

# 차량용 유압감쇠기 내 기름의 유효 체적탄성계수에 미치는 실린더 벽 탄성의 영향

이 일 영<sup>1)</sup> · 손 단 단<sup>2)</sup>

부경대학교 기계공학부<sup>1)</sup> · 부경대학교 대학원 기계공학부<sup>2)</sup>

## Effects of Cylinder Shell Elasticity on Effective Bulk Modulus of Oil in Automotive Hydraulic Dampers

Ill-Yeong Lee<sup>1)</sup> · Dandan Sun<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>School of Mechanical Engineering, Pukyong National University, Busan 608-739, Korea

<sup>2)</sup>Department of Mechanical Engineering, Graduate school, Pukyong National University, Busan 608-739, Korea

(Received 20 April 2004 / Accepted 12 July 2004)

**Abstract** : This paper presents the effects of cylinder shell elasticity on effective bulk modulus of oil ( $K_e$ ) in automotive hydraulic dampers. A theoretical model of cylinder shell bulk modulus ( $K_c$ ) based on the elasticity theory of thick-walled cylinder incorporating not only radial but longitudinal deformation is proposed. In a cylinder, values of  $K_c$  by the new model and traditional models are computed and the discrepancies among them are discussed. In a twin-tube type automotive damper, the variation of  $K_e$  under different pressure values in chambers of the damper cylinder, based on different theoretical models for  $K_c$  is computed. Through these computations, it is shown that remarkable discrepancies in computed values of  $K_e$  might occur according to the  $K_e$  models in connection with  $K_c$  models.

**Key words** : Effective bulk modulus(유효 체적탄성계수), Effective bulk modulus of cylinder(실린더의 체적탄성계수), Automotive hydraulic damper(자동차용 유압 감쇠기)

### Nomenclature

$E$  : Young's modulus of cylinder wall  
 $F_b, F_p$  : forces described in Fig. 2  
 $K_c$  : bulk modulus of container or cylinder  
 $K_{c1}, K_{c2}$  : defined in eq.(6) and (7)  
 $K_e$  : effective bulk modulus of oil  
 $K_o$  : bulk modulus of oil, defined in eq.(A4)  
 $\overline{K}_o$  : isothermal secant bulk modulus of oil

$(K_o)_0, (K_o)_p$  :  $K_o$  at pressure 0 and  $p$   
 $(\overline{K}_o)_0, (\overline{K}_o)_{2p}$  :  $\overline{K}_o$  at pressure 0 and  $2p$   
 $l$  : axial distance of cylinder inside  
 $L$  : axial length of cylinder inside  
 $m_g$  : mass of gas  
 $n$  : polytropic index  
 $p, P$  : pressure(gauge), pressure(absolute)  
 $p_1, p_2$  : described in Fig. 2  
 $p_i, p_o$  : inside and outside pressure of cylinder  
 $\Delta p_i$  : pressure difference in cylinder inside

\*To whom correspondence should be addressed.  
iylee@pknu.ac.kr

- $P_{atm}$  : atmospheric pressure(absolute)
- $r$  : radial distance in cylinder
- $r_i, r_o$  : inside and outside radius of cylinder
- $r_r$  : radius of piston rod
- $R_g$  : gas constant
- $T$  : temperature(absolute)
- $V_c$  : volume of container (or cylinder) inside
- $V_g$  : gas volume
- $V_{g0}$  : gas volume when  $P = P_{atm}, T = 293\text{ K}$
- $\delta_r$  : radial displacement of cylinder wall
- $\Delta$  : increment of a value
- $\epsilon$  : strain in cylinder wall
- $\epsilon_l$  :  $\epsilon$  in longitudinal direction
- $\epsilon_t$  :  $\epsilon$  in tangential direction
- $\epsilon_{ti}$  :  $\epsilon_t$  at  $r = r_i$
- $\nu$  : Poisson's ratio
- $\theta$  : degree
- $\sigma$  : stress in cylinder wall
- $\sigma_l, \sigma_r, \sigma_t$  :  $\sigma$  in longitudinal, radial and tangential direction

### 1. 서론

유압감쇠기 내 기름의 유효 체적탄성계수 (effective bulk modulus)  $K_e$ 는 유압감쇠기의 동특성에 큰 영향을 미치는 물리인자이다.<sup>1)</sup>

종래의 유압감쇠기 연구자들의 보고서에서는, 수치 시뮬레이션에 사용한  $K_e$  값의 평가 방법이 연구자들에 따라 비교적 큰 차이가 존재하며, 그 예를 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 보듯이, 종래 연구자들이 평가한 작동유(가스를 포함하지 않은 작동유, gas free oil)의  $K_e$  값이 일반적인 석유계 작동유의  $K_e$  값(상온, 대기압 하에서  $1.8 \times 10^9$  Pa정도이며, 유종에 따른 차이는 적음)과 큰 차이를 보이며, 감쇠기 용기의 체적탄성계수  $K_c$ 의 영향을 무시하였거나 또는 매우 간략화된 식으로 고려하였고, 명확한 근거의 제시 없이 기름의 기포 함유율을 표시하는 등, 자의적인 기준 하에서  $K_e$  값을 평가한 것으로 보인다. 그러므로, 차량용 유압감쇠기분야 연구

의 초심자가 감쇠기 내 기름의  $K_e$ 를 평가하려 했을 때 당혹감을 느끼게 될 것이다.

유압 감쇠기 내 기름의  $K_e$ 는 작동유(gas free oil)의 체적탄성계수  $K_c$ 뿐만 아니라, 작동유 내 가스 함유율( $V_g/V_c$ ), 감쇠기 용기의 체적탄성계수  $K_c$ , 기름에 혼입된 가스의 탄성계수  $K_g$ 에 따라서 변하게 된다.6)  $K_e$ 를 결정하는 인자들인  $K_c, K_g, K_c$  및  $V_g$  가운데서,  $K_c$  및  $K_g$ 에 대해서는 실용에 활용하기에 문제가 없을 정도의 정확도를 갖는 수학 모델이 알려져 있다. 그러나  $V_g$ 에 대해서는, 종래에 많은 연구자들이 관련 연구를 수행하였음에도 불구하고 아직까지도 실제 유압기기(예: 유압감쇠기)에 적용할 만한 수학 모델이 확립되어 있지는 않다. 그 이유는  $V_g$ 가 가스의 초기체적( $V_{g0}$ ), 압력, 온도 뿐만 아니라, 기·액 계면에서의 가스의 용해 및 용출 매커니즘과도 상관관계를 가지며,<sup>7)</sup> 정확한 수학적 모델을 확립하기가 매우 어려운 인자이기 때문이다. 나머지 인자인  $K_c$ 는  $V_g$ 에 비해서는 수학 모델을 얻기가 쉬운 인자임이 틀림없지만, Timoshenko의 모델<sup>8)</sup>을 사용한  $K_e$  계산식<sup>6)</sup> 이후에는 지금까지 새로운 모델에 관한 연구가 매우 드문 편이다. 또한  $K_e$ 는 작동유를 담은 용기의 경계조건에 따라서 수학모델이 달라져야 하므로 다양한 대상물에 대한 연구결과의 누적 있어야 하겠지만, 유압감쇠기는 물론 다른 유압기기에 대해서도  $K_e$ 를 평가한 연구 보고를 찾기가 매우 어려웠다.

$K_e$ 의 모델에 관한 불확실성의 문제는 유압 감쇠기에서 뿐만 아니라 일반 산업용 유압기기의 경우에도 마찬가지로 존재한다. 산업용 유압기기의 경우에는 문제를 해결하기 위한 방편으로 실제 유압 시스템에서  $K_e$ 를 측정하는 연구가 수행되었다.<sup>9-11)</sup> 실험적으로 측정한  $K_e$ 는 대상 시스템의 시뮬레이션 연구에 유용하게 활용될 수 있지만, 실험 조건이 달라질 때의  $K_e$  변화에 대한 정보를 주기에는 불충분하다.

결론적으로 말해서, 현재까지도 유압감쇠기 및 일반 유압 기기 내 기름의 유효 체적탄성계수  $K_e$ 에 관한 신뢰할만한 수학 모델이 존재하지 않는다. 거

기에는  $V_g$  모델의 불확실성이 주요 원인으로 작용하고 있지만, 그 이외에  $K_c$  모델의 불확실성도 요인의 일부로 작용하고 있다고 생각한다. 따라서, 앞으로  $K_e$ 에 관한 보다 신뢰성이 우수한 수학 모델을 얻으려면  $K_e$ 에 관련된 모든 인자들에 대한 보다 정확한 수학 모델이 얻어져야 하며, 이러한 목적을 달성하기 위한 연구의 일환으로 이 논문에서는 유압 감쇠기의  $K_e$ 에 관하여 체계적으로 연구하기로 한다.

Table 1 Evaluation of effective bulk modulus by researchers

<p>Authors : A. L. Audenino et al.[1995] <sup>1)</sup></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_e</math> described as</li> <li><math>1/K_e = 1/K_o + V_g/V_c(1/K_g - 1/K_o)</math></li> <li>• <math>K_o</math> is a constant, <math>2 \times 10^8</math> Pa.</li> <li>• <math>V_g</math> changes according to pressure under isothermal state.</li> <li>• <math>V_{g0}/V_c</math> is 2.5%.</li> </ul>
<p>Authors : S. Cafferty et al.[1995] <sup>2)</sup></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_e</math> described as <math>K_o</math> with a constant, <math>K_o = 1 \times 10^9</math> Pa</li> </ul>
<p>Author : K. Lee[1997] <sup>3)</sup></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_e</math> described as <math>K_o</math> with a constant [the value was not clarified.]</li> </ul>
<p>Author : H. H. Lang[1997] <sup>4)</sup></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_e</math> described as <math>1/K_e = 1/K_o + 1/K_c</math></li> <li>• <math>K_o</math> treated as a constant [the value was not clarified.]</li> <li>• <math>K_c</math> computed from <math>K_c = E(r_o - r_i)/2r_i</math></li> </ul>
<p>Authors : W. N. Patten et al. [1998] <sup>5)</sup></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_e</math> described as</li> <li><math>1/K_e = 1/K_o + V_g/V_c(1/K_g - 1/K_o)</math></li> <li>• <math>K_o</math> is a constant, <math>1.38 \times 10^9</math> Pa.</li> <li>• <math>V_g</math> changes according to pressure under isothermal state.</li> <li>• <math>V_{g0}/V_c</math> is 5.26%.</li> </ul>

이 연구에서는 먼저 유압감쇠기 실린더의 체적탄성계수  $K_e$ 에 대한 보다 정확한 수학 모델을 유도한다. 그 다음, 유도한  $K_e$  식에 기초하여, 유압 감쇠기에서  $K_c$ 가  $K_e$ 에 미치는 영향에 대하여 상세히 검토한다. 이어서, 비교적 얇은 튜브를 갖는 자동차용 유압감쇠기의 경우에는  $K_c$ 가  $K_e$ 에 상당한 영향을 미칠 수도 있음을 밝히고자 한다.

## 2. $K_e$ 에 관한 기초 방정식

용기(예: 유압감쇠기 실린더의 한쪽 체임버) 내 기름의 유효체적탄성계수  $K_e$ 는 다음 식으로 표시할 수 있다.<sup>6)</sup>

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_o} + \frac{V_g}{V_c} \left( \frac{1}{K_g} - \frac{1}{K_o} \right) \quad (1)$$

여기서,  $K_g$ 는 가스의 체적탄성계수,  $V_c$ 는 실린더 내 기름-가스 혼합체의 초기 체적,  $V_g$ 는 용기(실린더) 내 가스의 체적을 나타낸다. 식 (1)에서  $K_e$ 를 결정하는 요소들인  $K_o, K_c, K_g, V_g$ 에 대하여 아래에서 기술한다.

기름의 체적탄성계수  $K_o$ 는 압력과 온도에 따라 변화하며, 온도가 일정할 때에는 다음 식을 사용하여 구할 수 있다[부록 A1].

$$K_o = (K_o)_0 + 10.6p \quad (2)$$

여기서  $(K_o)_0$ 는  $p = 0$ (게이지 압력)일 때의 작동유(gas free oil)의 체적탄성계수이다.

용기의 체적탄성계수  $K_c$ 를 구하는 방법에 대해서는 제3절에서 상세히 설명한다.

가스의 체적탄성계수  $K_g$ 는 식 (3)으로 표시되며,<sup>9)</sup> 가스의 체적  $V_g$ 는 기름 내 기·액 계면에서의 물질 전달이 없다는 가정 하에서 이상적인 가스의 상태방정식으로부터 식 (4)로 표시된다.

$$K_g = n(p + P_{atm}) \quad (3)$$

$$V_g = m_g \frac{R_g T}{p + P_{atm}} \quad (4)$$

여기서  $m_g$ 는 용기 내 기름 속에 혼입된 가스의 질량,  $n$ 은 폴리트로픽 지수이다. 기름속의 가스인 공기의  $R_g$ 로는  $R_g = 287$  J/(kg K)를 사용한다. 공기의 경우에는 온도 300 K 이상, 압력 0 ~ 7 MPa 에서는 식 (4)의 이상가스 상태방정식이 실제 가스의 상태변화를 매우 정확히 묘사할 수가 있음이 알려져 있다.<sup>12)</sup>

## 3. 유압감쇠기 실린더의 체적탄성계수

### 3.1 실린더형 압력 용기의 체적탄성계수

이 연구는 유압감쇠기 내 기름의 등가 체적탄성 계수  $K_e$ 에 미치는  $K_c$ 의 영향을 상세히 조사하는 데에 역점을 두고 있다. 이를 위하여 먼저, Fig. 1과 같은 양 끝이 폐쇄된 원통형 실린더의  $K_c$ 에 관한 방정식들을 세우기로 한다.

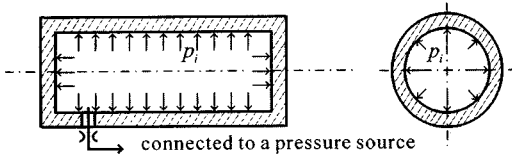


Fig. 1 A cylinder closed with end plates

Fig. 1에 나타낸 실린더의  $K_c$  계산을 위한 방정식으로서, 후벽(thick wall) 실린더를 대상으로 반지름 방향 변형 및 축 방향 변형을 모두 고려한 방정식을 제시한 문헌을 찾기가 매우 어려웠다. 그래서 이 연구에서 본 연구자들이  $K_c$ 에 관한 상세한 해석을 수행하고 그 결과 아래의 식을 얻었다[부록 A2].

$$K_c = \frac{p_i}{(\epsilon_n^2 + 2\epsilon_n)(1 + \epsilon_i) + \epsilon_i} \quad (5)$$

한편, Fig. 1에 나타낸 실린더의  $K_c$ 에 관한 방정식으로서, 후벽 실린더의 반지름 방향 변형(Timoshenko의 모델<sup>8)</sup>)만을 고려한 아래의 식이 알려져 있다.<sup>6)</sup>

$$K_a = \frac{E}{2} \left[ \frac{(r_o + r_i)(r_o - r_i)}{(1 + \nu)r_o^2 + (1 - \nu)r_i^2} \right] \quad (6)$$

또한, 벽면 두께가 얇은 실린더에 대한 근사식으로서,  $r_o \cong r_i$ 를 식 (6)에 고려하여 얻은 아래 식이 알려져 있다.

$$K_a = \frac{E(r_o - r_i)}{2r_i} \quad (7)$$

### 3.2 차량용 유압감쇠기의 $K_c$

실제 자동차용 유압감쇠기에서 실린더의 체적탄성 계수  $K_c$ 가 기름의 유효체적탄성 계수에 미치는 영향을 검토하기 위하여 Fig. 2와 같은 유압감쇠기를 검토한다. 그림에서  $F_b$ 는 감쇠기에 작용하는 감쇠력(damping force),  $F_i$ 은 실린더 벽에 축 방향으로

가해지는 힘(피스톤 및 피스톤 로드에서의 마찰력, 2중관식 실린더에서는 실린더 외측 체임버 내 압력 등에 의하여 발생됨)을 나타낸다. 또한,  $p_1, p_2$ 는 각 실린더 내 압력을 나타낸다.

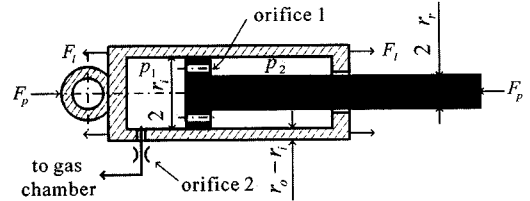


Fig. 2 An automotive hydraulic damper

Fig. 2를 관찰할 때,  $F_b$ 가 압축력일 때(즉, 피스톤이 좌측으로 움직일 때)와  $F_b$ 가 신장력일 때(즉, 피스톤이 우측으로 움직일 때)의 어느 경우에도  $p_1$ 은 실린더 벽의 축 방향 응력  $\sigma_i$ 에는 영향을 미치지 못하며,  $p_2$ 만 축 방향 응력에 작용함을 알 수 있다. 그러므로 축 방향 응력  $\sigma_i$ 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_i = \frac{F_i + p_2 \pi (r_i^2 - r_o^2)}{\pi (r_o^2 - r_i^2)} \quad (8)$$

Fig. 2의 왼쪽 체임버 내  $r = r_i$ 에서의 축 방향 변형을  $\epsilon_i$  및 반지름 방향 변형을  $\epsilon_n$ 는 부록 A2의 식 (A13) 및 (A14)에서  $p_i$  대신에  $p_1$ 을,  $\sigma_i$  대신에 식 (8)을 대입함으로써 구할 수 있다.

마찬가지 방법으로, Fig. 2의 오른쪽 체임버에서 축 방향 변형을  $\epsilon_i$  및 반지름 방향 변형을  $\epsilon_n$ 는 각각 부록 A2의 식 (A13) 및 (A14)에서  $p_i$  대신에  $p_2$ 를,  $\sigma_i$  대신에 식 (8)을 대입함으로써 구할 수 있다.

이상에서 구한  $\epsilon_i$  및  $\epsilon_n$ 를 식 (5)에 대입함으로써 감쇠기 실린더 각각의 체임버에서의  $K_c$  값을 구할 수 있다.

## 4. $K_c$ 및 $K_e$ 의 수치 계산 결과 및 평가

### 4.1 단일 실린더(Fig. 1)에서의 $K_c$ 및 $K_e$

유압감쇠기 실린더의 벽면 탄성이 기름의 유효 체적탄성 계수  $K_e$ 에 미치는 영향을 조사하기 위하

여,  $K_c$ 에 관련된 여러 가지 물리인자들이 변할 때의  $K_c$  값 자체 및  $K_e$  값의 변화에 대한 수치계산을 수행하였다.

Table 2 Physical parameter values of a cylinder

$2r_i: 27 \text{ mm}, L: 0.3 \text{ m}, (K_o)_0: 1.5 \times 10^9 \text{ Pa}, F_i: 0 \text{ N},$ $p_o: 0 \text{ MPa}, T: 313 \text{ K}, E: 2.01 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \nu: 0.3,$ $n: 1.4$
--

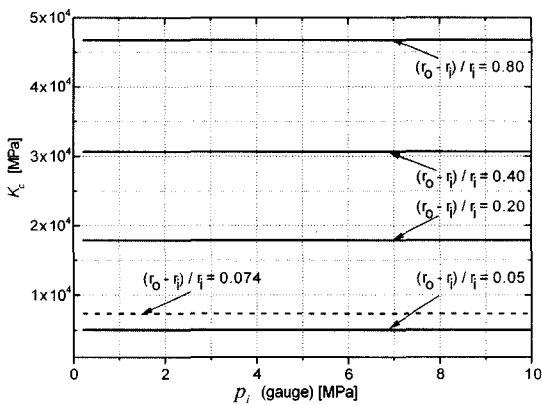


Fig. 3 Computed results of  $K_c$  [eq.(5)] for the cylinder in Fig. 1 according to  $p_i$  variation

Fig. 3 ~ 9는 Fig. 1에 나타난 실린더를 대상으로 한 계산 결과이며, 여기에 사용된 공통적인 물리수치들을 Table 2에 나타내었다.

Fig. 3은 Fig. 1에 나타난 실린더에 대하여, 실린더 반지름 방향 및 축 방향 탄성 변형을 함께 고려한 식 (5)를 사용한 계산 결과를 나타낸다. Fig. 3의 계산 결과로부터  $K_c$ 는 실린더 벽 두께 변화에 따라서는 크게 영향을 받지만, 0~10 MPa 사이의 압력 변화에 따른 영향은 매우 적음을 알 수 있다. 이 결과로부터, 식 (5)의 분자에 존재하는  $p_i$ 와 분모에 내재된  $p_i$  사이에 상쇄 효과가 작용하고 있음을 짐작할 수 있다. 그림에서 파선으로 나타낸 결과는  $(r_o - r_i) / r_i = 0.074$ 일 때의 결과이며, 이 수치는 Fig. 10에 나타난 2중관식(twin tube type) 자동차용 일반 유압감쇠기의 내부 실린더[그 단면 구조는 Fig. 10(b)와 같으며, 실린더 내경이 27 mm, 실린더 벽 두께는 1 mm]의  $(r_o - r_i) / r_i$  값과 일치한다. Fig. 3으로부터 자동차용

일반 유압감쇠기[예:  $(r_o - r_i) / r_i = 0.074$ ]의  $K_c$  계산치는 일반적인 석유계 작동유(gas free oil)의  $K_o$ 의 5배 정도의 값을 알 수 있다.

Fig. 4에는  $K_c$  [식 (5)]와  $K_{cl}$  [식 (6)] 사이의 편차를 나타내었다. 이 그림으로부터, 실린더 축 방향 변형의 고려 유[식 (5)] 및 무[식 (6)]에 따른 편차는  $(r_o - r_i) / r_i$ 가 0.1보다 작은 얇은 실린더일 경우에는 4% 이상으로 됨을 알 수 있다. 그림에서 ● 표시는  $(r_o - r_i) / r_i = 0.074$ 일 때의 계산 결과이며, 이 때의 편차는 4.6%이다. Fig. 4에서  $(r_o - r_i) / r_i$ 가 작을수록 식 (6)의 계산 오차가 큰 것은 식 (6)에 축 방향 변형의 영향이 고려되지 않았기 때문이며, 벽면 두께가 얇을수록 축 방향 변형의 영향이 더욱 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 5는  $K_c$  [식 (5)]와  $K_{e2}$  [식 (7)]사이의 편차를 나타낸 것이다. 그림에서 ● 표시는  $(r_o - r_i) / r_i = 0.074$ 일 때의 결과이며, 이 때의 오차는 -1% 정도이다. Fig. 5로부터, 식 (7)에 의한  $K_c$  계산치에는  $(r_o - r_i) / r_i$ 가 큰 값일 때는 큰 오차가 발생하지만  $(r_o - r_i) / r_i = 0.07$  부근에서 매우 정밀한 계산이 가능하며, 식 (6)을 사용할 때보다도 오히려 오차가 작아짐을 알 수 있다. 이러한 결과가 발생한 것은 식 (7)의 경우에는  $(r_o - r_i) / r_i$ 의 변화에 따라서 오차의 부호가 반전되는 점이 존재하며, 이 부호 반전 발생점이 마침  $(r_o - r_i) / r_i = 0.07$  부근이기 때문이다.

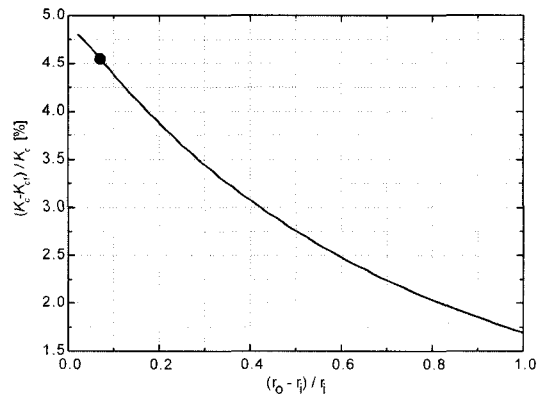


Fig. 4 Relative comparison of  $K_c$  [eq.(5)] and  $K_{cl}$  [eq.(6)] for the cylinder in Fig. 1 according to  $(r_o - r_i) / r_i$  variation, where  $p_i = 5 \text{ MPa}, 2r_i = 27 \text{ mm}$

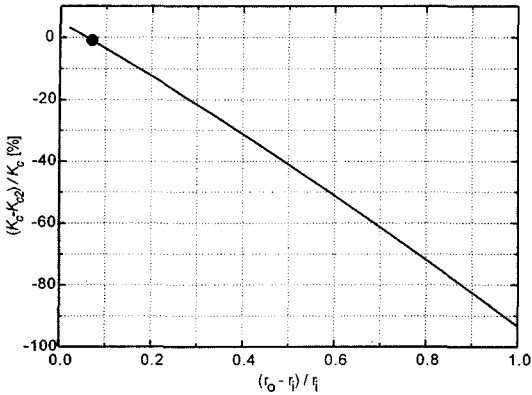


Fig. 5 Relative comparison of  $K_c$  [eq.(5)] and  $K_e$  [eq.(7)] for the cylinder in Fig. 1 according to  $(r_o - r_i)/r_i$  variation, where  $p_i = 5$  MPa,  $2r_i = 27$  mm

Fig. 6 및 Fig. 7은 감쇠기 실린더의 체적탄성계수가 기름의 유효 체적탄성계수에 미치는 영향을 조사하기 위하여 식 (1) ~ (4), 식 (5)[Fig. 6의 경우], 식 (6)[Fig. 7의 경우]을 사용하여 나타낸 그림들이다. 각 그림에서  $(r_o - r_i)/r_i \rightarrow \infty$  일 때의 선도는 작동유(gas free oil)의 체적탄성계수  $K_e$ 와 일치한다.

Fig. 6으로부터, 감쇠기 실린더 내 작동유(gas free oil)의 유효 체적탄성계수  $K_e$ 와 작동유 고유의 체적탄성계수  $K_o$  사이에는 실린더 벽 두께가 비교적 얇을 때에는 무시하기 어려운 차이가 발생함을 알 수 있으며, 일 예로서  $(r_o - r_i)/r_i = 0.074$ ,  $p_i = 5$  MPa 일 때에는  $K_e$ 는  $K_o$ 의 85.4% 임을 알 수 있다.

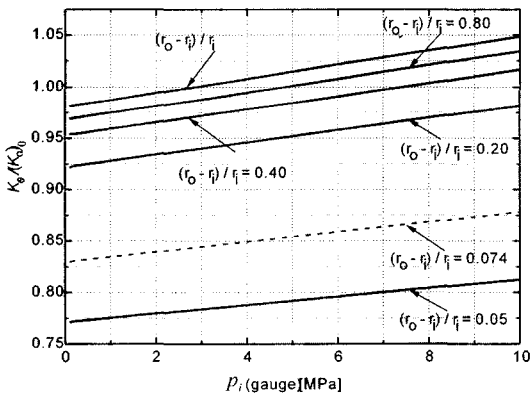


Fig. 6 Computed results of  $K_e / (K_o)_0$  for the cylinder in Fig. 1 according to  $p_i$  variation, where  $V_{g0}/V_c = 0\%$ , eq.(5) is used for  $K_c$  in eq. (1)

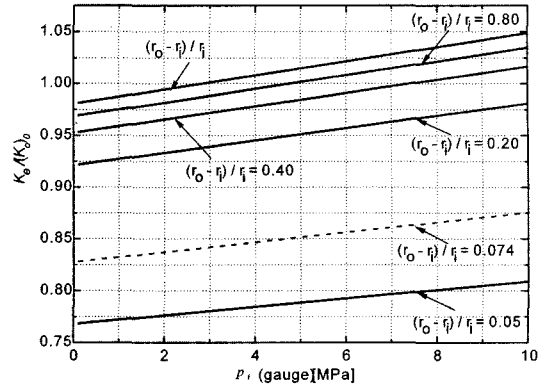


Fig. 7 Computed results of  $K_e / (K_o)_0$  for the cylinder in Fig. 1 according to  $p_i$  variation, where  $V_{g0}/V_c = 0\%$ , eq. (6) is used for  $K_c$  in eq. (1)

또한, Fig. 6 및 Fig. 7을 비교할 때, 실린더의 체적탄성계수 계산식 (5) 및 (6)의 차이에 따른  $K_e$ 의 차이는  $(r_o - r_i)/r_i = 0.074$ ,  $p_i = 5$  MPa 일 때 약 0.2%로서, 그 차이가 미소함이 밝혀졌다.

Fig. 8 및 9는 유리 기포(separated gas)가 포함된 감쇠기 실린더 속 기름의  $K_e$ 에 미치는  $K_c$ 의 영향을 조사하기 위하여, 식 (1) ~ (5)를 사용하여 계산한 결과를 나타낸 그림들이다. 이 그림들로부터, 실린더 내 압력이 저압영역 [ $V_{g0}/V_c = 0.5\%$ (Fig. 8)의 경우 1 MPa 이하,  $V_{g0}/V_c = 5\%$ (Fig. 9)의 경우 2 MPa 이하]에서는  $K_c$ 의 차이가  $K_e$ 에 미치는 영향이 미미한 것으로 나타났다. 그러나, 압력  $p_i$ 의 증가에 따

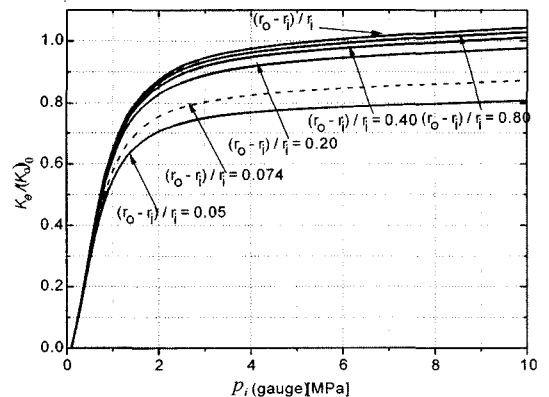


Fig. 8 Computed results of  $K_e / (K_o)_0$  for cylinder in Fig. 1 according to  $p_i$  variation, where  $V_{g0}/V_c = 0.5\%$ , eq. (5) is used for  $K_c$  in eq. (1)

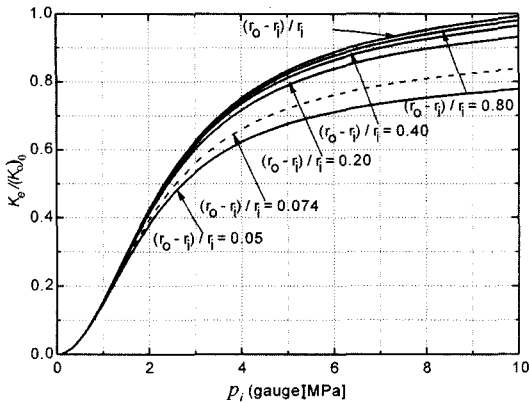


Fig. 9 Computed results of  $K_e/(K_0)_0$  for the cylinder in Fig. 1 according to  $p_i$  variation, where  $V_{s0}/V_c = 5\%$ , eq. (5) is used for  $K_c$  in eq. (1)

라  $K_c$  값의 차이가  $K_e$ 에 미치는 영향 또한 증가함을 알 수 있다. 예를 들어,  $V_{s0}/V_c = 0.5\%$  (Fig. 8),  $p_i = 5$  MPa,  $(r_o - r_i)/r_i = 0.074$  일 때의  $K_e/(K_0)_0$ 는  $K_{\infty}/(K_0)_0$  [Fig. 8에서  $(r_o - r_i)/r_i \rightarrow \infty$  일 때의  $K_e/(K_0)_0$  값]과 비교하여 약 15.5% 만큼 감소한다. 또한,  $V_{s0}/V_c = 5\%$  (Fig. 9),  $p_i = 5$  MPa,  $(r_o - r_i)/r_i = 0.074$  일 때의  $K_e/(K_0)_0$ 도  $K_{\infty}/(K_0)_0$  [Fig. 9에서  $(r_o - r_i)/r_i \rightarrow \infty$  일 때의  $K_e/(K_0)_0$  값]과 비교하여 약 11.1% 만큼 감소하게 된다.

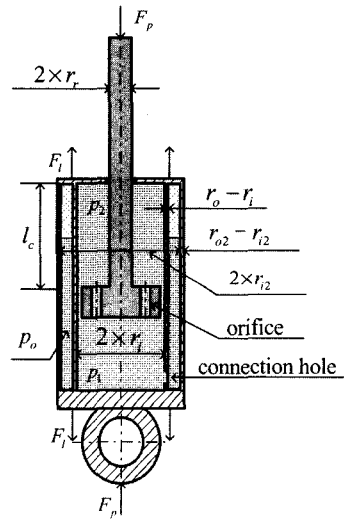
#### 4.2 자동차용 유압감쇠기에서 $K_e$ 에 미치는 $K_c$ 의 영향

자동차용 일반 유압감쇠기의 일 예인 Fig. 10의 2중관식(twin tube type) 감쇠기 내 작동유의 유효 체적탄성계수  $K_e$ 에 미치는 감쇠기 실린더 벽 탄성 변형의 영향을 조사하기로 한다. Fig. 10에 보인 일반 유압감쇠기란 스트럿형(strut type)이 아닌 유압 감쇠기를 의미하며, 스트럿형에 비하여 실린더 벽 두께가 0.8 ~ 1.0 mm 정도로 얇고, 스프링이 감쇠기에 직접 장착되지 않는 것이 특징이다.

실린더의 압축축 및 신장축 체임버의 체적탄성계수는 3.2절에서 설명한 방식으로 계산할 수 있다. 단, 이 경우에는 실린더 축 방향 응력을 나타낸 식 (8)은 아래의 식 (8')로 바뀌어야 한다.



(a) External view



(b) Sectional view

Fig. 10 A twin-tube type automotive hydraulic damper called as general (non-strut type) hydraulic damper

$$\sigma_l = \frac{F_l + p_2 \pi (r_i^2 - r_r^2)}{\pi [(r_o^2 - r_i^2) + (r_{o2}^2 - r_{i2}^2)]} \quad (8')$$

계산 예로서, 신장축 체임버의  $K_e/(K_0)_0$  계산 결과를 Fig. 11 및 12에 나타내었다. Fig. 11 및 12의 계산에 공통적으로 사용된 물리 수치들은 Table 3과 같다.

Table 3 Physical parameter values of the twin-tube cylinder

$2r_i$ : 27 mm, $2r_o$ : 29 mm, $2r_{i2}$ : 35 mm, $2r_{o2}$ : 37 mm,
$2r_r$ : 10 mm, $l_c = L/2$ , $V_{s0}/V_c$ : 0.5%, $F_f$ : 0 N,
$(K_0)_0$ , $E$ , $\nu$ , $L$ , $n$ , $T$ : the same values as those in table 2

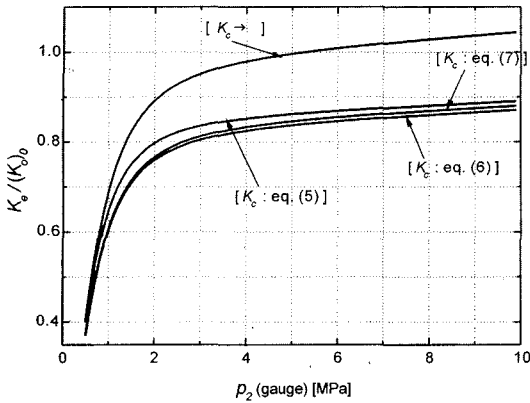


Fig. 11 Computed results of  $K_e/(K_d)_0$  for the cylinder in Fig. 10, where  $p_o = 0.5$  MPa, curves ①, ②, ③, and ④ were obtained by eq. (1) with eqs. (5), (6), (7) for  $K_c$  and  $K_c \rightarrow \infty$  respectively

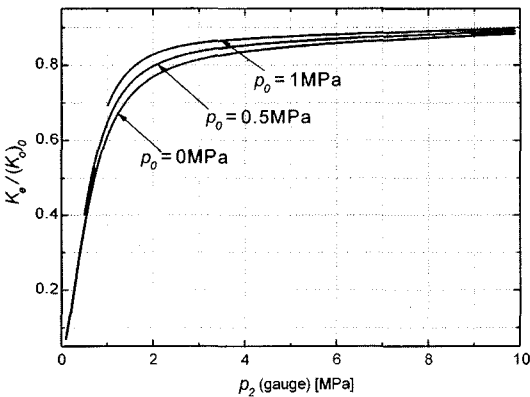


Fig. 12 Computed results of  $K_e/(K_d)_0$  for the cylinder in Fig. 10 under various  $p_o$  values, where eq. (5) was used for  $K_c$

Fig. 11은 식 (1) 속의  $K_c$  계산에 사용된 식들[식 (5), (6) 및 (7)]에 따른  $p_2 \sim K_e/(K_d)_0$  사이의 관계를 나타낸 것이며, 이 때  $p_o$ 는  $p_o = 0.5$  MPa로 고려하였다. Fig. 11에는  $K_c$  계산식의 차이에 따른  $K_e/(K_d)_0$ 의 차이가 명확하게 나타나 있다. 예로서,  $p_2 = 5$  MPa 일 때, 식 (1)과 식 (5)로부터 계산된  $K_e/(K_d)_0$  [그림에서 선도 ① 위의 일점]는 식 (1)과  $K_c \rightarrow \infty$ 의 조건으로부터 계산된  $K_e/(K_d)_0$  값 [그림에서 선도 ④ 위의 일점]의 86.2%로 나타났다. 또한,  $K_c$ 에 관한 식으로 식 (6) 및 (7)을 사용했을 때(그림에서 선도 ②

및 ③로 표시됨)의  $K_e/(K_d)_0$ 는 식 (5)를 사용했을 때에 비하여 더욱 작은 값으로 평가됨을 알 수 있다.

Fig. 12에는 2중관식 감쇠기의 외측 실린더 내 압력  $p_o$ 가 0, 0.5, 1MPa일 때의  $p_2 \sim K_e/(K_d)_0$  사이의 관계를 나타내었다. 이 그림에서 제시한 정도의 범위에서  $p_o$ 값이 변화할 때에는  $K_e/(K_d)_0$  값의 차이가 그다지 크지 않음을 알 수 있으며,  $p_o$ 의 차이가  $K_e/(K_d)_0$  값 계산 결과에 직접적으로 영향을 미치지 확인되었다.

### 4.3 고찰

이 연구에서는 식 (1)에서  $K_c$ 가  $K_e$ 에 미치는 영향을 보다 정확한 수식을 사용하여 정량적으로 평가하는 방법을 제공하는 데에 중점을 두었다.  $K_c$ 에 관한 보다 일반적인 형태의 식을 얻기 위한 탄성체 변형 해석 과정에서는 정밀도를 훼손할만한 특별한 가정이나 간략화가 전혀 없었으면서도 비교적 사용하기에 간편한 형태인 식 (5), (A13)~(A15)가 얻어졌다.

식 (5)와  $K_c$ 에 관한 종래의 방정식들 사이의 편차를 Fig. 4 및 5에서 정량적으로 평가하였으며, 이러한 결과는  $K_c$  계산식들[식 (5), (6) 및 (7)]의 사용을 위한 기준으로 활용될 수 있을 것이다.

Fig. 6 ~ 9에서는 다양한 두께 및 실린더 내 압력 하에서  $K_c$ 가  $K_e$ 에 미치는 영향을 정량적으로 조사하였으며,  $(r_o - r_i)/r_i = 0.074$ 부근에서는  $V_{d0}/V_c = 0\%$  일 때는 물론  $V_{d0}/V_c$ 가 0.5~5% 일 때에도  $K_e$ 에 미치는  $K_c$ 의 영향이 뚜렷이 나타남을 제시하였다.

마지막으로, 자동차용 유압감쇠기의 대표적인 예인 2중관식(twin tube type) 감쇠기(Fig. 10)에 대해서도 식 (5)를 쉽게 적용할 수 있으며, 2중관의 외측 공간 내 압력  $p_o$ 와 같은 세세한 물리인자까지도  $K_c$ 의 평가(중국어에는  $K_e$ 의 평가)에 어려움 없이 고려할 수 있음을 보였다.

이상의 계산결과들은 유압감쇠기의 동특성을 연구하는 자들에게 감쇠기 실린더의  $K_c$ 가 감쇠기 내 기름의  $K_e$ 에 미치는 영향을 정량적으로 파악할 수 있게 하는 기초 자료가 될 것으로 생각한다.



## 5. 결론

이 연구에서는 유압감쇠기 실린더의 체적탄성계수  $K_c$ 를 보다 정확하게 기술해주는 수학적 모델을 제시하였다. 이와 더불어,  $K_c$  모델의 차이가 유압감쇠기 내 기름의 체적탄성계수  $K_o$ 에 미치는 영향을 수치 계산을 통하여 정량적으로 나타내었다.

새로운  $K_c$ 의 모델은, 후벽 실린더에 축 방향 및 반지름 방향 탄성 변형 이론을 적용하여 구하였으며, 해석 과정에서 계산 정밀도를 훼손할만한 특별한 가정이나 간략화가 전혀 없었으면서도 비교적 간단한 형태의 수학적 모델인 식 (5), (A13)~(A15)로 구해졌다.

수치 계산에서는, 단순한 형태의 감쇠기(내부에 기름을 담은 원통형 실린더) 및 자동차용 2중관식 유압감쇠기를 대상으로 하여 실린더 벽의 탄성이  $K_o$ 에 미치는 영향 등을 조사하였다. 계산 결과로부터, 벽 두께가 비교적 얇은 감쇠기인 경우에는 실린더 벽면 탄성 변형의 고려 유·무에 따라서  $K_c$  값의 계산치에 상당한 차이가 발생할 수도 있음을 보였다.

또한 수치 계산 과정에서, 자동차용 유압감쇠기 가운데서도 비교적 복잡한 구조인 2중관식 감쇠기에 대해서도 이 연구에서 제안한  $K_c$  기술식들을 쉽게 적용할 수 있음을 보였다.

이 연구의 성과는 자동차용 유압감쇠기는 물론, 각종 산업용 유압 실린더의  $K_c$  평가에도 그대로 적용할 수 있다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: R05-2001-000-01156-0) 지원으로 수행되었으며, BK21 사업(2003년도 RA인력지원)에 의하여 일부 지원되었음.

## References

1) A. L. Audenino, G. Belingardi, "Modelling the Dynamic Behavior of a Motorcycle Damper," *Journal of Automobile Engineering, Part D*

- IMEchE, Vol.209, pp.249-262, 1995.
- 2) S. Cafferty, K. Worden, G. Tomlinson, "Characteristics of Automotive Shock Absorbers Using Random Excitation," *Journal of Automobile Engineering, Part D IMechE, Vol.209, pp.239-248, 1995.*
- 3) K. Lee, "Numerical Modelling for the Hydraulic Performance Prediction of Automotive Monotube Dampers," *Vehicle System Dynamics, Vol.28, pp.25-39, 1997.*
- 4) H. H. Lang, "A Study of the Characteristics of Automotive Hydraulic Dampers at High Stroking Frequency," Ph. D. Dissertation, University of Michigan, pp.22, 1997.
- 5) W. N. Patten, C. Mo, J. Kuehn, J. Lee, "A Primer on Design of Semiactive Vibration Absorbers (SAVA)," *Journal of Engineering Mechanics, pp.61-68, 1998.*
- 6) H. E. Merritt, *Hydraulic Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.14-18, 1967.
- 7) S. W. Duym, R. Stiens, G. V. Baron, K. G. Reybrouck, "Physical Modeling of the Hysteretic Behavior of Automotive Shock Absorbers," *SAE 970101, pp.125-137, 1997.*
- 8) S. Timoshenko, *Strength of Materials*, D. Van Nostrand Co., New York, pp.236-241, 1953.
- 9) J. Yu, Z. Chen, Y. Lu, "The Variation of Oil Effective Bulk Modulus with Pressure in Hydraulic Systems," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 116, pp.146-150, 1994.*
- 10) N. D. Manring, "The Effective Bulk Modulus with a Hydraulic Transmission," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.119, pp.462-466, 1997.*
- 11) B.-H. Cho, H.-W. Lee, J.-S. Oh, "Estimation Technique of Air Content in Automatic Transmission Fluid by Measuring Effective Bulk Modulus," *Int. J. Automotive Technology, Vol.3, No.2, pp.57-61, 2002.*
- 12) G. J. Van Wylen, R. E. Sonntag, *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.47-53, 1970.

## 부 록

### A1. 작동유(gas free oil)의 체적탄성계수

Klaus 및 O'Brien은 유압 작동유의 등은 할선(평균) 체적탄성계수[isothermal secant (average) bulk modulus]  $\overline{K}_o$ 의 압력 의존성에 대한 실험식 (A1)을 구하였다.<sup>a1)</sup> 식 (A1)은 모든 석유계 작동유에 대하여 성립하는 것으로 알려져 있다.<sup>a1, a2)</sup>

$$\overline{K}_o = [(\overline{K}_o)_0 + 5.3p]_T \quad (A1)$$

여기서  $\overline{K}_o$ 는 압력  $p$ (게이지 압력), 온도  $T$ 일 때의 작동유의 등은 할선 체적탄성계수이며,  $(\overline{K}_o)_0$ 는 압력  $p=0$ 에서의  $\overline{K}_o$ 이다.

또한,  $K_o = -V(\partial p / \partial V)_T$ 로 정의되는 등은 접선 체적탄성계수(isothermal tangent bulk modulus)  $K_o$ 와  $\overline{K}_o$  사이에는 다음의 관계가 성립한다.<sup>a1)</sup>

$$(K_o)_p \cong (\overline{K}_o)_{2p} \quad (A2)$$

여기서 첨자  $p$  및  $2p$ 는 압력이 각각  $p$  및  $2p$ 일 때임을 의미한다.

식 (A1)에 식 (A2)의 특성을 고려함으로써 다음 식이 구해진다.

$$K_o = [(\overline{K}_o)_0 + 10.6p]_T \quad (A3)$$

여기서  $K_o$ 는 압력  $p$ , 온도  $T$ 일 때의 작동유의 등은 접선 체적탄성계수이다.

식 (A3)에 포함된  $(\overline{K}_o)_0$ 는  $p=0$ 에서는  $(\overline{K}_o)_0 = (K_o)_0$ 로 볼 수 있으므로, 이 논문에서는 식 (A3)를 간단히 식 (A4)와 같이 표시하기로 한다.

$$K_o = (K_o)_0 + 10.6p \quad (A4)$$

식 (A4)에 포함된  $(K_o)_0$ 값을 알면, 등은 하에서 압력 변화에 따른  $K_o$ 의 변화를 식 (A4)로부터 쉽게 구할 수 있다.<sup>a3)</sup>

### A2. 후벽 실린더의 체적탄성계수 $K_c$

Fig. 1에 나타낸 양 끝이 폐쇄된 원통형 실린더의 체적탄성계수는 실린더 외부의 압력  $p_o$ 가 일정할 때에는 아래와 같다.

$$K_c = \frac{\Delta p_i}{\Delta V_o / V_c} \quad (A5)$$

여기서  $V_c$ 는 실린더 내 초기 체적,  $\Delta p_i$  및  $\Delta V_c$ 는 실린더 내 압력 변화 및 체적변화를 나타낸다.

Fig. 1 실린더 내 외의 압력변화로 인한 실린더 내 반지름의 변화는 실린더 축 방향의 위치와는 무관하다고 가정하면  $\Delta V_o / V_c$ 는 다음 식으로 표시된다.

$$\Delta V_o / V_c = (\epsilon_n^2 + 2\epsilon_n)(1 + \epsilon_l) + \epsilon_l \quad (A6)$$

여기서,  $\epsilon_l$ 은 실린더 벽 내 임의의 점에서의 축 방향 변형율,  $\epsilon_n$ 은  $r=r_i$ (Fig. A1)에서 접선 방향 변형율( $d\delta_r / dr$ ,  $\delta_r$ : 반지름 방향 변위)이다.

식 (5)에서  $\Delta V_c$ 를 실린더 내축 압력  $\Delta p_i$ 가  $0 \rightarrow p_i$ 로 변화할 동안의 실린더 내부 체적변화로 고려하고, 식 (A6)를 식 (A5)에 대입함으로써  $K_c$ 에 관한 다음 식을 얻는다.

$$K_c = \frac{p_i}{(\epsilon_n^2 + 2\epsilon_n)(1 + \epsilon_l) + \epsilon_l} \quad (A7)$$

식 (A7)를 사용하여  $K_c$ 를 계산하려면 실린더의  $\epsilon_l$  및  $\epsilon_n$ 를 구해야 하며, 아래에서는 후벽 실린더에서의  $\epsilon_l$  및  $\epsilon_n$ 의 계산식을 제안한다.

Timoshenko는 그의 저서<sup>a4)</sup>에서 실린더 축 방향 응력  $\sigma_l$ 이 0인 경우, 즉 평면 응력 문제의 하나(one of plane stress problem)에서 후벽 실린더의 반지름 방향 응력  $\sigma_r$ , 접선 방향 응력  $\sigma_t$  및 반지름 방향 변위  $\delta_r$  등을 구하는 식을 제시하였다. 한편, Higdon 등<sup>a5)</sup>은  $\sigma_l$ 이 축 방향 거리 변화에 무관한 값으로 주어지는 경우(이것도 평면 응력 문제의 하나임)에는 Timoshenko의 전개 과정<sup>a4)</sup>에 일반화 Hook의 법칙을 도입함으로써 축 방향 변형율  $\epsilon_l$ , 접선 방향 변형율  $\epsilon_t$  등을 구할 수 있음을 언급하고 있다. 저자들은 Higdon 등의 제안에 따라서, Fig. 1에 나타낸 실린더의  $\epsilon_l$  및  $\epsilon_n$ 를 구하기로 한다.

Fig. 1의 실린더를 후벽 실린더로 고려하여, 실린더 축에 대하여 수직인 링 모양의 절단부를 나타내면 Fig. A1과 같다. Fig. A1의 미소 요소  $mnm_1n_1$ 에 대한 응력 선도를 Fig. A2에 나타내었다.

Fig. A2의 선도에서는 축 방향 응력  $\sigma_l$ 의 생략이

가능하며( $\sigma_r$ 이 0이 아닌 경우에도 생략 가능), 그 이유는  $\sigma_r$ 이 반지름 방향 및 접선 방향의 힘 평형에는 영향을 미치지 않기 때문이다.<sup>a5)</sup> Fig. A2의 미소 관벽 요소의 중심각  $d\theta$ 의 2등분선 방향으로 힘의 평형 방정식을 세우고, 간략화함으로써 다음 식을 얻는다.

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (A8)$$

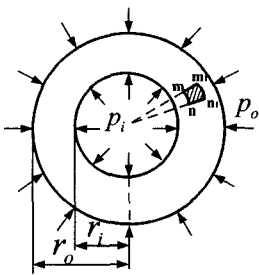


Fig. A1

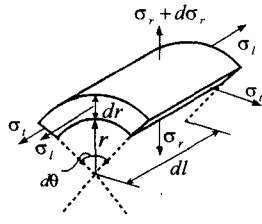


Fig. A2

한편, 후벽 실린더에서 실린더 벽 내부 임의의 점에서의 축 방향 변형을  $\epsilon_l$  및 반지름 방향 변형을  $\epsilon_r$ 는 일반화 Hook의 법칙에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$\epsilon_r = (\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_l)) / E \quad (A9)$$

$$\epsilon_l = (\sigma_l - \nu(\sigma_r + \sigma_t)) / E \quad (A10)$$

식 (A9)에서의  $\epsilon_r$  및  $\sigma_r$ 이 축 방향 거리  $l$ 의 함수가 아닌 경우, 즉  $\partial \epsilon_r / \partial l = 0$ ,  $\partial \sigma_r / \partial l = 0$ 이라는 조건이 성립될 때, 식 (A8)의 해인  $\sigma_r$  및  $\sigma_t$ 는 다음 식으로 표시된다.<sup>a5)</sup>

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{r_o^2 r_i^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (A11)$$

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{r_o^2 r_i^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (A12)$$

여기서  $r_i$  및  $r_o$ 는 실린더의 내 반지름 및 외 반지름,  $p_i$  및  $p_o$ 는 실린더 내측 및 외측의 압력을 나타낸다.

식 (A11) 및 (A12)는 축 방향 응력  $\sigma_l = 0$ 의 가정 아래 유도된 Timoshenko의 식 a4)과 일치하며, 그 이유는 앞에서 언급한 바와 같이  $\sigma_l$ 이  $\sigma_r$  및  $\sigma_t$ 에 영향을 미치지 않기 때문이다.

축 방향 변형을  $\epsilon_l$  및  $r = r_i$ 에서의 접선 방향 변형을  $\epsilon_{\theta}$ 는 식 (A11) 및 (A12)를 식 (A9) 및 (A10)에 대입함으로써 아래와 같이 구해진다.

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{2\nu(r_i^2 p_i - r_o^2 p_o)}{E(r_o^2 - r_i^2)} \quad (A13)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{(r_o^2 + r_i^2) p_i - 2r_o^2 p_o}{E(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{\nu}{E} p_i - \frac{\nu}{E} \sigma_l \quad (A14)$$

마지막으로, 식 (A13) 및 (A14)에 포함된  $\sigma_l$ 은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\sigma_l = \frac{F_l + p_i \pi r_i^2}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} \quad (A15)$$

여기서  $F_l$ 은 실린더 벽면의 축 방향으로 작용하는 외력이다.

### References for Appendix

- a1) E. E. Klaus, J. A. O'Brien, "Precise Measurement and Prediction of Bulk-Modulus Values of Fluids and Lubricants," Journal of Basic Engineering, Trans. of ASME, Vol.86, pp.469-474. 1964.
- a2) V. Hopkins, D. R. Wilson, C. Bolze, "Isothermal Bulk Modulus of Selected Fluids to 700 °F and 10000 psig," Journal of Basic Engineering, Transaction of ASME, Vol.86, pp.463-468, 1964.
- a3) H. E. Merritt, Hydraulic Control Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.14-18, 1967.
- a4) S. Timoshenko, Strength of Materials, D. Van Nostrand Co., New York, pp.236-241, 1953.
- a5) A. Higdon, E. H. Ohlsen, W. B. Stiles, J. A. Weese, W. F. Riley, Mechanics of Materials, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.167-172, 1986.