1P_1\bar{C}_2\bar{P}_2$
- 영역3 = $\bar{C}_1P_1\bar{C}_2P_2$, 영역4 = $\bar{C}_1P_1C_2P_2$
- 영역5 = $\bar{C}_1\bar{P}_1\bar{C}_2P_2$, 영역6 = $\bar{C}_1\bar{P}_1C_2P_2$
- 영역7 = $\bar{C}_1P_1C_2P_2$, 영역8 = $\bar{C}_1\bar{P}_1\bar{C}_2\bar{P}_2$

III. 협동 로봇 시스템의 동력학식

1. 물체 동력학식

m 대의 로봇이 한 물체를 그림 4와 같이 함께 잡고 있을 때, 물체의 운동은 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u}^T & \dot{\omega}^T \end{bmatrix}^T \in R^d \quad (8)$$

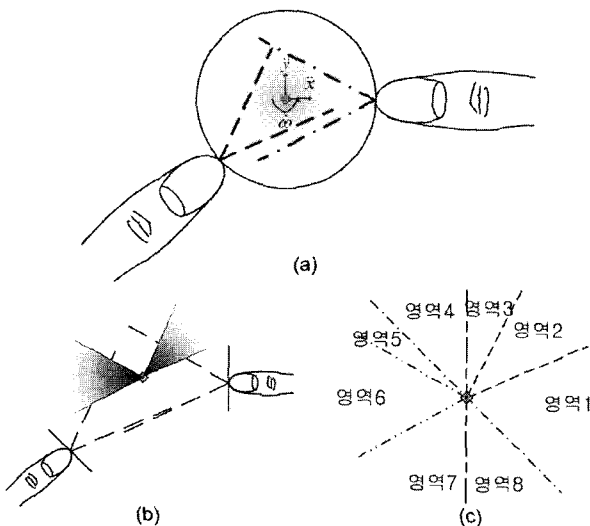


그림 3. 작업공간의 구분 (a) 물체를 잡고 있는 자세 (b) 물체 질량 중심으로 이동한 friction cone (c) friction cone과 미는 영역으로 구분된 작업공간.

Fig. 3. Divided workspace (a) contact configuration (b) friction cone depicted in mass center (c) workspace divided by friction cones.

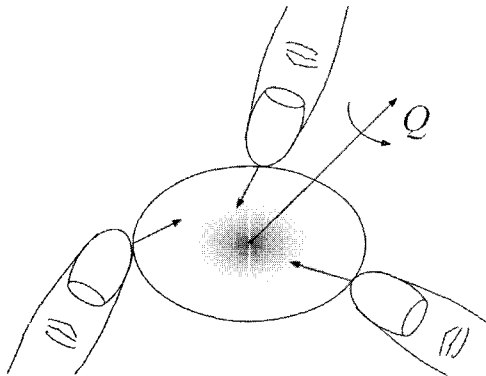


그림 5. 물체에 미는 힘만 전달할 수 있는 접촉모델.
Fig. 5. Point-contact-with-friction model.

\ddot{u} 은 물체의 가속도, $\dot{r} \in R^s$ 은 물체의 선형 가속도, $\dot{\omega} \in R^p$ 은 물체의 각속도를 나타낸다. (일반적으로 3차원의 경우 : $d=6, s=p=3$, 2차원의 경우 : $d=3, s=2, p=1, d=s+p$). 마찰을 가진 점접촉모델을 가정하여 로봇 팔과 물체의 접촉에서 이루어지는 상호작용을 표현한다. 즉 그림 5와 같이 접촉점에는 밀거나 당기는 힘만 작용하고 회전력은 작용하지 않는다.

각 로봇에서 물체에 대해 밀거나 당기는 힘($f_i \in R^s$)과 모멘트($n_i \in R^p$)가 작용할 때, 물체에 전달되는 힘($f_0 \in R^s$)과 모멘트($n_0 \in R^p$)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$f_0 = \sum_{i=1}^m f_i + m_0 g, \quad n_0 = \sum_{i=1}^m p_i \times f_i \quad (9)$$

위 식에서 $m_0 \in R^{s \times s}$ 는 물체의 질량, $g \in R^s$ 는 중력 가속도, $p_i \in R^s$ 는 물체의 무게중심에서 시작해서 i 번째 로봇의 접촉점에 이르는 벡터이다.

그리고 이 물체의 움직임을 나타내는 물체 동력학식은

$$I_0 \ddot{u} + Q_0 = Q \quad (10)$$

단, $I_0 \in R^{d \times d}$ 는 물체의 질량텐서, $Q_0 \in R^d$ 는 중력과 코리올리스 힘을 포함한 항으로 $Q = [f_0 \quad n_0]^T \in R^d$ 는 물체 중심에서 발생하는 최종 힘과 모멘트를 나타낸다. (10)에서 나온 물체의 관성항 I_0 와 Q_0 는 다음과 같이 정의된다.

$$I_0 = \begin{bmatrix} m_0 E_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} -m_0 g^T \\ \omega \times (I \omega) \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

위 식에서 I 는 물체의 관성 모멘텀, E_s 는 $s \times s$ 정방행렬을 나타낸다. Q_0 안의 ω 는 물체 중심의 회전속도를 의미한다.

2. 로봇 동력학식

각 로봇의 동력학식은 다음과 같다.

$$\tau_i = M_i \ddot{q}_i + J_i^T F_i + V_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (12)$$

단, M_i 은 inertia 항, $J_i \in R^{d \times N_i}$ (N_i 는 로봇 i 의 관절 수)

는 자코비안 행렬, $F_i = [f_i^T \quad n_i^T]^T$ 는 로봇 i 의 팔에서 발생한 힘, V_i 는 코리올리스힘, 원심력, 중력항이다.

3. 로봇과 물체 사이의 가속도 관계

그림 4에서 $r \in R^s$ 은 절대좌표계의 중심에서 물체의 무게 중심까지의 벡터, $h_i \in R^s$ 는 절대좌표계의 중심에서 로봇 i 의 팔 끝까지의 벡터, $p_i \in R^s$ 는 물체좌표계의 중심에서 로봇 팔 끝까지의 위치 벡터이다. 그러므로 세 벡터는 $r + p_i = h_i$ 의 관계를 갖는다. 로봇과 물체의 접촉을 point-contact-with-friction model[7]로 설정하고 물체가 움직이지 않음($\omega=0$)을 가정하여 두 벡터의 미분과 2중 미분을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{h}_i = \omega \times p_i + \dot{r} = \dot{r} \quad (13)$$

$$\ddot{h}_i = \dot{\omega} \times p_i + \ddot{r} \quad (14)$$

P_i 가 3차원의 경우에는 $[p_{ix} \quad p_{iy} \quad p_{iz}]^T$ 가 된다. (14)를 행렬로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\ddot{h}_i = [E_3 \quad -P_i] \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = [E_3 \quad -P_i] \ddot{u} = B_i \ddot{u} \quad (15)$$

위 (15)는 (13), (14)의 외적(cross-product)를 행렬 연산을 위하여 P_i 의 정보를 다음과 같이 행렬 형태로 변경하여 넣은 것이다.

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & -p_{iz} & p_{iy} \\ p_{iz} & 0 & -p_{ix} \\ -p_{iy} & p_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

로봇 i 의 관절각으로 이루어진 벡터를 q 라 할 때, q 를 시간에 대해 미분하여 자코비안 행렬을 곱하면 절대좌표계의 중심에서 로봇 i 의 팔 끝의 선형 속도 항과 로봇 팔 끝의 각속도(ρ_i)로 이루어진 벡터 $\dot{x} = [\dot{h}_i \quad \rho_i]^T$ 가 된다.

$$\dot{x} = J_i \dot{q}_i \quad (17)$$

위 식의 양변을 시간에 따라 미분하면 $\ddot{x} = \dot{J}_i \dot{q}_i + J_i \ddot{q}_i$ 이 되는데 여기서 로봇이 정지해 있음을 가정하면 $\dot{q}_i = 0$ 이 되므로 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{x} = J_i \ddot{q}_i \quad (18)$$

모든 로봇이 적합자유도를 가질때 자코비안 행렬 J_i 는 역행렬이 존재하므로 양변에 역행렬을 곱하고 (15)를 적용하여 정리하면 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{q}_i = J_i^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{h}_i \\ \ddot{\rho}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_i^{-1})_{d \times s} & (J_i^{-1})_{d \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \ddot{u} \\ \ddot{\rho}_i \end{bmatrix} = [D_{i,1} B_i \quad D_{i,2}] \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\rho}_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

4. 로봇과 물체 사이의 힘 관계

본 논문에서는 여러 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있을 때 모든 내부 힘과 외부 힘은 특정 로봇의 외부 힘으로 나타

내는 수식을 유도한다. 유도는 다음 장에서 할 예정이다. 유도된 결과를 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$f_i^I = A_{ij} f_q^E, f_i^E = H_{ij} f_q^E \quad (20)$$

단, j 는 가속도 영역을 구분하는 지수(그림 3(C)의 영역 구분 번호와 같다.), f_q^E 는 특정 로봇의 외부 힘, $A_{ij} \in R^{s \times s}$ 는 j 번째 영역에서 $f_q^E \in R^{s \times s}$ 를 로봇 i 의 내부 힘으로 변경하는 행렬, H_{ij} 는 j 번째 영역에서 f_q^E 를 로봇 i 의 외부 힘으로 변경하는 행렬이다. (20)의 내부 힘과 외부 힘의 합을 구하면 다음과 같다.

$$f_i = [H_{ij} + A_{ij}] f_q^E \equiv K_{ij} f_q^E \quad (21)$$

point-contact-with-friction model에서 각 로봇과 물체 사이의 미는 힘과 회전력의 관계는 다음과 같다.

$$Q = WF = [W_1 \dots W_m] \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ P_i^T & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

위 식에서 보이는 바와 같이 point-contact-with-friction model에서는 로봇의 회전력이 물체의 동작에 영향을 주지 못한다. 따라서 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$Q = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} E_s \\ P_i^T \end{bmatrix} f_i = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} E_s \\ P_i^T \end{bmatrix} K_{ij} f_q^E \equiv \sum_{i=1}^m W_{ij} f_q^E \quad (23)$$

행렬 식 : $Q = [W_{1j} \ W_{2j} \ \dots \ W_{mj}] f_q^E \equiv Z_j f_q^E$

(22)에서 point-contact-with-friction model은 로봇이 물체에 회전력을 전달할 수 없으므로 linear force만 물체에 전달한다. 그리고 (21)에서 모든 로봇의 linear force는 특정로봇의 linear force로 표시가 되므로 본 로봇 시스템의 자유도는 linear force의 크기와 같아지므로 s 이다. (23)에서 Z_j 는 $d \times s$ 행렬이므로 정방행렬이 아니므로 자유도에 맞추어 독립인 성분을 양변에서 선택하는 행렬 $H \in R^{d \times s}$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$HQ = (HZ_j) f_q^E \quad (24)$$

(10)에서 양변에 행렬 H 를 곱하면 다음과 같이 정리된다.

$$H(I_0 \ddot{u} + Q_0) = HQ \quad (25)$$

(24)와 (25)로부터 $f_q^E \in R^s$ 는 \ddot{u} 으로 표현된다.

$$f_q^E = [HZ_j]^{-1} H(I_0 \ddot{u} + Q_0) \quad (26)$$

위 수식에 있는 중력과 코리올리시힘을 무시한다고 가정하면 수식은 더 간단히 정리된다.

$$f_q^E = [HZ_j]^{-1} H I_0 \ddot{u} \quad (27)$$

5. 물체와 로봇의 동력학식 연결

(12)의 $J_i^T F_i$ 항은 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있

다.

$$J_i^T F_i \equiv S_i \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} = [S_{i,1} \ S_{i,2}] \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} = [S_{i,1} K_i \ S_{i,2}] \begin{bmatrix} f_q^E \\ n_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

point-contact-with-friction model에서 각 로봇이 물체에 회전력을 전달할 수 없으므로 위 식에서 n_i 는 0이 된다. 그러므로 (28)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J_i^T F_i = (S_{i,1} K_i) f_q^E \quad (29)$$

(19), (27), (29)를 (12)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\tau_i = [M_i D_{i,1} B_i + S_{i,1} K_i (HZ_j)^{-1} H I_0 \ D_{i,2}] \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

전체 동력학식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 D_{1,1} B_1 + S_{1,1} K_1 (HZ_j)^{-1} H I_0 & D_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ M_m D_{m,1} B_m + S_{m,1} K_m (HZ_j)^{-1} H I_0 & D_{m,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{\rho}_1 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_m \end{bmatrix} \quad (31)$$

위 식에서 보면 물체 중심의 가속도 \ddot{u} 외에 로봇 팔 끝의 각가속도 $\dot{\rho}_i$ 도 함께 나온다. 본 논문에서는 물체 중심의 가속도만 구하여 해석하고 각가속도는 해석하지 않았다.

지금까지 적합 자유도 시스템에 대하여 동력학식을 유도하였다. 본 논문에서는 적합 자유도 외에 부족자유도도 함께 다루었는데 부족 자유도에 대한 동력학식은 부록으로 첨부하였다.

IV. 로봇의 힘 표현

본 장에서는 내부 힘이 필요하지 않은 경우, 물체를 움직이는 동작이 한대의 로봇에 의한 경우 또는 여러 대의 로봇의 경우에 따라서 작업공간을 나누는 방법에 대하여 다루었다. 그리고 III장의 (20) 즉, 모든 내부 힘과 외부 힘은 특정 로봇의 외부 힘으로 나타내는 수식을 유도하였다. 각 로봇의 힘은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^E \\ \vdots \\ f_i^E \\ \vdots \\ f_m^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^I \\ \vdots \\ f_i^I \\ \vdots \\ f_m^I \end{bmatrix} = F^E + F^I \quad (32)$$

그 문제를 단순화 하면 Q 가 주어졌을 때, 각 로봇의 전체 힘 $f_i = f_i^E + f_i^I$ 이 관계된 로봇의 friction cone의 내부에 있도록 하고 $Q = WF^E$ 와 $WF^I = 0$ 을 만족하는 각 로봇의 f_i^E 와 f_i^I 를 찾는 것이다.

1.1 Class A: 내부 힘이 필요 없는 영역

로봇 i 가 물체의 움직임에 f_i^E 만큼 힘을 가하고 그 힘의 방향이 friction cone 안쪽에 있을 때 내부 힘이 없어도 미끄러지지

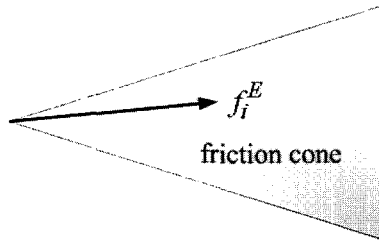


그림 6. class A의 힘 관계.
Fig. 6. Force relationship of class A.

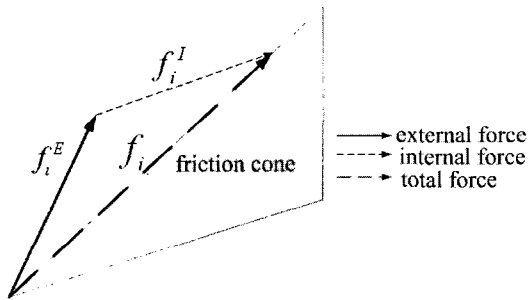


그림 7. class B의 힘 관계.
Fig. 7. Force relationship of class B.

않는다. 로봇이 가하는 힘을 수식으로 정리하면 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_i^E \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

1.2 Class B. 한 대의 로봇이 물체 운동에 기여하는 영역

그림 7와 같이 물체를 밀 수 있는 i 번째 로봇이 물체에 가하는 외부 힘을 가하고 그 힘의 방향이 friction cone 영역을 벗어날 때 i 번째 로봇은 미끄러짐을 방지하기 위하여 외부 힘 외에 내부 힘을 만들어야 한다. 내부 힘은 i 번째 로봇의 힘을 friction cone의 안쪽으로 이르게 하는 역할을 한다.

그리고 i 번째 로봇 외에 함께 물체를 잡고 있는 로봇들도 물체에 미치는 방향으로 힘을 가해야 한다. 이때 가하는 힘들은 i 번째 로봇의 내부 힘을 상쇄시키기 위한 힘이므로 식 (6)을 만족해야 한다. Class B가 갖는 힘을 수식으로 정리하면 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^I \\ \vdots \\ f_i^E + f_i^I \\ \vdots \\ f_m^I \end{bmatrix} \quad (34)$$

1.3 Class C. 여러 대의 로봇이 물체 운동에 기여하는 영역

Class C영역은 Class B처럼 특정한 로봇에 의해서만 물체에 가하는 것이 아니라 여러 대의 로봇이 함께 물체에 외부 힘을

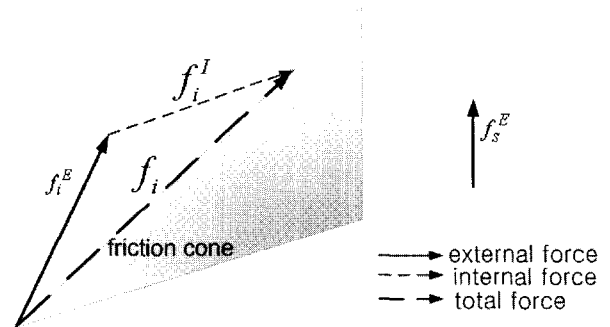


그림 8. class C의 힘 관계.
Fig. 8. Force relationship of class C.

가한다. Class B와 마찬가지로 friction cone 밖에 외부 힘이 존재하기 위해서 내부 힘이 필요하다. 각 로봇의 내부 힘은 (6)을 만족하면서 각 로봇의 힘이 각 friction cone의 안쪽에 위치하도록 한다. 로봇 S 가 물체를 미는 방향과 물체가 움직이는 방향이 서로 마주하고 있으면 그 로봇 S 는 물체를 직접 밀어서 직접 물체의 운동에 기여하지는 못한다. 그 로봇은 다른 로봇이 물체를 직접 밀며 필요에 의해 내부 힘을 낼 때 그 내부 힘을 상쇄시키기 위한 내부 힘 f_s^I 을 생성하고 그 생성된 내부 힘에 대하여 표면 마찰에 의하여 로봇 S 와 물체 사이에 만들어지는 friction cone에 접하는 크기만큼의 외부 힘 f_s^E 를 생성할 수 있다. 이를 수식으로 정리하면 다음과 같다.

$$f_s^E = \mu_s e_{TS} g_{NS} f_s^I \quad (35)$$

단, μ_s 는 로봇 S ($S \neq i$)의 마찰계수, g_{NS} 는 로봇 S 의 내부 힘을 곱했을 때 로봇 S 와 물체의 접촉면에서 수직인 벡터방향의 크기를 출력하는 행렬, e_{TS} 는 로봇 S 와 물체 사이의 접선 벡터이다.

2. 외부 힘과 내부 힘 변환

(6)을 전개하면 물체의 resultant force에 영향을 주는 부분에서 내부 힘들은 서로 $f_1' + f_2' + \dots + f_m' = 0$ 의 관계를 가진다. 이 식에서 i 번째 로봇의 내부 힘 f_i' 의 크기와 방향을 각각 $|f_i'|$, e_i' 라 하면 $|f_1'|e_1' + |f_2'|e_2' + \dots + |f_m'|e_m' = 0$ 이 된다. 여러 대의 로봇이 물체를 잡고 있을 때 내부 힘의 방향 e_i' 는 로봇의 개수가 같을 때에도 그림 2와 같이 하나로 정해지지 않고 여러 가지를 가질 수 있고 함께 물체를 잡고 있는 로봇의 개수가 달라질 때에도 내부 힘 벡터의 수가 늘어나므로 또 내부 힘의 방향은 달라질 수 있다. 그래서 내부 힘의 방향은 로봇의 대수에 따라, 로봇이 물체를 잡고 있는 위치에 따라, 어떤 로봇이 물체를 밀고 있는 상황인지에 따라 결정해야 한다. 본 논문에서는 그림 9와 같이 로봇이 두 대가 한 물체를 잡고 있을 때 내부 힘의 방향 결정하여 내부 힘과 외부 힘을 구하고 모든 로봇의 힘이 특정 로봇의 외부 힘으로 나타내도록 수식을 유도하였다.

그림 9와 같이 로봇이 두 대가 한 물체를 잡고 있을 때 내

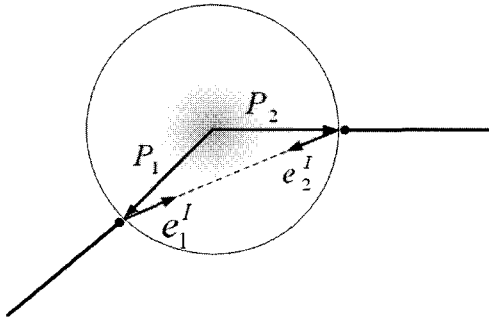


그림 9. 내부 힘의 방향.
Fig. 9. Direction of internal force.

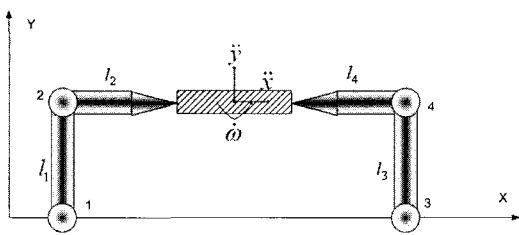


그림 10. 첫 번째 로봇 시스템의 구성.
Fig. 10. Robot configuration of case I.

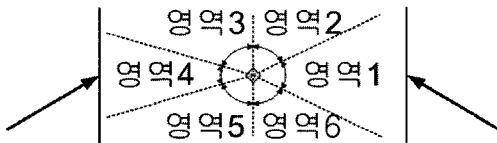


그림 11. 가속도 영역 구분.
Fig. 11. Acceleration area division.

부 힘의 방향을 물체와 로봇 사이의 위치 관계로 정의하였다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$e_1^I = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}, \quad e_2^I = -e_1^I \quad (36)$$

위의 힘 분배 방법에서 보면, friction cone의 각도는 식 (2)에 의해 알 수 있고 내부 힘의 방향은 식 (36)에서 알 수 있으므로 외부 힘이 주어지면 모든 내부 힘을 구할 수 있다. 이를 행렬로 정의하면 다음과 같다.

$$f_1^I = A_{1j} f_1^E, \quad A_{ij} = E_i^I a_j \quad (37)$$

$$f_2^I = -A_{1j} f_1^E \quad (38)$$

로봇 2의 외부 힘은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_2^E = -\mu_2 (e_{T2}) g_{N2} A_{1j} f_1^E \quad (39)$$

단, $g_{N2} = [1 \ 0]$. 이 식에서 외부 힘과 내부 힘은 특정로봇 (로봇 1)의 외부 힘으로 표시되고 있다.

(36)에서 내부 힘의 방향을 단순히 위치의 차로 구했는데 로봇의 내부 힘과 외부 힘을 모두 가지고 있는 Class B, Class C의 경우 내부 힘과 외부 힘의 합이 각 로봇의 friction cone

의 안에 포함되어 있어야 한다. 그러므로 각 로봇에게 그림 8과 같은 역할을 할 수 있도록 내부 힘의 방향을 결정해 주어야 한다. (36)에서는 각 로봇의 마찰계수가 충분히 크다는 가정하에 진행한 것으로 충분히 크다는 것은 각 로봇의 외부 힘과 내부 힘의 합이 friction cone 안으로 들어갈 수 있다는 것이다.

V. 기하학적 타원 방정식

$y \in R^m, A \in R^{m \times n}, x \in R^n$ 가 다음과 같이 곱을 이루고 있다.

$$y = Ax \quad (40)$$

이 때 rank $A = k$ 이면 A 는 특이치 분해(singular value decomposition)[14]에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$A = U \Sigma V^T \quad (41)$$

$$U = (u_1 \dots u_m) \in R^{m \times m}$$

$$\text{with } \Sigma \cong \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in R^{m \times n}$$

$$V = (v_1 \dots v_m) \in R^{n \times n}$$

단, $p = \min\{m, n\}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0, \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$. (41)에서 $x^* \equiv V^T x$ 와 $y^* \equiv U^T y$ 로 대체하면 다음과 같이 표현된다[15].

$$y^* = \Sigma x^* \quad (42)$$

y^* 가 $\|y^*\| \leq 1$ 로 제한될 때, (42)으로부터, x^* 은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{x_1^{*2}}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2} + \frac{x_2^{*2}}{\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2} + \dots + \frac{x_k^{*2}}{\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)^2} \leq 1 \quad (43)$$

$\|y^*\| \leq 1$ 는 singular value decomposition의 특성에 의해서 $\|y\| \leq 1$ 와 같다. (43)로부터 x^* 는 타원이 됨을 알 수 있으며 $y = Uy^*, x = Vx^*$ 에 의해 수직함수 U, V 는 x, y 의 회전을 결정하므로 x 역시 타원이 된다. 결국, (40)에서 $\|y\| \leq 1$ 일 때 x 는 타원이다. (31)은 (40)와 같은 꼴이다. 그러므로 τ ($\tau = [\tau_1 \ \tau_1 \ \dots \ \tau_m]^T$)가 $\|\tau\| \leq 1$ 으로 구속될 때, 우측 항의 \ddot{u} 은 타원을 이룬다.

VI. Case Studies

1. Case Study I

매니퓰레이터 분석 방법의 첫 연구 대상으로 그림 10과 같이 2차원 2 관절을 가진 두 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있는 간단한 시스템을 선택했다. 물체의 무게 중심에 물체 좌표계가 있고 그 좌표계가 절대 좌표계에 대하여 선형 가속도(\ddot{x}, \ddot{y})와 회전 가속도($\dot{\omega}$)를 갖는다. 반면, 각 로봇은 자유도가 2이므로 부족 자유도에 해당하는 시스템이다.

로봇 파라미터는 $q_1 = 90^\circ, q_2 = -90^\circ, q_3 = 90^\circ, q_4 = 90^\circ$,

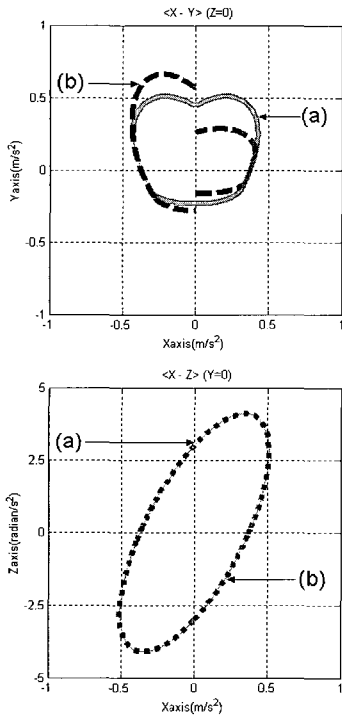


그림 12. class A와 class B를 사용한 그림 10 시스템의 조작도 타원.

Fig. 12. Manipulability ellipsoid using class A and class B in Fig. 11.
 (a) frictional contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$
 (b) frictional contact with $\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.7$

로봇 팔의 질량이 각각 1이고 로봇 팔의 길이가 1, 물체의 질량이 1, 물체의 가로 길이가 1로 주어져 있을 때, 그림 11의 구분된 가속도 영역에 대한 조건 (7)에 맞추어 구분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{영역1} &= C_1 P_1 \bar{C}_2 \bar{P}_2, \text{영역2} = \bar{C}_1 P_1 \bar{C}_2 \bar{P}_2, \text{영역3} = \bar{C}_1 \bar{P}_1 \bar{C}_2 P_2, \\ \text{영역4} &= \bar{C}_1 \bar{P}_1 C_2 P_2, \text{영역5} = \bar{C}_1 \bar{P}_1 C_2 P_2, \text{영역6} = \bar{C}_1 P_1 C_2 \bar{P}_2 \end{aligned}$$

그림 10은 부족 자유도 시스템이므로 부록의 (48)을 이용하여 시뮬레이션 한다. 영역 1과 4는 class A에 해당하는 영역이고 나머지 영역은 class B, class C에 해당할 수 있는 영역이다. Class B로 선택하여 시뮬레이션을 한 결과는 그림 12이고 class C로 시뮬레이션 한 결과는 그림 13이다. 그림 12의 결과를 보면 물체의 가속도가 마찰계수가 같았을 때에는 경계에서 연속이던 그림이 마찰계수를 다르게 입력했을 때에는 불연속이 된 것을 볼 수 있고 그림 13을 보면 물체의 가속도가 마찰계수와 관계없이 항상 연속이 된 것을 관찰할 수 있다.

그림 13에서 (a)는 마찰 계수가 같고 (b)는 마찰 계수가 다른 상태의 결과이므로 마찰력을 고려했을 때 로봇이 물체 가속도에 가하는 영향을 확인할 수 있다. 그리고 좌측의 결과는 물체의 수평 가속도와 수직 가속도 성분을 나타내고, 우측의 결과는 물체의 수평 가속도와 회전 가속도를 나타낸다. 오른쪽 마찰 계수가 왼쪽 마찰 계수보다 크면 미는 힘에 대한 y축으로 전달되는 힘이 더 크므로 그림 13과 같이 왼쪽이 더 불룩한 타원이 형성된다.

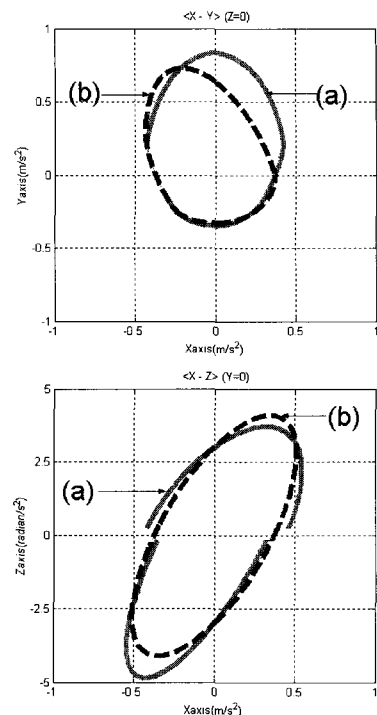


그림 13. class A와 class C를 사용한 그림 10 시스템의 조작도 타원.

Fig. 13. Manipulability ellipsoid using class A and class C in Fig. 11.
 (a) frictional contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$
 (b) frictional contact with $\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.9$

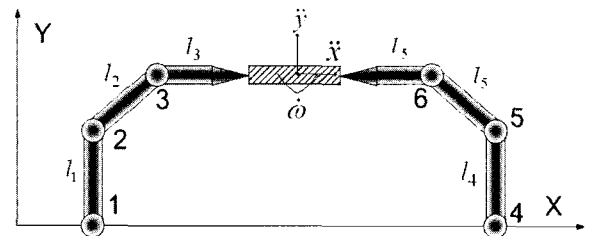


그림 14. 두 번째 로봇 시스템의 구성.

Fig. 14. Robot configuration of case II.

2. Case Study II

두 번째 연구 대상으로 2차원 3관절을 가진 로봇이 하나의 물체를 잡고 있는 시스템을 선택했다. 로봇 파라미터는 $q_1 = 90^\circ, q_2 = -45^\circ, q_3 = -45^\circ, q_4 = 90^\circ, q_5 = 45^\circ, q_6 = 45^\circ$, 로봇 팔의 질량이 각각 1이고 로봇 팔의 길이가 1, 물체의 질량이 1, 물체의 가로 길이가 1로 주어졌다. Case I의 시스템에서 각 로봇의 관절이 하나씩 늘어서 적합 자유도에 해당하는 시스템이 되었으므로 동력학식 (31)을 이용하여 시뮬레이션 한다.

Case I과 같이 그림 11의 가속도 영역 구분을 따른다. 영역 1과 4는 class A에 해당하는 영역이고 나머지 영역은 class B, class C에 해당할 수 있는 영역이다. Class B로 선택하여 시뮬레이션을 한 결과는 그림 15이고 class C로 시뮬레이션 한 결

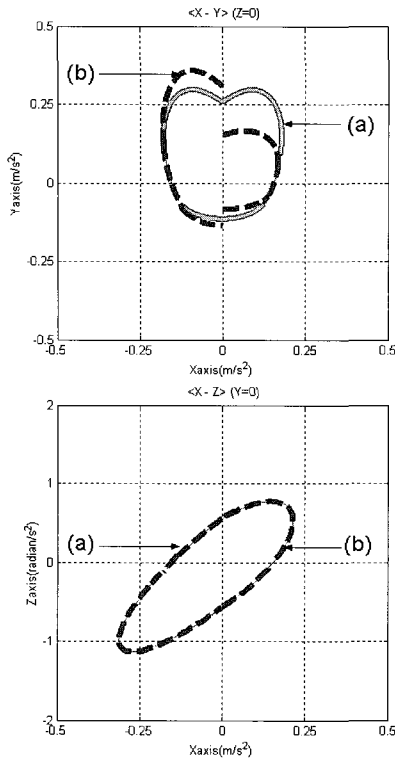


그림 15. class A와 class B를 사용한 그림 14 시스템의 조작도 타원.

Fig. 15. Manipulability ellipsoid using class A and class B in Fig. 14.
 (a) frictional contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$
 (b) frictional contact with $\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.7$

과는 그림 16이다.

그림 16의 (a)와 (b)는 (31)에 있는 물체 중심의 가속도(좌측: 수평 가속도와 수직 가속도, 우측: 수평 가속도와 회전 가속도)를 나타낸다. Case I과 Case II를 비교하면 로봇의 관절이 하나 더 추가되어 로봇이 스스로를 움직이는데 사용되는 힘(식(12)의 $M_i \ddot{q}_i$)이 Case II에서 늘어난 반면, 시스템에서 구속조건으로 사용한 $\|r\|_2 \leq 1$ 는 Case I, Case II가 같으므로 (12)에서 물체를 움직이는데 기여하는 term인 $J_i^T F_i$ 에 힘이 덜 부여된다. 시뮬레이션에서도 그림 13과 그림 16을 비교해 보면 Case II의 경우에 물체 가속도 타원이 작아지는 결과를 보이고 있다.

3. Case Study III

세 번째 연구 대상으로 2차원 3관절을 가진 두 대의 로봇이 그림 15보다 일반적인 자세인 시스템을 선택하였다. 로봇 별로 관절이 3개이고 물체 가속도가 3개로 표현되므로 적합 자유도에 해당하는 시스템이고 그림 3과 같이 가속도 영역이 구분된다.

로봇 파라미터는 $q_1 = 90^\circ, q_2 = -90^\circ, q_3 = 45^\circ, q_4 = 90^\circ, q_5 = 45^\circ, q_6 = 45^\circ$, 로봇 팔의 절량이 각각 1이고 로봇 팔의 길이가 1, 물체의 절량이 1, 물체의 가로 길이가 1로 주어졌다. 적합자유도 시스템이므로 (31)을 이용하여 시뮬

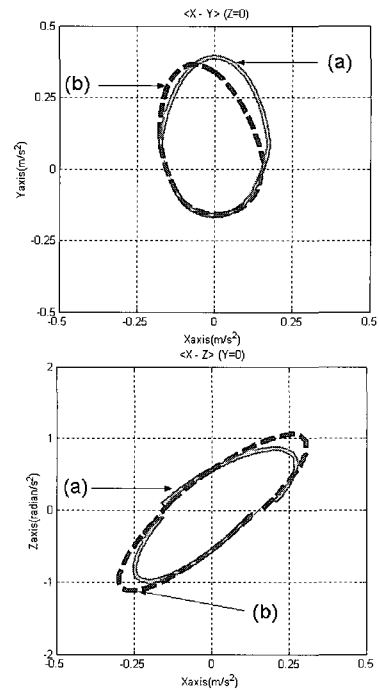


그림 16. class A와 class C를 사용한 그림 14 시스템의 조작도 타원.

Fig. 16. Manipulability ellipsoid using class A and class C in Fig. 14.
 (a) friction contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$
 (b) friction contact with $\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.9$

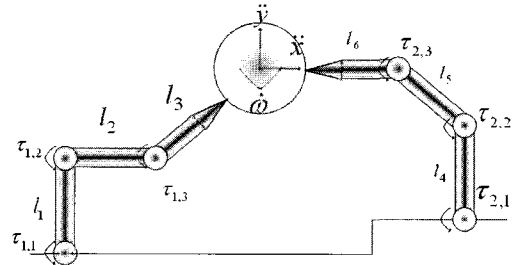


그림 17. 세 번째 로봇 시스템의 구성.

Fig. 17. Robot configuration of case III.

레이션 하고 영역 면 그림 18의 결과를 얻을 수 있다. 영역 2와 6은 class A이다. 나머지 영역은 class B로 설정하여 시뮬레이션을 하면 그림 18이 되고 나머지 영역을 class C로 설정하여 시뮬레이션을 하면 그림 19가 된다.

그림 18의 영역4(그림 3(c)의 영역 4와 같다)은 로봇 1이 단독으로 밀 수 있고(P_1) 로봇 2도 단독으로 밀 수 있으며(P_2) 둘 다 모두 friction cone 밖에 있으므로($\bar{C}_1 \bar{C}_2$) 직접 밀 수 있는 로봇에 따라 내부 힘과 외부 힘의 조합이 달라지므로 가속도 영역이 둘이 된다. 위에서 y축으로 더 큰 가속도가 로봇 2가 외부 힘을 냈을 때이고 y축으로 작은 가속도가 로봇 1이 외부 힘을 냈을 때이다. 반면, 그림 18의 영역8은 로봇 1, 2 모두 홀로 밀 수 없고 반드시 둘 다 힘을 내야 하는 영역($\bar{C}_1 \bar{P}_1 \bar{C}_2 \bar{P}_2$)이다. 로봇 1과 로봇 2가 물체를 동시에

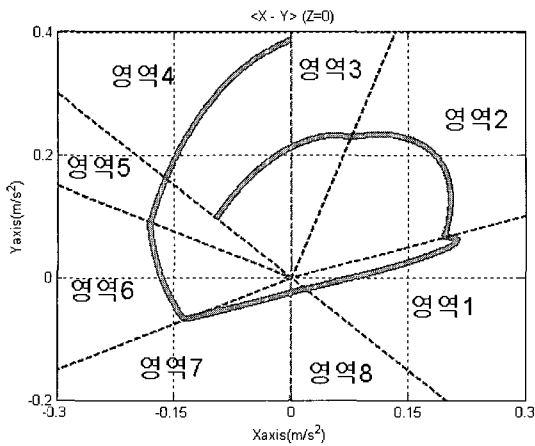


그림 18. class A와 class B를 사용한 그림 17 시스템의 조작도 타원.

Fig. 18. Manipulability ellipsoid using class A and class B in Fig. 17 frictional contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$

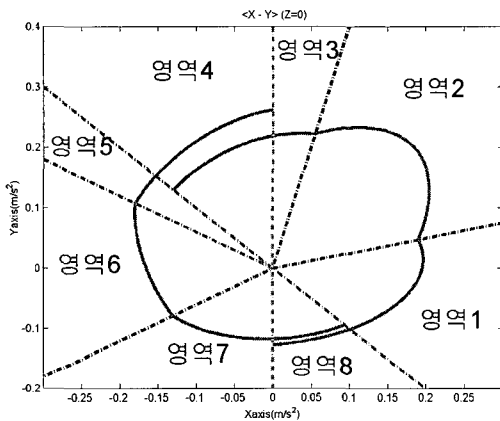


그림 19. class A와 class C를 사용한 그림 17 시스템의 조작도 타원.

Fig. 19. Manipulability ellipsoid using class A and class C in Fig. 17. frictional contact with $\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5$

밀면 두 힘을 합했을 때 상쇄되는 부분은 내부 힘이 되고 상쇄되지 않는 부분은 외부 힘이 될 것이다. 그래서 이 부분도 영역4과 같이 직접 밀 수 있는 로봇에 따라 가속도 영역이 달라지므로 2개의 가속도 영역을 갖는다. 그림 18에서는 그 영역이 서로 겹쳐 있어서 하나로 보이고 있다.

VII. 결론

본 논문에서는 우리는 마찰력을 고려한 로봇 조작도 타원을 분석하였다. 본 논문에서 고려된 시스템은 마찰이 있는 물체를 여러 대의 로봇이 잡고 있는 시스템이다. 내부 힘은 각 마찰면에서 마찰력을 만드는 역할을 하고 마찰력은 각 로봇이 물체에 힘을 전달하고 물체가 미끄러지지 않으며 움직이도록 한다. 특히 friction cone을 물체 가속도 작업공간에 적용하여 로봇 조작도 분석에 새로운 시도를 하였다. 그리고

미끄러짐이 기구학적 접촉과 friction cone에 근거하여 3가지 class로 영역을 구분하였다.

마찰이 적용된 동력학식을 유도하기 위하여 물체 동력학식과 로봇 동력학식을 합해서 로봇이 물체를 잡고 있는 동력학식을 유도하고, 각 class별 힘 분배 방법에 따른 로봇과 물체 가속도의 관계식을 유도하여 적용하였다. 그리고 관절 토크를 2-norm으로 구속하여 물체 가속도에 대한 타원을 만들어냈다.

그 결과, 여러 대의 로봇과 물체 사이의 마찰 계수의 차이에 따른 물체 중심의 가속도가 직관적으로 예상되는 결과와 같게 나온 것을 확인할 수 있었다. 마찰력을 이용하여 내부 힘을 계산하여 동력학식에 적용한 방법은 구속 조건을 다르게 쓰는 로봇 조작도 다각형에도 응용할 수 있을 것이다.

본 논문에서 제안한 마찰력을 고려하여 최대 가속도 영역을 구하는 방법은 많은 optimal load distribution 기술 중 일부이다. 그리고 2차원에 대해서 분석을 하였고 3차원에 대해서는 앞으로 연구해야 할 부분으로 남아있다. 각 로봇에 대한 힘을 분배하는데 있어서, 요구되는 물체의 운동을 실행하는 방법은 여러 가지가 있다. 그래서 앞으로의 연구에서 가속도의 최대량을 보장하는 분배방법에 대한 답을 구하는 시도를 할 것이다.

참고문헌

- [1] T.Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with Redundancy", *Robotics Research*, eds. M. Brady and R. Paul, MIT Press, Cambridge, MA, pp. 734-745,1984.
- [2] T. Yoshikawa, "Dynamic manipulability of robot manipulators," in *Proceedings 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1985, pp. 1032-1036, St. Louis, Missouri.
- [3] Y. Nakamura, "Advanced robotics redundancy and optimization", *Addison-Wesley Publishing Company*, 1991.
- [4] J. H. Lee, "Velocity workspace analysis for multiple arm robot systems. " *Robotica*, vol. 19, no. 5, vol. 5, pp. 581-591, Sep, 2001.
- [5] T. Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 2, Also appearing *Robotics Research, The Second International Symposium*, 1985.
- [6] J. K. Salisbury and B. Roth, "Kinematic and force analysis of articulated mechanical hands," *ASME J. Mech. Design*, vol. 82-DET-13, 1982.
- [7] A. Bicchi, C. Melchiorri, and D. Balluchi, "On the mobility and manipulability of general multiple limb robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 2, pp. 215-227, 1995.
- [8] O. Khatib and J. Burdick, "Optimization of dynamics in manipulator design: The operational space formulation," *The International Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, no.2, pp. 90-98, 1987.
- [9] D. Prattichizzo and A. Bicchi, "Dynamic analysis of mobility and graspability of general manipulation

systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 2, April 1998.

- [10] T. Yoshikawa, "Dynamic manipulability of robot manipulators," *J. Robot. Syst.*, vol.2, no. 1, pp. 113-123, 1985.
- [11] J. H. Lee and H. W. Shim, "Analysis of acceleration bounds of cooperating multiple arm robot systems", *Proceeding of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Oct, pp. 2087-2092, 2004.
- [12] 이지홍, 심형원, "공동 작업하는 다중 로봇 시스템의 동적 조작도", *제어·자동화·시스템공학 논문지* 제10권 제10호, pp. 930-939, 2004.
- [13] Y. Nakamura, K. Nagai and T. Yoshikawa, "Mechanics of coordinative manipulation by multiple robotic mechanisms", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 991-998, 1987.
- [14] S. Kodama, and N. Suda, "Matrix theory for systems control", *Tokyo: Society of Instruments and Control Engineers*, 1978.
- [15] M. Iri, S. Kodama, and N. Suda, "Singular value decomposition and its application to system control", *J. Society of Instrument and Control Engineers*, vol. 21, no.8, pp 76-772, 1982.

부록 A

1. 부족 자유도를 가진 로봇의 동력학식

(25)에서 각 로봇의 자유도가 작업공간상에서 임의의 위치/방위를 이루는데 충분하지 않을 경우 자코비안 행렬은 아래로 긴 행렬이 되어 역행렬을 취할 수 없다. 그래서 자코비안 행렬을 $J = \begin{bmatrix} J^{ind} \\ J^{dep} \end{bmatrix}$ 와 같이 독립 행렬과 비독립 행렬로 분해하면 (17)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} J_i^{ind} \\ J_i^{dep} \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad (44)$$

위 식에서 J_i 는 상수 행렬이므로 \dot{J}_i 는 모든 요소가 0인 행렬이 된다. 그러므로 (44)를 시간에 따라 미분하면 다음과 같이 전개된다.

$$\ddot{x}_i = J_i \ddot{q}_i = \begin{bmatrix} J_i^{ind} \\ J_i^{dep} \end{bmatrix} \ddot{q}_i, \quad \ddot{x}_i = \begin{bmatrix} \ddot{h}_i \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} \quad (45)$$

단, $\dot{\rho}_i$ 은 로봇 i 의 팔 끝의 회전 가속도이다. (15)와 (45)로부터 \ddot{q}_i 에서 \ddot{u} 으로 변경되는 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_i = [J_i^{ind}]^{-1} \ddot{h}_i = [J_i^{ind}]^{-1} B_i \ddot{u} \quad (46)$$

(27), (29), (46)를 (12)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 동력학식을 얻는다.

$$\tau_i = \left[M_i (J_i^{ind})^{-1} B_i + S_{i,1} K_i (HW_j)^{-1} H I_0 \right] \ddot{u} \quad (47)$$

전체 동력학식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 (J_1^{ind})^{-1} B_1 + S_{1,1} K_1 (HW_j)^{-1} H I_0 \\ \vdots + \vdots \\ M_m (J_m^{ind})^{-1} B_m + S_{m,1} K_m (HW_j)^{-1} H I_0 \end{bmatrix} \ddot{u} \quad (48)$$

부록 B

1. Case Studies에서 사용한 행렬식

Case Studies에서 시뮬레이션을 위하여 필요한 벡터와 행렬을 정리하였다.

1.1. Case Study I, II에서 Class A와 Class B를 사용한 경우

$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & \mu_1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \mu_2 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & \mu_2 \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ & \mu_1 \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = H_{24} = E_{2 \times 2}, H_{21} = H_{14} = 0_{2 \times 2}$$

영역 1, 4는 위에 지정한 H_{ij} 값을 넣고, 나머지 영역은 위에서 지정한 값을 이용해 (36)-(38)에서 구할 수 있다.

1.2. Case Study I, II에서 Class A와 Class C를 사용한 경우

$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & \mu_1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \mu_2 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & \mu_2 \end{bmatrix}, a_6 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ & \mu_1 \end{bmatrix}$$

$$e_{T2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, g_{N2} = [1 \ 0]$$

$$H_{11} = H_{24} = E_{2 \times 2}, H_{21} = H_{14} = 0_{2 \times 2}$$

영역 1, 4는 위에 지정한 H_{ij} 값을 넣고, 나머지 영역은 위에서 지정한 값을 이용해 (20), (36)-(38)에서 구할 수 있다.

1.3. Case Study III에서 Class A와 Class B를 사용한 경우

$$A_{11} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_2)} \begin{bmatrix} -\cos(\theta_p) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_p) \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_p) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \frac{1}{\sin(\theta_p + \theta_2)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_p) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^+)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^+) & -\cos(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^+) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^+) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^+) \end{bmatrix},$$

$$A_{15} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^-)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\cos(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^-) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^-) \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = -A_{11}, A_{23} = -A_{13}, A_{25} = -A_{15}, A_{27} = -A_{17},$$

$$A_{24} = -A_{14}, A_{12} = A_{22} = A_{16} = A_{26} = A_{18} = A_{28} = 0_{2 \times 2}$$

$$H_{11} = H_{12} = H_{13} = H_{21} = H_{24} = H_{25} = H_{26} = H_{27} = E_{2 \times 2}$$

$$H_{22} = H_{23} = H_{28} = H_{15} = H_{14} = H_{16} = H_{17} = H_{18} = 0_{2 \times 2}$$

단, θ_1, θ_2 는 로봇 1과 로봇 2가 물체와의 접촉면에 생기는 friction cone의 각도, θ_{R1}, θ_{R2} 는 로봇 1과 로봇 2가 물체에 접촉하는 각도, θ_p 는 (36)에서 내부 힘의 기울어진 각도를 나타내고 $\theta_{1R1}^+ = \theta_1 + \theta_{R1}$, $\theta_{1R1}^- = \theta_{R1} - \theta_1$ 이다. 내부 힘의 방향 벡터는 (36)으로 주어진다.

1.4 Case Study III에서 Class A와 Class C를 사용한 경우

$$A_{11} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_2)} \begin{bmatrix} -\cos(\theta_p) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_p) \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_p) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \frac{1}{\sin(\theta_p + \theta_2)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_p) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^+)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^+) & -\cos(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^+) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^+) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^+) \end{bmatrix},$$

$$A_{15} = \frac{1}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^-)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\cos(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^-) \\ \sin(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^-) \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \frac{\mu_2}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^-)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^-) & \sin(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^-) \\ \cos(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\cos(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^-) \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \frac{\mu_2}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^+)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^+) & \sin(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^+) \\ \cos(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^+) & -\cos(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^+) \end{bmatrix},$$

$$H_{15} = \frac{\mu_1}{\sin(\theta_p + \theta_2)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{1R1}^+) \sin(\theta_2) & -\sin(\theta_{1R1}^+) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_{1R1}^+) \sin(\theta_2) & \cos(\theta_{1R1}^+) \cos(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$H_{23} = \frac{\mu_2}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^-)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^-) & \sin(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^-) \\ \cos(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\cos(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^-) \end{bmatrix},$$

$$H_{21} = \frac{\mu_2}{\sin(\theta_p - \theta_{1R1}^-)} \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) \sin(\theta_{1R1}^-) & -\cos(\theta_p) \cos(\theta_{1R1}^-) \\ -\cos(\theta_{R2}) \sin(\theta_{1R1}^-) & \cos(\theta_{R2}) \cos(\theta_{1R1}^-) \end{bmatrix},$$

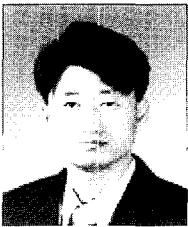
$$H_{17} = \frac{\mu_1}{\sin(\theta_p - \theta_2)} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{R1}) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_{R1}) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_{R1}) \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_{R1}) \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = -A_{11}, \quad A_{23} = -A_{13}, \quad A_{25} = -A_{15}, \quad A_{27} = -A_{17},$$

$$A_{24} = -A_{14}, \quad A_{12} = A_{22} = A_{16} = A_{26} = A_{18} = A_{28} = 0_{2 \times 2}$$

$$H_{11} = H_{12} = H_{13} = H_{14} = H_{24} = H_{25} = H_{26} = H_{27} = E_{2 \times 2}$$

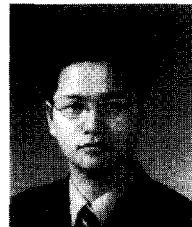
$$H_{22} = H_{28} = H_{16} = H_{18} = 0_{2 \times 2}$$



이 지 흥

1960년 4월 21일생. 1983년 서울대 전자공학과 졸업. 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사(1985). 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사(1991). 1983년~1988년 현대중공업 로봇사업부 연구원. 1991년 한국과학기술원 연수연구원. 1994

년~현재 충남대학교 메카트로닉스공학과 교수. 관심분야는 로봇틱스, 지능제어, 전자파 차폐, 컴퓨터 기반 신호처리 시스템.



이 원 희

1977년 8월 24일생. 2003년 충남대 메카트로닉스공학과 졸업. 2003년~현재 동대학원 석사과정. 관심 분야 : 로봇틱스, 3D animation, 전자파 차폐, GPS를 이용한 차량 위치 측정 시스템.