

조정법을 이용한 덕트 내의 이상 층류 유동에 대한 입구 온도분포 역해석

홍 윤 기* · 백 승 욱†

(2004년 5월 7 일 접수, 2004년 7월 16일 심사완료)

Inverse Problem of Determining Unknown Inlet Temperature Profile in Two Phase Laminar Flow in a Parallel Plate Duct by Using Regularization Method

Yun Ky Hong and Seung Wook Baek

Key Words : Inverse Problem(역문제), Conjugate Gradient Method(공액구배법), Tikhonov Regularization Method(Tikhonov 조정법)

Abstract

The inverse problem of determining unknown inlet temperature in thermally developing, hydrodynamically developed two phase laminar flow in a parallel plate duct is considered. The inlet temperature profile is determined by measuring temperature in the flow field. No prior information is needed for the functional form of the inlet temperature profile. The inverse convection problem is solved by minimizing the objective function with regularization method. The conjugate gradient method as iterative method and the Tikhonov regularization method are employed. The effects of the functional form of inlet temperature, the number of measurement points and the measurement errors are investigated. The accuracy and efficiency of these two methods are compared and discussed.

기호설명

| | |
|-------|-------------------------|
| A_p | : 입자의 겉면적, m^2 |
| c | : 비열, $J/(kg \cdot K)$ |
| d_p | : 입자의 지름, m |
| d^* | : 하강 방향, 식 (13) |
| f_p | : 고체 입자의 체적분율 |
| F | : 입구 온도 분포 |
| h | : 대류 열전달 계수 |
| H | : 덕트의 높이 |
| H_0 | : 조정 행렬, 식 (22) |
| J | : 입구에서 구해야 하는 온도점의 개수 |
| k_g | : 열전도도, $W/(m \cdot K)$ |
| L | : 덕트의 길이 |
| M | : 측정점(센서)의 전체 개수 |
| N_p | : 고체 입자의 수밀도, m^{-3} |

| | |
|------------|-----------------------|
| Nu | : 무차원 변수, 식 (3) |
| Nu_H | : 무차원 변수, 식 (3) |
| Pe | : 무차원 변수, 식 (3) |
| Re | : 무차원 변수, 식 (3) |
| S | : 목적함수, 식 (5) |
| T | : 온도, K |
| ΔT | : 민감도 함수, problem (6) |
| u | : 속도, m/s |
| Y | : 측정 온도, K |
| Z | : 민감도, 식 (25) |
| Z | : 민감도 행렬, 식 (24) |

그리스문자

| | |
|----------------|-----------------------------|
| Θ | : 무차원화된 온도 |
| ρ | : 밀도, kg/m^3 |
| λ, ξ | : Langrange 승수, problem (8) |
| γ | : 조정 매개변수 |
| β | : 결합 계수, 식 (14) |
| β^* | : 탐색 간격 크기, 식 (15) |
| $\delta()$ | : Dirac delta function |
| ω | : 무작위 수 |
| σ | : 표준 편차 |

* 한국과학기술원 대학원 항공우주공학전공

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공

E-mail : swbaek@sorak.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3714 FAX : (042)869-3710

- ε : 허용 오차
- 상첨자
- k : 반복 계산 횟수
- $*$: 무차원 변수
- " : 추정값 또는 가정값
- 하첨자
- g : 기체
- p : 입자
- w : 벽
- in : 입구
- out : 출구
- m : m 번째 측정점
- j : j 번째 경계점

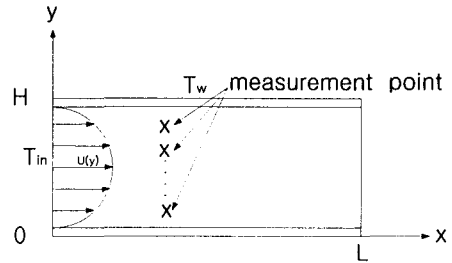


Fig. 1 Geometry, coordinates and sensor location

convection) 문제는 많이 다루어져 왔다.⁽³⁻⁸⁾ 본 연구에서는 덕트 내를 흐르고 있는 완전 발달된 2 상 층류 유동에 대해서 입구 온도 분포를 찾는 문제를 부가 문제를 적용한 공액구배법(Conjugate Gradient Method)과 Tikhonov 조정법을 이용해서 해석하고자 한다.

1. 서론

본 연구의 목적은 덕트내에서 2 상 유동이 흐르고 있을 때 특정하류지점에서 측정된 온도를 이용해서 입구의 온도 분포를 찾아내는 것이다. 만약 입구의 온도 분포를 알고 있다면, 덕트내의 하류온도 분포를 이로부터 구할 수 있게 되는데, 이러한 문제를 직접 문제(direct problem)라 한다. 이와는 반대로 입구의 온도를 유동장 하류지점에서 측정된 온도로부터 구해야 하는 경우가 있는데, 이를 역열전달문제(inverse heat transfer problem)라 한다. 역열전달 문제는 다양한 과학 및 기술 분야에 적용될 수 있지만, 이 문제가 가지고 있는 ill-posed 특성으로 인해 그들 분야에 그대로 적용하기가 매우 어렵다. Ill-posed 특성은 직접 문제에 사용되었던 많은 알고리즘들이 역문제(inverse problem)에는 적용될 수 없게 만들기 때문에 특별한 수치적 기법을 필요로 하게 된다. 이러한 기법 중에서 가장 많이 이용되는 방법이 조정법(regularization technique)이다. 조정법에는 공액구배법(conjugate gradient method)과 Tikhonov 조정법(Tikhonov regularization method)이 있다.^(1,2)

공액구배법은 역문제가 가지고 있는 ill-posed 특성을 반복적 방법을 통해서 해결한다. 이 방법은 직접 문제와 민감도 문제(sensitivity problem), 부가 문제(adjoint problem)로 구성된다.⁽¹⁾ 또다른 조정법인 Tikhonov 조정법은 측정 오차의 영향을 줄여주는 완화인자(smoothing factor)를 목적 함수(objective function)에 도입하는 방법을 이용한다.⁽²⁾ 이 방법은 직접 문제를 푼 후 민감도 해석(sensitivity analysis)를 통해서 입구 온도를 구하게 된다.

그동안 1 상 유동에 대한 역열대류(inverse heat

2. 공액구배법

2.1 직접 문제

직접 문제(Direct Problem)로 공기와 스테인레스(stainless steel) 입자로 구성되어 있는 2 차원 평면 덕트내를 흐르는 완전 발달된 2 상 유동에 대해서 다루고자 한다. 스테인리스 입자는 유동장 전체에 고르게 퍼져 있다고 가정하고, 구형이라고 가정한다. 그리고 기체와 입자의 물성치는 온도와 무관하게 일정한 값을 가진다고 가정하고, 점성에 의한 에너지 소산은 없다고 가정한다.

기체의 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\rho_g(1-f_p)c_g(u \frac{\partial T_g}{\partial x}) = k_g \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_g}{\partial y^2} \right) \quad (1a)$$

$$-hA_p N_p (T_g - T_p)$$

$$\begin{aligned} T_g(0, y) &= T_{in} = F(y) \\ T_g(x, 0) &= T_w \\ T_g(x, H) &= T_w \\ T_g(L, y) &= T_{out} \end{aligned} \quad (1b)$$

유동내를 흐르는 입자의 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\rho_p f_p c_p (u \frac{\partial T_p}{\partial x}) = -hA_p N_p (T_p - T_g) \quad (1c)$$

$$T_p(0, y) = T_{in} = F(y) \quad (1d)$$

여기서 관내를 흐르는 유동은 완전히 발달된 층류 유동으로 다음과 같은 속도 분포를 가진다.⁽⁵⁾

$$\frac{u}{u_{mean}} = 6 \left(\frac{y}{H} - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right) \quad (2)$$

무차원 변수들을 다음과 같이 정의하면,

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad \Theta_g = \frac{T_g - T_w}{T_{\max} - T_w}, \\
 \Theta_p &= \frac{T_p - T_w}{T_{\max} - T_w}, \quad u^* = \frac{u}{u_{\text{mean}}} = 6y^*(1 - y^*), \\
 \text{Re} &= \frac{u_{\text{mean}}H}{\nu}, \quad \text{Pe}_g = \text{RePr} = \frac{u_{\text{mean}}H\rho_g c_g}{k_g}, \\
 \text{Pe}_p &= \frac{u_{\text{mean}}H\rho_p c_p}{k_g}, \quad \text{Nu} = \frac{hd_p}{k_g}, \quad \text{Nu}_H = \frac{hH}{k_g}, \\
 A_p^* &= \frac{A_p}{H^2}, \quad N_p^* = N_p H^3 \tag{3}
 \end{aligned}$$

기체와 입자에 대한 지배방정식을 다음과 같이 무차원화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{Pe}_g(1 - f_p)(u^* \frac{\partial \Theta_g}{\partial x^*}) &= \left(\frac{\partial^2 \Theta_g}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta_g}{\partial y^{*2}} \right) \\
 - \text{Nu}_H A_p^* N_p^* (\Theta_g - \Theta_p) & \tag{4a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_g(0, y^*) &= \Theta_m \\
 \Theta_g(x^*, 0) &= \Theta_w \\
 \Theta_g(x^*, 1) &= \Theta_w \\
 \Theta_g\left(\frac{L}{H}, y^*\right) &= \Theta_{\text{out}} \tag{4b}
 \end{aligned}$$

$$\text{Pe}_p f_p (u^* \frac{\partial \Theta_p}{\partial x^*}) = -\text{Nu}_H A_p^* N_p^* (\Theta_p - \Theta_g) \tag{4c}$$

$$\Theta_p(0, y^*) = \Theta_m \tag{4d}$$

아래부터는 편의를 위해 상첨자 별표기를 하지 않은 채로, θ 는 T 로 표기한 채로 무차원변수들을 표현하도록 하겠다.

2.2 역해석 문제

역해석 문제(Inverse Problem)에서 입구 온도 분포 $F(y)$ 는 모르는 값으로 덕트 안의 (x_m, y_m) , $m = 1, \dots, M$ 에 놓인 센서에 의해 측정된 온도를 이용해서 추정되어야 하는 값이다.

공역구배법은 다음의 목적 함수를 최소화하는데 적용된다.

$$S(F(y)) = \sum_{m=1}^M [Y_m(x, y) - T_g(x_m, y_m; F(y))]^2 \tag{5}$$

여기서 Y_m 과 T_g 는 센서에서 측정된 가스 온도와 추정된 가스 온도를 가리킨다. 추정된 가스 온도 T_g 는 직접 문제에서 입구 온도 분포 $F(y)$ 를 가정함으로써 구해지는 값이다.

공역구배법을 적용하기 위해서는 민감도 문제와 부가 문제를 함께 풀어야 한다.

2.3 민감도 문제

민감도 문제(The Sensitivity Problem)를 구하기

위해서는 직접 문제에서 $F(y)$ 가 $\Delta F(y)$ 만큼 증가할 때, T_g 와 T_p 도 ΔT_g 와 ΔT_p 만큼 변화한다고 가정한다. 그러므로 직접 문제 (4)에서 $F(y)$ 는 $F(y) + \Delta F(y)$ 로, T_g 는 $T_g + \Delta T_g$ 로, T_p 는 $T_p + \Delta T_p$ 로 바뀌어야 하고, 그 후에 그 식에서 원래식 (4)를 빼면 다음과 같은 민감도 문제를 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 \text{Pe}_g(1 - f_p)(u \frac{\partial \Delta T_g}{\partial x}) &= \left(\frac{\partial^2 \Delta T_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_g}{\partial y^2} \right) \\
 - \text{Nu}_H A_p N_p (\Delta T_g - \Delta T_p) & \tag{6a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta T_g(0, y) &= \Delta F(y) \\
 \Delta T_g(x, 0) &= 0 \\
 \Delta T_g(x, 1) &= 0 \tag{6b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta T_g\left(\frac{L}{H}, y\right) &= 0 \\
 \text{Pe}_p f_p (u \frac{\partial \Delta T_p}{\partial x}) &= -\text{Nu}_H A_p N_p (\Delta T_p - \Delta T_g) \\
 \Delta T_p(0, y) &= \Delta F(y) \tag{6c} \tag{6d}
 \end{aligned}$$

2.4 부가 문제

부가 문제(Adjoint Problem) 를 구하기 위해서는 식 (4a)와 (4c)에 각각 Lagrange 승수(Lagrange multiplier) $\lambda(x, y)$ 와 $\xi(x, y)$ 를 곱해야 한다. 그리고는 그 식을 공간에 대해서 적분한 후 식 (5)의 우변에 더하게 되면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 S(F(y)) &= \sum_{m=1}^M [Y_m(x, y) - T_g(x_m, y_m; F(y))]^2 + \\
 \int_{x=0}^{\frac{L}{H}} \int_{y=0}^1 \lambda(x, y) &\left[-\text{Pe}_g(1 - f_p)(u \frac{\partial T_g}{\partial x}) \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_g}{\partial y^2} \right) - \text{Nu}_H A_p N_p (T_g - T_p) \right] dx dy + \\
 \int_{x=0}^{\frac{L}{H}} \int_{y=0}^1 \xi(x, y) &\left[-\text{Pe}_p f_p (u \frac{\partial T_p}{\partial x}) - \text{Nu}_H A_p N_p (T_p - T_g) \right] dx dy \tag{7}
 \end{aligned}$$

위 식으로부터 $\Delta S(F(y))$ 를 구하고 난 후에 ΔT_g 와 ΔT_p 를 포함한 항들이 영이 되게 만들면 아래와 같은 부가 문제를 얻게 된다. 이 부가 문제를 풀므로써 Lagrange 승수(Lagrange multiplier) $\lambda(x, y)$ 와 $\xi(x, y)$ 를 구할 수 있게 된다.

$$\text{Pe}_g(1 - f_p)(u \frac{\partial \lambda}{\partial x}) + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right) - \text{Nu}_H A_p N_p (\lambda - \xi) \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
 + \sum_{m=1}^M 2[Y_m - Y] \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) &= 0 \\
 \lambda(0, y) &= 0 \\
 \lambda(x, 0) &= 0 \\
 \lambda(x, 1) &= 0 \\
 \lambda\left(\frac{L}{H}, y\right) &= 0 \tag{8b}
 \end{aligned}$$

$$Pe_p f_p (u \frac{\partial \xi}{\partial x}) - Nu_H A_p N_p (\xi - \lambda) = 0 \quad (8c)$$

$$\xi(\frac{L}{H}, y) = 0 \quad (8d)$$

여기서 $\delta()$ 는 Dirac delta 함수이다.

또한 Eq. (7)로부터 함수의 변화량 $\Delta S(F(y))$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta S[F(y)] = \int_{y=0}^1 \left\{ Pe_p f_p u \xi(0, y) + \frac{\partial \lambda(0, y)}{\partial x} \right\} \Delta F(y) dy \quad (9)$$

정의에 의해 $\Delta S(F(y))$ 는 다음과 같다.

$$\Delta S[F(y)] = \int_{y=0}^1 \nabla S[F(y)] \Delta F(y) dy \quad (10)$$

여기서 식 (9)와 식 (10)을 비교하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있게 된다.

$$\nabla S[F(y)] = Pe_p f_p u \xi(0, y) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Big|_{0, y} \quad (11)$$

이 식은 구배식(gradient equation)으로서, 함수 $S(F(y))$ 의 구배를 Lagrange 승수 $\lambda(x, y)$ 와 $\xi(x, y)$ 를 이용해 표현하고 있다.

2.5 반복 과정 (Iterative procedure)

k 번째 반복 계산에서 $T_g, T_p, \Delta T_g, \Delta T_p, \lambda(x, y), \xi(x, y), \nabla S(F(y))$ 을 알고 있다고 하면, 반복적 계산은 아래와 같이 진행된다. $k+1$ 번째 단계에서의 입구 온도는 다음 식에 의해 계산된다.

$$F^{k+1}(y) = F^k(y) - \beta^k \mathbf{d}^k(y) \quad (12)$$

여기서 \mathbf{d}^k 는 하강 방향(direction of descent)으로 다음에 의해 결정된다.

$$\mathbf{d}^k = \nabla S[F^k(y)] + \gamma^k \mathbf{d}^{k-1} \quad (13)$$

결합 계수(conjugation coefficient) γ^k 는 Fletcher-Reeves 식⁽¹⁾으로부터 정해진다.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \{\nabla S[F^k(y)]\}^2}{\sum_{j=1}^N \{\nabla S[F^{k-1}(y)]\}^2} \quad \text{with } \gamma^0 = 0 \quad (14)$$

탐색 간격 크기(search step size) β^k 는 식 (5)에 의해 주어지는 함수를 β^k 에 대해서 최소화함으로써 구할 수 있다.

$$\beta^k = \frac{\sum_{m=1}^M [T_g(x_m, y_m; F^k(y)) - Y_m] \Delta T_g(x_m, y_m; \mathbf{d}^k)}{\sum_{m=1}^M [\Delta T_g(x_m, y_m; \mathbf{d}^k)]^2} \quad (15)$$

여기서 $\Delta T_g(x_m, y_m; \mathbf{d}^k)$ 는 민감도 문제 (6)에서 $\Delta F(y) = \mathbf{d}^k$ 로 놓고 얻어진 해이다.

2.6 차이이론(Discrepancy principle) - 수렴조건
센서에서 측정된 온도가 오차가 없는 값이라면, 수렴 조건은 아래와 같을 것이다.

$$S(\mathbf{P}^{k+1}) < \varepsilon \quad (16)$$

여기서 허용 오차 ε 은 안정된 해가 얻어질 수 있도록 충분히 작게 정해지는 값이다. 그러나 센서에서 얻어진 온도는 측정 오차를 가지고 있을 수 밖에 없다. 결국 역해석 문제가 가지고 있는 ill-posed 특성으로 인해 식 (5)를 최소화하는 과정에서 얻어진 추정 온도가 오차를 가지고 있는 측정 온도에 가까워질수록 큰 떨림이 발생하게 된다. 그러나 만약 차이이론을 이용해서 반복 계산에 대한 수렴조건을 구하게 되면, 공역구배법은 well-posed 특성을 가지게 된다. 먼저 온도 차이가 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$|Y(x_{measured}, y_{measured}) - T(x_{measured}, y_{measured})| \approx \sigma \quad (17)$$

여기서 σ 는 측정값의 표준편차로 센서에 상관없이 일정하다고 가정된 값이다. 식 (17)을 식 (5)에 대입하면, 허용 오차 ε 을 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^M \sigma^2 = M\sigma^2 \quad (18)$$

결국, 수렴조건은 식 (18)의 ε 값을 식 (16)에 넣음으로써 구할 수 있게 된다.

2.7 계산 과정(Computational Procedure)

입구 온도 분포 $F(y)$ 에 대해서 초기값을 정하고 $k=0$ 이라고 한다.

Step 1. 직접 문제를 풀어서 T_g 와 T_p 를 구한다.

Step 2. 수렴여부를 판단한 후에 수렴되지 않았다면 다음 step 으로 가 계속 계산하도록 한다.

Step 3. T_g 와 측정된 온도 Y_m 를 이용해서 부가 문제 (8)를 풀고, $\lambda(x, y)$ 와 $\xi(x, y)$ 를 구한다.

Step 4. $\lambda(x, y)$ 와 $\xi(x, y)$ 로부터 식 (11)을 이용해 구배 벡터 $\nabla S[F^k(y)]$ 를 구한다.

Step 5. $\nabla S[F^k(y)]$ 을 이용해서 식 (14)의 γ^k 와 식 (13)의 \mathbf{d}^k 를 구한다.

Step 6. $\Delta F^k = \mathbf{d}^k$ 라 하고, 민감도 문제 (6)를 풀어서 $\Delta T_g(x, y; \mathbf{d}^k)$ 를 구한다.

Step 7. $\Delta T_g(x, y; \mathbf{d}^k)$ 로부터, 식 (15)의 탐색 간격 크기(search step size) β^k 를 구한다.

Step 8. β^k 와 \mathbf{d}^k 로부터 식 (12)를 이용해 입구 온도분포 $F^{k+1}(y)$ 를 추정하고 step 1 로 간다.

3. Tikhonov 조정법

3.1 직접 문제 (Direct Problem)

2.1 절과 같다.

3.2 역해석 문제 (Inverse Problem)

Tikhonov 조정법은 공액구배법과 마찬가지로 다음과 같은 목적 함수를 최소화하는 방법이다.

$$S(F(y)) = \sum_{m=1}^M [Y_m(x, y) - T_g(x_m, y_m; F(y))]^2 \quad (19)$$

여기서, 목적 함수는 다음의 조정항(regularization term)을 더함으로써 수정될 수 있다.

$$\gamma \|F\|^2 \quad (20)$$

γ 는 조정 매개변수(regularization parameter)이다. 위의 목적 함수에 조정항을 더해서 얻어지는 식은 다음과 같이 표현된다.

$$S(F(y)) = (Y - T_g)^T (Y - T_g) + \gamma (H_0 F)^T (H_0 F) \quad (21)$$

여기서 H_0 행렬은 조정 행렬(regularization matrix)으로써 아래와 같다.

$$H_0 = I \quad (I: J \times J \text{ identity matrix}) \quad (22)$$

입구 온도는 식 (21)의 $S(F(y))$ 를 입구 온도에 대해 미분해서 최소화함으로써 구할 수 있다.

$$\{Z^T Z + \gamma H_0^T H_0\} F = Z^T (Y - T_g) + Z^T Z F'' \quad (23)$$

여기서 F'' 는 가정된 값이고, T_g'' 는 이로부터 추정된 값이다. Z 는 민감도 행렬(sensitivity matrix)로서, 아래와 같다.

$$Z = \begin{bmatrix} (Z_g)_1^1 & \dots & (Z_g)_1^j & \dots & (Z_g)_1^J \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Z_g)_m^1 & \dots & (Z_g)_m^j & \dots & (Z_g)_m^J \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Z_g)_M^1 & \dots & (Z_g)_M^j & \dots & (Z_g)_M^J \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.3 민감도 계수

민감도 행렬은 민감도 계수(sensitivity coefficient)들로 구성된다. 이들은 다음과 같이 정의된다.

$$(Z_g)_m^j = \frac{\partial (T_g)_m}{\partial F_j}, (Z_p)_m^j = \frac{\partial (T_p)_m}{\partial F_j} \quad j = 1 \sim J, m = 1 \sim M \quad (25)$$

여기서 j 와 m 은 입구 온도에 관련된 지점과 온도 측정점의 내부 위치를 나타낸다.

이들은 직접 문제 (4)를 입구 온도 $F(y)$ 로 미분함으로써 얻게 되는 다음과 같은 식들로부터 구할 수 있다.

$$Pe_g(1 - f_p)u \frac{\partial (Z_g)^j}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 (Z_g)^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Z_g)^j}{\partial y^2} \right) \quad (26a)$$

$$- Nu_H A_p n_p ((Z_g)^j - (Z_p)^j)$$

$$(Z_g)^j(0, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \text{ belongs to position of } j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26b)$$

$$(Z_g)^j(x, 0) = 0$$

$$(Z_g)^j(x, 1) = 0$$

$$(Z_g)^j\left(\frac{L}{H}, y\right) = 0$$

$$Pe_p f_p u \frac{\partial (Z_p)^j}{\partial x} = -Nu_H A_p n_p ((Z_p)^j - (Z_g)^j) \quad (26c)$$

$$(Z_p)^j(0, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \text{ belongs to position of } j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26d)$$

3.4 계산과정 (Computational Procedure)

Step 1. 식 (26)로부터 민감도 계수를 구한 후, 민감도 행렬 Z 를 식 (24)을 이용해 구성한다.

Step 2. 조정 매개변수 γ 값을 임의로 정한다.

Step 3. 입구 온도를 $F''(y)$ 라 가정하고, 직접 문제 (4)로부터 T_g'' 을 구한다.

Step 4. 식 (23)로부터 조정 행렬 Z 와 추정 온도 T_g'' 를 이용해 $F(y)$ 를 구한다.

Step 5. step 4에서 구한 $F(y)$ 를 이용해 직접 문제 (4)를 풀어 유동장의 온도분포를 구한다.

4. 결과 및 토론

본 역해석의 정확도를 증명하기 위해, 세 가지 입구 온도 분포에 대해서 연구를 수행하였다. 각각의 경우는 모의 실험된 측정 온도 $Y_{measured}$ 값을 이용해 진행되었고, 그 결과는 정확한 해와 비교되었다. 덕트의 길이 L 과 높이 H 는 50 m와 0.2 m이다. 여기서 L 은 열적으로 발달하고 있는 영역을 모두 포함하기 위해 충분히 길게 잡았다. 또한 센서는 입구로부터 0.25 m 거리에 위치한다. 유체는 공기로 하였고 물성치는 $\rho_g = 0.4975 \text{ kg/m}^3$, $c_g = 1075 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $\kappa_g = 0.0524 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ 이다. 입자는 스텐레스로 물성치는 $\rho_p = 8238 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 563 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $\kappa_p = 19.8 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ 이다. 그리고 유동의 평균속도 u_{mean} 은 0.1 m/s 이고 60 개의 격자는 이용해 입구속도 분포를 적용하였다.

모의 실험에 의해 정해지는 측정 온도 $Y_{measured}$ 는 계산된 정확한 온도에 무작위 오차를 더함으로써 결정된다.

$$Y_{measured} = T_{exact} + \omega \sigma \quad (27)$$

여기서 σ 는 4.0 K 와 8.0 K 이고, ω 는 측정 온도에 대해서 99%신뢰 구간을 가지는 값으로 $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$ 사이의 값을 가지는 무작위 수이다.

앞으로 테스트할 입구 온도 분포 $F(y)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$(1) \quad \begin{aligned} T_b &= 300 \times (3 + \cos(y\pi) - \cos(2y\pi)) \\ &\quad - \cos(3y\pi) - \cos(4y\pi) \end{aligned} \quad (28a)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} T_b &= 300 + 700y & (0 < y < 0.5) \\ T_b &= -700y + 1000 & (0.5 < y < 1) \end{aligned} \quad (28b)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} T_b &= 1000 & (0.2 < y < 0.8) \\ T_b &= 300 & (0 < y < 0.2, 0.8 < y < 1) \end{aligned} \quad (28c)$$

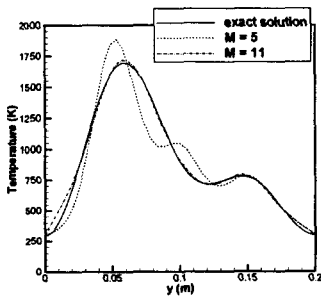
먼저 측정점의 개수의 영향을 알아보기 위해, 측정점의 표준편차가 $\sigma=0.0$ K 인 경우, 즉 측정오차가 없는 경우에 대해서 테스트를 해보았다. Fig. 2, 3, 4 는 각각의 테스트 case 에 대해서 공액구배법과 Tikhonov 조정법을 적용했을 때 추정된 입구 온도 분포를 보여준다. Tikhonov 조정법을 적용하였을 경우에는 가장 좋은 결과를 보여주는 조정 매개변수에 대한 결과를 보여주고 있다. 각각의 그림에서 M 은 유동장 하류에서의 측정점의 개수를 나타낸다. 그래프에서 보면 알 수 있듯이 측정점의 개수가 11개일 때가 5개일 때보다 더 정확한 결과를 준다는 것을 확인할 수 있다. 그러므로 이후부터는 하류에서의 측정점의 개수를 11개로 하

고 계산을 수행하도록 하겠다.

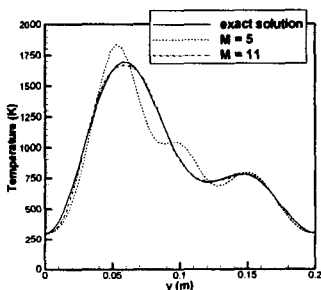
Fig. 5, 6, 7 은 각각의 테스트에 대해 공액구배법과 Tikhonov 조정법을 적용했을 때의 결과이다. 이들 결과로부터 측정 오차의 영향을 알 수 있다. 여기서 σ 는 측정오차의 표준편차를 가리키는 값이다. 공액구배법의 경우에는 수행되었던 모든 테스트에서 측정오차가 작을수록 좋은 결과를 보여줌을 알 수 있다. 하지만, Tikhonov 조정법의 경우, 측정오차의 영향을 공액구배법에 비해 적게 받는다는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 7 을 통해서는 다른 경우와 달리 입구 온도분포를 정확히 맞추지 못하는 것을 확인할 수 있다. 즉, 입구 온도 분포가 계단형과 같이 불연속인 경우에는 다른 경우들에 비해 정확히 예측하지 못한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8 은 Tikhonov 조정법을 이용할 때 결정해줘야 하는 조정 매개 변수의 영향을 보여주고 있다. 결과들을 살펴보면 알 수 있듯이, 테스트된 3 가지 경우 모두 조정 매개 변수에 민감함을 알 수 있는데, 조정 매개 변수가 작을수록 입구온도분포가 진동하는 것을 확인할 수 있다. 현재 테스트된 경우에서는 조정 매개변수가 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 일 때 가장 좋은 결과를 보여줌을 알 수 있다.

Table 1 은 각각의 테스트를 수행하는데 드는 계산 시간을 비교한 것이다. 계산에 쓰인 컴퓨터는 5

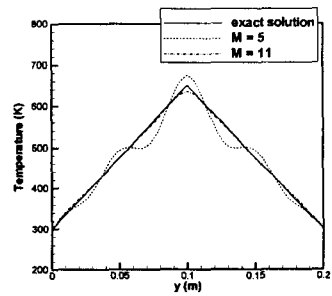


(a) Conjugate gradient method

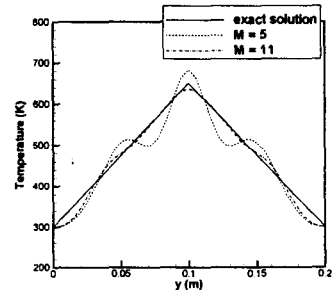


(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-4}$

Fig. 2 Effect of the number of measurement point

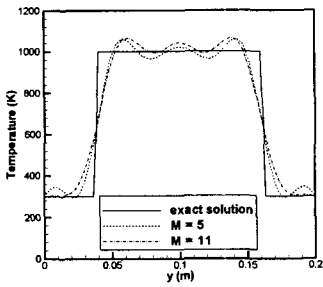


(a) Conjugate gradient method

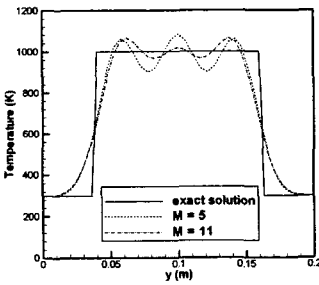


(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-3}$

Fig. 3 Effect of the number of measurement point

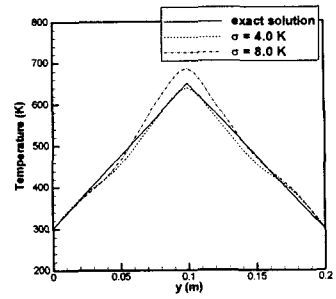


(a) Conjugate gradient method

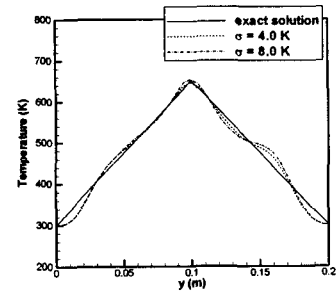


(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-3}$

Fig. 4 Effect of the number of measurement point

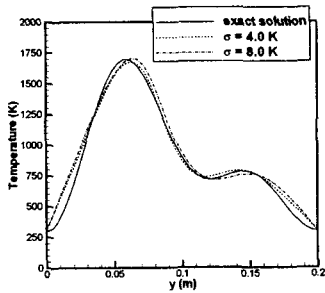


(a) Conjugate gradient method

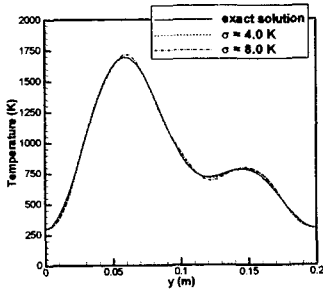


(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-3}$

Fig. 6 Effect of measurement error

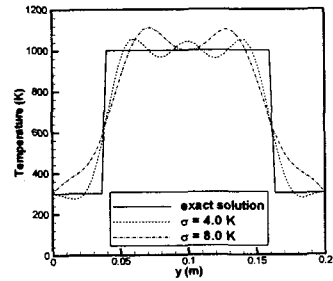


(a) Conjugate gradient method

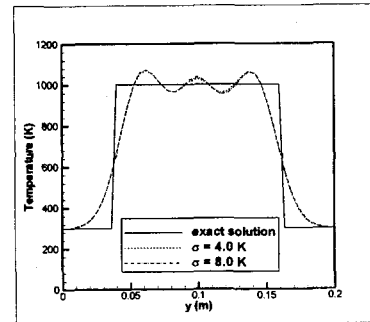


(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-4}$

Fig. 5 Effect of measurement error



(a) Conjugate gradient method



(b) Tikhonov regularization method with $\gamma = 10^{-3}$

Fig. 7 Effect of measurement error

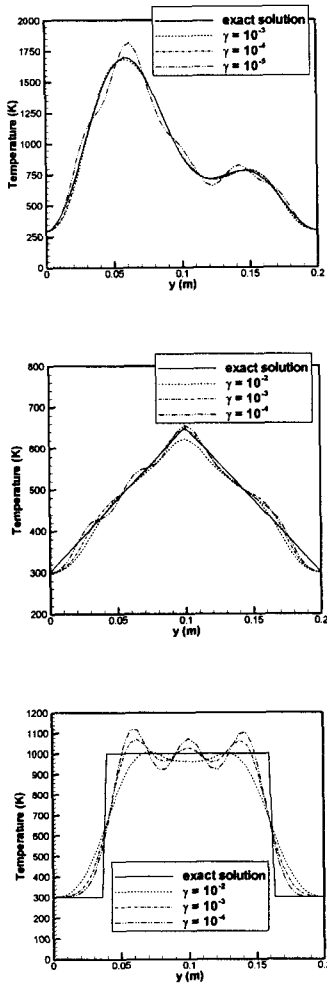


Fig. 8 Effect of regularization parameter

12 Mbytes 의 메모리를 가진 AMD Athlon XP 2500+ 이다.

공액구배법의 경우, 측정오차가 클수록 계산 시간이 적게 걸린다는 것을 확인할 수 있다. 이러한 차이는 수렴조건을 결정하는데 쓰인 차이이론, 식 (18)에 의해 생기게 된다. 차이 이론에 의하면, 측정오차가 클수록 허용오차가 크게 되기 때문에 반복 계산 횟수가 적어지게 되어서 계산 시간이 짧아지게 되는 것이다. 테스트 (3)의 경우에는 계산 시간이 다른 경우에 비해서 현저하게 긴 것을 확인할 수 있다. 즉, 입구 온도가 계단형과 같이 불연속일 경우, 입구 온도 분포를 찾는 데 어려움을 겪게 되고 이로 인해 수렴하는데 더 많은 시간이 소모됨을 알 수 있다.

Tikhonov 조정법의 경우에는 계산 시간이 측정

Table 1 Comparison of computing time(sec)

| method | σ | Case (1) | Case (2) | Case (3) |
|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Conjugate Gradient Method | 4.0 K | 59.7 | 17.52 | 264 |
| | 8.0 K | 39.5 | 10.19 | 52.8 |
| Tikhonov Regularization Method | 4.0 K | 227 | 226 | 227 |
| | 8.0 K | 227 | 226 | 227 |

오차나 입구 온도 분포에 상관없이 비슷함을 알 수 있다.

공액구배법과 Tikhonov 조정법을 비교해 보면, 대부분의 경우 공액구배법이 Tikhonov 조정법에 비해 계산 시간이 짧다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 같은 조정법임에도 불구하고 계산시간에 차이가 나는 것은 민감도를 구하는 데 있어서의 차이 때문이다. Tikhonov 조정법의 경우에는 구해야 하는 모든 입구 온도에 대해서 일일이 민감도를 구해야 한다. 하지만, 부가문제를 적용한 공액구배법의 경우에는 일일이 민감도를 구하지 않아도 되기 때문에 민감도를 계산하는데 걸리는 시간을 단축할 수 있게 되는 것이다.

5. 결론

역해석 문제들은 ill-posed 특성을 가지고 있으므로, 이러한 특성을 없애기 위해서는 특별한 수치 기법들을 필요로 한다. 본 연구에서는 이러한 ill-posed 특성을 없애기 위해 반복적 조정법인 공액구배법과 완화 인자를 이용한 Tikhonov 조정법을 이용하였다.

공액구배법은 위의 결과들을 통해서 알 수 있듯이 효과적이며, 빠르게 수렴하는 특성을 보여준다. 하지만 차이이론에 의해 수렴조건을 정하는 특성으로 인해 측정 오차가 클수록 허용오차가 커지게 되는 특성을 가지고 있다. 그리고 이로 인해 측정 오차가 클수록 예측된 결과들이 부정확해지게 된다. Tikhonov 조정법의 경우에는 공액구배법에 비해 측정오차의 영향이 작다는 것을 알 수 있다. 하지만, 민감도를 구하는 데 많은 시간이 소모되는 특성으로 인해 계산 시간이 오래 걸린다는 단점이 있다.

또한 테스트 (3)의 경우에서 확인할 수 있듯이 입구 온도 분포가 계단형과 같이 불연속일 경우,

해를 찾는 것이 어렵게 된다. 이렇게 불연속이 있는 경우에 대해서도 정확한 해를 얻기 위해서는 다른 역해석 기법들을 개발하여야 할 것이다.

후 기

본 연구는 CERC(연소기술연구센터)의 지원으로 수행하였으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Özisik, M. N. and Orlande, Helcio, R. B., 2000, *Inverse Heat Transfer*, Taylor and Francis, New York, pp. 5~111.
- (2) Kurpisz, K. and Nowak, A. J., 1995, *Inverse Thermal Problems*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK and Boston, USA, 1995, pp. 89~110.
- (3) Liu, F. B. and Özisik, M. N., 1996, "Estimation of Inlet Temperature Profile in Laminar Duct Flow," *Inverse Problems in engineering*, Vol. 3, pp. 131~141.
- (4) Bokar, J. C. and Özisik, M. N., 1995, "Inverse Analysis for Estimating the Time Varying Inlet Temperature in Laminar Flow Inside a Parallel Plate Duct," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 39~45.
- (5) Huang, C. H. and Özisik, M. N., 1992, "Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat in Laminar Flow Through a Parallel Plate," *Numerical Heat Transfer*, Part A, Vol. 21, pp. 55~70.
- (6) Liu, F. B. and Özisik, M. N., 1996, "Inverse Analysis of Transient Turbulent Forced Convection Inside Parallel Plates," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 2615~2618.
- (7) Machado, H. A. and Orlande, Helcio R. B., 1997, "Inverse Analysis of Estimating the Timewise and Spacewise Variation of the Wall Heat Flux in a Parallel Plate Channel," *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, Vol. 7, pp. 696~710.
- (8) Park, H. M. and Chung, O. Y., 1999, "Inverse Natural Convection Problem of Estimating the Strength of a Heat Source," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 4259~4273.