韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004. 8. 제 43권, 제 3호, 275-289.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2004, Vol. 43, No. 3, 275-289.

넓이관련 열린 문제에 관한 문제해결 과정 분석

김 민 경 (이화여자대학교)

I. 시작하는 말

최근 7차 교육과정의 개정과 함께 창의적인 인간 육성을 위해 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기를 것을 요구하고 있다. 이와 관련하여 우리나라 수학교육의 나아가야 할 방향 모색에서 논의되고 있는 내용 중 많은 학습자들이 짧은 시간에 정형화되어 있는 문제를 기계적으로 정확하게 푸는 데는 잘 훈련이 되어 있지만 생활과 관련한 상황에서 주어지는 문제에 대한 해결능력은 높지 못하다는 우려(한국교육과정평가원, 2000)는 계속되고 있다.

이러한 현상은 결국 Brousseau의 교수학적 상황론이나 Freudenthal의 수학화의 교육적 가치를 다시금 검토하게 되었다. 암기와 훈련으로 길들어진 우리나라 학생들이 이제는 수학적 개념에 대한 이해에 바탕을 두고 여러 가지 다양한 정보 속에서 학습자에게 의미 있는 상황 문제에 대한 적절한 문제해결력이 형성됨으로써 살아있는 수학적 힘내지는 수학적 소양이 배양되어야 함을 의미한다. 수학 학습을 위한 상황문제의 설정 및 그 활용에 관한 장혜원(2002)의 연구에서도 지적되었듯이 억지로 꾸며낸 문장제의 피상적인 상황이 아니라 학생들의 수준에 가능한 매우 적합한 상황 제시가 교사들에게 매우 중요한 사안이라고 볼 수 있다.

이처럼 미래사회에서 요구되어지는 사회구성원의 능력으로서 유용한 정보를 판별하고 활용하며, 다양한 정보로부터 통합적인 지식을 즉각적으로 생성해 내며, 직면하게 되는 다양한 문제상황에 대한 적절한 문제해결력이 요구되고 있다. 하지만 우리나라의 경우 기계적인 연산과 훈련에 익숙해 있는 교수-학습 환경에서 다양한 사고와 시간을 요하는 문제해결에 있어서 이를 활용하는 범위 및 인식에 있어 국소적으로 다루어졌다(교육부, 1997). 이에 본 고에서는 문제해결 및 넓이지도에 관한 고찰과 함께, 초등수준에서 넓이에 관한 열린 문제에 대해 예비초등교사 및 초등학생 스스로 나타내는 문제해결 방법을 알아보고 이를 분석함으로써 학습자나 교수자에게 보다 의미있는 문제해결력 신장 방안을 모색하고자 한다.

II. 문제해결에 관한 이해

1. 문제해결에 관한 고찰

21세기 지식기반정보사회를 맞이한 사회구성원은 시시각각으로 변하는 사회의 변화를 경험하며 그러한 변화에 적극적으로 대응해야 할 필요성을 요구받지만 우리의 교육 현실은 그렇지 못한 것이 사실이다. 그런데 이러한 현상은 요사이 이 사회에서 요구되어지는 주요한 능력으로 간주되는 문제대처능력 또는 문제해결력의 부재로 설명될 수 있다. 여기서 언급되는 문제해결에 대한 정의에 관하여, Gagné(1985)는 이미 배운 원리를 응용하여 여러 가지 문제상황에서 당면한 문제들에 대한 해결방안의 발견으로, Ausubel(1968)은 이전에 배운 규칙을 조합하는 방법을 발견하고 새로운 문제상황에 적용하는 것을 알아가는 과정으로 설명하고 있다. 또한 Krulik과 Rudnick(1987)은 '하나의 과정이고 그것은 한 개인이 낯선 문제 상황이 요구하고 있는 것을 만족시키기 위하여 이전에 획득한 지식, 기능, 그리고 이해를 이용하기 위한 수단'이라고 정의하면서 학생은 이전에 배웠던 것을 종합하며 그것을 새롭고 다른 상황에 적용할 수 있어야 함을 주장하고 있다.

* 2003년 4월 투고, 2004년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 넓이, 열린 문제, 문제해결

문제해결에서의 '문제'는 해결하려고 하는 노력을 하는 가운데 단순히 공식을 이용한다거나 하여 쉽게 풀어낼 수 있는 것이 아니라 해결방법이 구체적이고 확실하지 않은 수준의 문제를 말한다. 이러한 문제해결력에 관한 관심은 사회 전반에 걸쳐 그 중요성을 인정하여 왔으며 수학교과뿐 아니라 전반적인 교육현장에서 오래 전부터 주요목표가 되어 왔다. 미국에서는 NCTM(1989)의 '1980년대의 학교수학을 위한 제언' 및 교육과정 · 평가에 관한 규준에서 문제해결을 주요한 요소로 제시한 바 있다. 우리나라에서도 수학과 7차 교육과정에서 수학 학습을 통하여 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하는 능력을 길러 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기를 것을 강조하고 있다(교육부, 1997).

특히 문제해결에서의 의사소통을 강조한 Erickson (1999)은 주어진 수학 과제에 대해 학생들은 해결을 위한 전략을 탐색하기 위해 추론과 문제해결 기술을 이용하며, 문제에 내포된 수학을 개념적으로 이해하며, 해결하기 위한 방안들을 효과적으로 의사소통할 수 있게 하여야 한다고 언급하였다. 이를 가능하게 하는 교수-학습 절차는 다음과 같다(p.518).

(1) 교사는 부여할 과제를 계획하고 학생에게 안내된 발견으로부터 개방형 탐구까지 그들에게 가능한 문제깊이 정도를 결정한다.
(2) 대단위 학급에서 문제를 제시하며 최종적으로 요구되어지는 산출물 및 기대수준을 제시한다.
(3) 교사는 개인별, 소집단별, 혹은 대집단별 과제를 수행하도록 환경을 제공하며 직접적인 해결 전략보다는 이미 계획된 주요 발문과 유용한 힌트, 반례 제시 등을 이용한다.
(4) 문제를 해결해 나가기 위한 절차에 관한 그들의 아이디어에 대해 대집단 토론을 유도한다.
(5) 학생들로 하여금 다양한 해결 방안을 찾도록 권유하며 그들이 언급하는 해결방안들을 채택하고 제거해 나가는 이유에 대해 정당성을 논의하도록 유도한다.
(6) 전체 토의와 합의를 통해 도출한 결과를 정립하고 문제해결의 중요한 역할을 한 내용들을 정리한다.
(7) 도달한 문제해결 전략에 관한 이해를 돕기 위해 학생들 스스로 연습할 기회를 갖도록 한다.
(8) 앞으로의 수학적 탐구를 위한 의미있는 문제상황에서 학생들이 새로운 지식을 응용할 수 있도록 격려한다.

문제해결 단계, 과정 및 전략에 있어서는 여러 학자들이 규명하고자 애썼는데, 대표적으로는 수학적 문제해결의 사고 과정을 문제의 이해, 풀이계획의 수립, 풀이계획의 실행, 그리고 풀이에 대한 반성의 4단계로 제시한 Polya(1957) 및 관련연구(방승진 · 이상원 · 황동주, 2001), 분석-탐구-실행-검증 단계로 구분하여 제시한 Schoenfeld(1985), 그리고 도입-활동-검토-확장 단계로 구분한 Burton(1984) 등이 있다. 이와 관련하여 특히 문제해결 전략에 관해 Lenchner(1983)는 다음과 같이 제시하였다.

· 그림이나 도표 그리기
· 규칙성 찾기
· 체계적인 목록 만들기
· 표 만들기
· 문제를 단순화하기
· 추측하고 점검하기
· 실험해 보기
· 실제로 해보기
· 거꾸로 풀기
· 식 세우기
· 논리적으로 추론하기
· 관점을 바꾸어 보기

2. 교육과정상에서의 문제해결 지도

7차 수학과 교육과정에서의 교수-학습 방법은 문제해결력 신장을 위한 다양한 교수-학습 방법을 강조하였다. 구체적으로 문제해결 교육의 목적은 문제해결 과정이나 국소적 전략 등의 숙달이 아니라 수학 내용을 문제해결 방식을 통하여 문제해결 정신에 입각하여 교수-학습하고자 한다(교육부, 1998)고 제시되어 있다.

우리나라 6차 및 7차 교육과정에서 문제해결 지도를 위하여 여러 단원이 구성되었다. 6차 교육과정에서는 매학기 여러 가지 문제가 두 단원씩으로 구성되어 첫 단원에서는 주로 수학적 문제 상황에 대한 해결 능력을 기르기 위한 문장제를 다루었으며 두 번째 단원에서는 좀더

수준 높은 사고력을 요하는 문제, 비정형문제 등을 다루었다. 이후 7차 교육과정에서는 여러 가지 현실적인 상황으로부터 문제를 해결하는 활동을 강화하였으며 경우에 따라서는 답이 다양하게 나올 수 있는 열린 문제를 통하여 발전적인 사고를 기르도록 구성하였다(김재복·이경환,·허경철, 1999)고 설명하고 있다. 문제해결에 관하여는 각 단원에 포함된 '문제를 해결하여 봅시다' 내용이 있으며 문제해결에 관한 주요 관련 내용은 '문자와 식' 영역에서 '문제해결 방법'과 '문제 만들기(2-가 단계에서만 상용됨)'를 따로 두어 주로 이 부분에서 다양한 문제해결 전략을 경험하도록 하고 있다. 6차와 7차의 문제해결에 관한 지도내용은 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 6차와 7차 교육과정에서 문제해결에 관한 지도 내용

학년	6차 교육과정	단계	7차 교육과정
1	·문제 상황을 보고 식 만들기 ·식보고 문제 상황 말하기	1-나	·실제로 해보기 ·그림그리기 ·식만들기
2	·문제보고 식 만들기 ·식보고 문제 만들기 ·간단한 적용 문제 풀기	2-가	·식에 알맞은 문제 만들기
		2-나	·표만들기 ·거꾸로 풀기
3	·식보고 문제 만들기 ·생활 경험과 관련된 문장제 해결하기 ·간단한 적용 문제 풀기 ·문제를 단순화하여 풀기	3-나	·규칙찾기 ·예상과 확인하기 ·문제해결 과정 설명하기
4	·혼합계산이 적용된 식과 문제 만들기 ·과정 문제 풀기 ·실생활 적용 문제 풀기 ·게임과 퍼즐 풀기	4-가	·다양한 문제를 단순화하기 ·문제해결 과정 설명하기
		4-나	·다양한 문제를 적절한 방법을 선택하여 해결하기 ·문제해결 과정 설명하기
5	·문제해결의 구체적 방법 알기 ·다양한 문제 풀기 ·게임과 퍼즐 풀기	5-가	·다양한 문제를 적절한 방법을 선택하여 해결하기 ·문제해결 과정 설명하기
		5-나	·문제해결의 여러 방법을 비교하여 적절한 방법을 선택하기 ·문제해결 과정에 대하여 그 타당성을 검토하기
6	·문제해결의 다양한 방법을 모색하고 풀기 ·문제해결 방법에 관한 논의 및 검토하기 ·게임과 퍼즐 풀기	6-가	·문제해결의 여러 방법을 비교하여 적절한 방법을 선택하기 ·문제해결 과정을 정리하고 그 타당성을 설명하기
		6-나	·문제해결의 여러 방법을 비교하여 문제상황에 적절한 방법을 선택하기 ·문제해결 과정을 정리하고 그 타당성을 설명하기

6차에 비해 7차 교육과정에서는 거꾸로 풀기, 규칙찾기, 예상하고 확인하기 등의 문제해결전략을 구체적으로 제시, 적용하도록 하고 있다. 그러나 '실생활 경험' 및 실생활 맥락을 바탕으로 한 문제상황은 매우 제한적으로 제시되고 있으며 김경자 · 정미화 · 손지원(2002)의 연구에서도 지적하였듯이 인위적인 소재들이 중심이 된 문제들로 제시되었다. 실제 교과서에서 제시되고 있는 문제 푸는 방법이란 거의 모든 단원에서 문제해결 과정과 사고의 과정을 순차적으로 매우 자세히 제시, 안내하고 있다. 이는 수학교육의 목적 중 하나인, 학습자로 하여금 다양한 문제해결 전략을 이끌어내는가 하는 점에서 적지 않은 의구심과 제한점을 드러내고 있다고 하겠다.

다음은 교과서 4-나 단계에서 제시된 <생활에서 알아보기>(109쪽)의 예이다.

문제: 강강술래를 하기 위해 사람들이 일정한 간격으로 둘러서서 원 모양을 만들었다. 셋째 번 사람은 열째 번 사람과 마주 보고 있습니다. 원 모양으로 둘러선 사람은 모두 몇 명인지 알아보기

활동: 강강술래를 하는 사람의 수를 다음과 같이 생각하여 구한다.

-사람들이 어떤 방법으로 서 있는지 그림을 그려 알아보기

-열째 번 사람은 몇째 번 사람과 마주 보고 있는가

-셋째 번 사람과 열째 번 사람 사이에는 몇 사람이 서 있는지, 원 위에 표시하기

-셋째 번 사람과 열째 번 사이에 서 있는 사람의 수와 이들과 마주 보고 있는 사람의 수는 같다고 생각하는가?

-강강술래를 하기 위해 둘러선 사람은 모두 몇 명이라고 생각하는가?

-왜 그렇게 생각하는가?

-만일, 셋째 번 사람과 열한째 번 사람이 마주 보고 있다면, 강강술래를 하기 위해 둘러선 사람은 모두 몇 명인가?

이 활동의 예에서 볼 수 있듯이 문제를 푸는 과정을 교과서에서 각각 단계를 자세히 제시하면서 '다음과 같이 생각하여 구하'라는 표현을 쓰며 전개하고 있다. 하지만 이러한 방법보다는 이 문제상황에 대한 다양한 풀이 전략을 학습자가 먼저 생각해 보도록 시간과 기회를 준 이후에 학습자들이 그들의 푼 방법과 교과서에서 제시된 방법과 서로 비교하면서 각자에게 적합한 방법으로 문제해결을 하게끔 고려되어야 할 것이다.

III. 초등수학에서의 넓이 지도

1. 교과서에서 제시된 넓이 지도 내용

초등수학에서 넓이지도는 5-가 단계에서 넓이에 관한 의미를 이해하면서 시작된다. 그러면서 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 지도에 이어 5-나 단계에서는 점차로 사다리꼴과 마름모의 넓이 지도로 확장한다. 이는 대부분이 삼각형, 사각형과 같은 다각형을 기본으로 한 넓이 측정이다. 그 이후에는 6-나 단계에서 다각형이 아닌 형태의 원의 넓이를 측정하는 내용이 소개된다. 다음은 각 단계별 도형의 넓이관련 학습 목표 및 지도 내용이다.

<5-가 단계>

목표: 삼각형과 사각형의 둘레와 넓이를 구할 수 있고, 이를 생활에 활용할 수 있다.

<u>측정 영역에서 넓이</u>

- 넓이를 이해하고 넓이의 단위를 안다.
- 넓이를 측정하여 넓이 단위로 말할 수 있다.
- 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

<5-나 단계>

목표: 넓이에 관한 여러 가지 단위를 이해하고, 사다리꼴과 마름모의 넓이를 구할 수 있다.

<u>측정 영역에서의 여러 가지 도형의 넓이</u>

- 사다리꼴과 마름모의 넓이를 구할 수 있다.

<6-나 단계>

목표: 원의 넓이와 원기둥의 겉넓이를 구할 수 있다.

<u>측정 영역에서 원의 넓이</u>

- 원의 넓이를 구할 수 있다.

· 원기둥의 겉넓이를 구할 수 있다.
-지도상의 유의점: 원의 넓이는 구체적인 조작 활동을 통하여 여러 가지 방법으로 구하도록 지도한다.

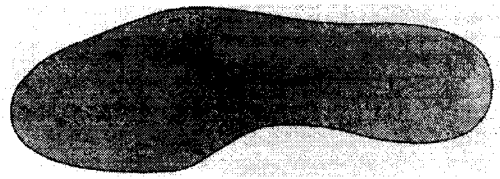
6-나 단계에서 원의 넓이를 구하는 방법으로 (반지름)×(반지름)×3.14로 이해되기까지 모눈종이 위에 그려진 원의 넓이를 구하면서 원 안의 색칠된 정사각형의 개수와 원 밖의 선까지의 정사각형의 개수를 구하도록 유도하고 있다. 이는 학생들로 하여금 이전에 다각형의 넓이를 구하는 방법에 익숙해 있던 학생들이 생각을 바꾸어 다각형이 아니고 곡선으로 된 모양의 넓이를 어떠한 방식으로 구할 수 있을지 사고할 수 있는 기회를 주기보다는 주어진 그림을 보고 원의 넓이를 구하는 방법을 단계적으로 알아보게 하고 있다. 이는 학생들이 생활에서 접하는 많은 상황에서 다각형으로 만들어진 상황도 있지만 다각형으로 그려지지 않은 상황도 많이 있다는 인식을 할 수 있도록 교사는 도와주어야 할 것이다.

7차 교육과정의 측정 영역에서 통합적인 사고 활동을 요구하도록 의도하고 있으며 복합도형의 넓이 지도(김재복·이경환·허경철, 1999)가 필요하다고 언급하고 있다. 또한 여러 가지 모양의 도형의 넓이를 구하는 것이 단순한 계산 문제가 되어서는 안 되고 학생들 스스로 측정 방법을 생각해 내야한다는 점을 강조하고 있다. 하지만 위에서 언급하였듯이 학생들 스스로 단순한지 않은, 정형화되어 있는 문제에 대해 다양한 측정 방법을 생각해 내도록 하는 데에는 어려움이 있다고 본다. 또한 넓이 개념과 관련한 문제해결에 있어서 7차 교육과정에서 문제해결 방법지도에 관한 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 넓이와 관련한 문제는 하나도 제시되지 않았다. 다만 '잘 공부했는지 알아보기'에서 다음과 같은 관련 문제가 제시된 정도이다.

> 연못 위에 1㎡만큼 덮여 있던 어떤 식물이 하루가 지나면 넓이가 2배가 됩니다. 8일째가 되어 연못을 완전히 덮었다면, 연못의 $\frac{1}{4}$ 을 덮은 날은 몇째 입니까?

2. 넓이 관련 열린 문제의 활용

우리가 살고 있는 주변 환경에서 대부분의 물체의 면적은 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴 등의 다각형의 넓이 공식에 의해 구해지지 않는 경우도 많이 있다. 예를 들어, 생물학자나 환경학 학자들은 나무들이 배출하는 산소의 양을 측정하기 위해 나무에 떨어진 낙엽들의 초 표면적을 구하고자 할 때가 있다. 이와 같이 직선으로 둘러싸이지 않고 곡선의 모양을 포함하고 있는 물체의 넓이를 구하고자 한다면 어떠한 방법이 사용될 수 있는지 학습자들의 다양한 문제해결 및 사고과정을 이끌어 낼 수 있을 것이다. 이와 유사한 문제로는 다음과 같은 발자국(<그림 1>)의 넓이를 구하는 문제를 이용하여 문제해결 과정의 다양한 방법을 생각해 볼 수 있다 (Bassarear, 1997).



<그림 1> 발자국 모양

이 문제와 관련한 해결방법으로 논의될 수 있는 방법으로 다음과 같은 다양한 방법을 들 수 있다

■ 방법1: 가장 단순한 전략으로서 모눈종이를 이용하여 발자국을 포함하고 있는 정사각형의 개수를 센다. 이때, 정사각형 조각을 완전히 채우지 못하는 부분에 대해 어떻게 처리할 것인지에 대해 생각해 보게 한다.
■ 방법2: 방법1의 발전된 형태로서 발자국을 채우고 있는 정사각형의 개수와 함께 정사각형 조각을 완전히 채우지 못하는 부분을 직사각형이나 삼각형으로 표시, 그 부분의 넓이를 구한다.
■ 방법3: 방법2에서 정사각형 조각을 완전히 채우지 못하는 부분을 직사각형이나 삼각형으로 표시하였던 것을 사다리꼴로 표시함으로써 계산을 좀더 간편하게 할 수 있다.
■ 방법4: 두꺼운 하드보드지 위에 주어진 발자국의 모

양을 그려 본을 뜬 후 모양대로 자른다. 한편 다른 하드보드지위에 직사각형의 본을 그린 후 모양대로 자른다. 그 다음 두 개로 잘라낸 하드보드지의 무게를 각각 잰다. 이 두 개의 무게와 넓이의 비를 이용하여 다음과 같은 방법을 이용하여 구하고자 하는 발자국의 넓이를 계산한다.

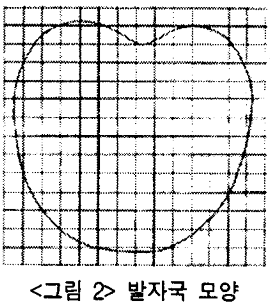
$$\frac{\text{발자국의넓이}}{\text{직사각형의넓이}} = \frac{\text{발자국의무게}}{\text{직사각형의무게}}$$

위와 같은 열린 문제의 제시를 통해 등장할 수 있는 이러한 다양한 문제해결 방법들은 공식의 적용에 익숙해 있는 학습자들에게 수학적 개념의 이해뿐 아니라 주어진 문제상황에 대한 다양한 방법을 경험할 수 있게 할 수 있다고 본다.

IV. 넓이관련 열린 문제해결 지도에 관한 수업사례 분석

1. 초등학교 5학년 수업사례

위의 <그림 1>과 같은 발자국 모양의 넓이를 측정하는 열린 문제를 재구성하여 초등학교 5학년 38명을 대상으로 한 수업에서 다음과 같이 생긴 <그림 2>의 발자국 그림을 제시하며 그림 부분의 넓이를 구하게 하였다.



<그림 2> 발자국 모양

그 결과 다음과 같이 다양한 문제해결 방법을 이용하여 문제를 풀었다.

■ 방법1: 발자국 안쪽의 완전한 정사각형의 넓이만 구한다.

■ 방법2: 발자국이 속한 모든 칸을 세어 넓이를 구한다.

■ 방법3: 완전한 정사각형을 먼저 모두 센 후 나머지 조각들을 모두 더해 2로 나눈 것을 더한다.

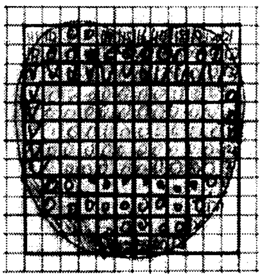
■ 방법4: 발자국을 모두 직선으로 만든 후 사각형과 삼각형의 합으로 바꾸어 구한다.

■ 방법5: 먼저 완전한 정사각형의 넓이를 구하고 나머지 조각들은 모눈종이를 대어 넓이를 구한다. 이때 둥근 부분이 있고 없는 경우는 서로 부치면서 조정한다.

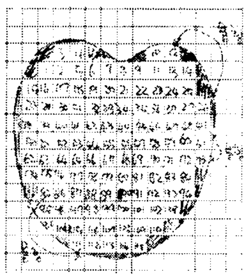
■ 방법6: 먼저 완전한 정사각형의 넓이를 구한 후 나머지 조각들끼리 끼워 맞춰 완전한 정사각형을 모눈종이(0.01㎠)에 만들어가면서 넓이를 구한다.

이 밖에 문제풀이에 전혀 성의를 나타내지 않은 학생들도 있었는데 이 경우가 나왔는데 이 경우는 기타로 처리하였다. 문제해결 방법은 주로 문제해결 방법의 수학적 논리성과 넓이에 대한 아동의 이해력을 중심으로 그 분석이 이루어졌다.

38명의 학생의 사용한 방법으로는 방법2와 방법6을 가장 많이 사용한 것으로 나타났다. 방법2인 '발자국이 속한 모든 칸을 세어 넓이를 구한다'라는 전략을 많이 사용하였는데 이는 학생들이 완전하게 다각형이 아닌 도형인 경우에도 다각형의 넓이를 구하는 방법을 쓰고 있음을 알 수 있다(<그림 3> 참조). 또한 방법5와 방법6(<그림 4> 참조)과 같은 전략은 정사각형과 같은 모양이 아닌, 곡선의 모양을 포함하는 부분들을 대략적으로 단위 넓이를 의미하는 양만큼을 채우려는 노력을 나타내고 있다.



<그림 3> 방법2의 예



<그림 4> 방법5의 예

또한 '먼저 완전한 정사각형의 넓이를 구한 후 나머지 조각들끼리 끼워 맞춰 완전한 정사각형을 만들어가면

서 넓이를 구한다'는 방법6인 경우는 넓이를 구하기 위해서는 단위넓이를 완전히 채우고자 하는 노력이 돋보인다고 하겠다. '완전한 정사각형을 먼저 모두 센 후 나머지 조각들을 모두 더해 2로 나눈 것을 더한다'는 방법3과 '발자국을 모두 직선으로 만든 후 사각형과 삼각형의 합으로 바꾸어 구한다'는 방법4는 완전히 채워지지 않는 부분의 넓이를 조정하기 위하여 삼각형의 넓이로 변형하여 구하는 방법도 나타났다. 결과적으로는 초등학교 학생들이 다각형의 넓이를 구하는 문제에 익숙해 있을지라도 이와 같은 열린 문제가 제시될 때 개념 및 문제해결에 대한 그들의 방법은 넓이 측정의 정확성에 있어서는 다소 차이를 나타냈지만 그들이 이전에 배운 다각형 위주의 넓이를 구하는 방법을 좀더 다양하면서도 넓이 구하는 방법에 논리적으로 접근함으로써 문제해결에 대한 다양한 생각과 전략을 키워나갔다고 보여 진다.

<표 2> 각 방법별 학생수

사용한 방법	학생수(명, %)
방법1	5(13.2)
방법2	10(26.3)
방법3	5(13.2)
방법4	2(5.3)
방법5	1(2.6)
방법6	9(23.7)
기타	6(15.8)
총계	38(100)

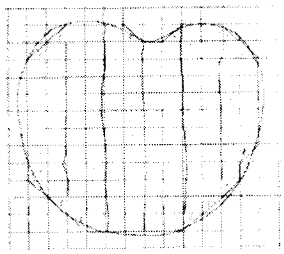
다음은 이들의 풀이 과정 중 몇 가지를 소개하고자 한다.

<u>방법3의 경우</u>: 완전한 정사각형을 먼저 모두 센 후 나머지 조각들을 모두 더해 2로 나눈 것을 더한다.

a. 안의 정사각형의 개수는 110개이다. 그 나머지 걸쳐있는 부분은 모두 43개이다. 걸쳐있는 부분의 개수는 반으로 나눈다. 그래서 110+43/2=131.5 (㎠)

b. 난 이 곡선을 직선으로 만들어서 구하면 쉽게 구할 수 있을 것 같다.
이제 곡선을 직선으로 다 그렸다. 이제 세야겠다. 네모가 너무 많으니까 5등분정도해서 구해야겠다(<그림 5> 참조). 그런데 계속 보니까 꼭 사과모양 같다.
네모는 모두다 118개이다. 그리고 나머지 세모(걸쳐있는 부분)는 모두 13개이다. 그러므로 118+13/2=124.5가 나온다.
내가 생각했던 것 보다 많다. 다른 애들은 어떻게 풀고 있을까? 궁금하다.
난 조금씩 잘라서 했는데 내 주위의 애들은 늘려서 하고 있다. 난 그렇게 많이 늘리는 것보다 내가 한 방법인 잘라서 하는 것이 더 확실해 보인다. 아! 이 그림을 잘라서 모눈종이에 대고 그린 다음에 직선으로 바꾸면 더 정확할 것 같은데.. 잘라도 되는지 모르겠다.

이 경우, 완전한 정사각형의 개수를 먼저 세고 나머지 도형들이 걸쳐있는 정사각형의 개수의 반을 계산해 내는 과정에서 '난 조금씩 잘라서 했는데 내 주위의 애들은 늘려서 하고 있다. 난 그렇게 많이 늘리는 것보다 내가 한 방법인 잘라서 하는 것이 더 확실해 보인다.'라고 하는 의사를 나타냄으로써 자신의 방법이 적절한 이유를 찾고자 노력한 흔적이 보인다.

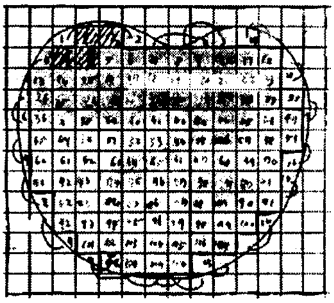


<그림 5> 방법3의 예

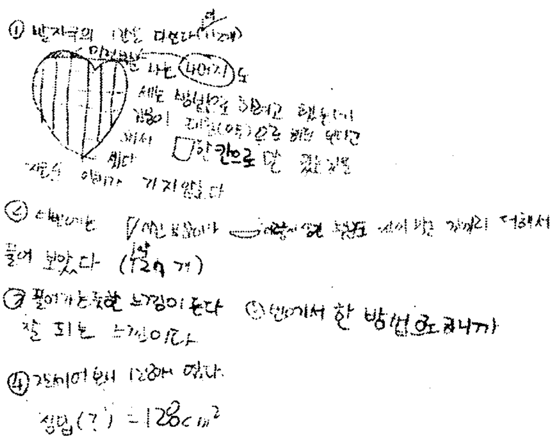
<u>방법5의 경우</u>: 먼저 완전한 정사각형의 넓이를 구하고 나머지 조각들은 모눈종이를 대어 넓이를 구한다. 이때 둥근 부분이 있고 없는 경우는 서로 부침으로써 조정한다(<그림 6>과 <그림 7> 참조).

1. 둥근 모양을 네모로 만든다.
2. 아니면 그 안에 네모를 만든다.
3. 그 네모 칸수를 센다.

4. 네모 안 속에 숫자를 써가며 센다.
5. 다 센 수는 110이다.
6. 둥근 모양을 큰 모양 작은 모양 섞어 가며 센다.
7. 다 센 수에 더하기 110을 했다.
8. 그래서 답은 129가 나왔다.



<그림 6> 방법5의 예(1)

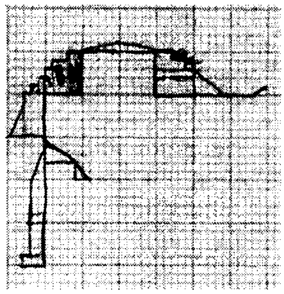


<그림 7> 방법5의 예(2)

이 경우, ③에서 나타내듯이 '풀어가는 느낌이 든다. ②번에서 한 방법으로 하니까 잘 되는 느낌이다'라고 나타냄으로써 자신의 방법이 적절한가에 대해 확신을 갖고자 하는 노력이 보인다.

<u>방법6의 경우</u>: 먼저 완전한 정사각형의 넓이를 구한 후 나머지 조각들끼리 끼워 맞춰 완전한 정사각형을 모눈종이(0.01㎠)에 만들어가면서 넓이를 구한다(<그림 8> 참조).

나는 일단 1㎠ 를 세고 모눈종이로는 울퉁불퉁 크기가 안 맞는 모퉁이를 잴 것이다. 모눈종이 조그마한 한 칸은 0.1로 정한다. 조그마한 한 칸이 반으로 또 나누어지면 0.01로 정한다. 앗.. 중간에 비슷한 조각이 보여서 그 부분은 X로 표시하고 붙였다. 식은 115+33.7=148.7이다.



<그림 8> 방법6의 예

이 경우, 모눈종이의 커다란 한 단위인 ㎠를 센 이후 나머지 부분의 보다 정확한 측정을 위하여 단위를 좀더 세밀하게 잘라가며 풀면서 자신의 방법을 설명하고 있다.

2. 초등예비교사 프로그램의 수업사례(1)

초등예비교사 대상의 초등수학 관련 수업에서 넓이와 관련하여 위의 <그림 1>보다는 좀 더 복잡하게 보여지는 다음의 문제상황을 제시하였으며 이 문제를 접한 초등예비교사는 각자 가능한 모든 문제해결 방법을 생각, 시도할 수 있게 하였다.

문제: <우리는 유명한 장갑 디자이너!!>
장갑 디자이너로 유명한 당신과 당신 동료는 때때로 야구 선수들을 위한 딱 맞는 장갑을 만들어 달라는 주문을 받을 때도 있답니다. 야구선수 박창호가 당신에게 그의 손에 딱 맞는 장갑 한 쌍을 만들어 달라는 부탁을 하는군요. 그는 그의 손의 모양을 따라 그린 종이를 주었답니다. 당신은 이러한 주문용 장갑을 만들 때 한 짝의 경우, 앞, 뒷면 합쳐서 1㎠ 당 100원을 받기로 하였습니다. 정확하게 박창호 선수의 장갑

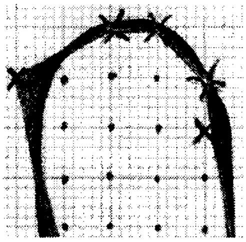
두 짝을 만든다면 장갑 두 짝의 가격은 얼마가 되는지 알아봅시다.

<그림 9> 손바닥 그림

여기서 제시된 문제상황은 만약 학습자가 장갑을 만들어 팔 때 그 가격을 산출하여야 하는 역할에서 가장 근접한 가격산정의 방법을 모색하는 상황이다. 이때 여기서 내재하고 있는 수학적인 내용으로는 주로 넓이 측정이며 관련 개념으로는 비례와 문제해결력 등이 포함된다. <그림 9>와 같은 손바닥 그림을 받은 학생들은 우선 손바닥을 그린 그림은 곡선으로 이루어져 있기 때문에 곡선을 끼고 있는 부분의 넓이를 구하는 문제에 직면하게 된다. 또한 넓이에 따른 장갑의 가격을 산출해야 한다. 초등예비교사들이 이 문제를 해결한 결과 다양한 방법이 제시되었는데 이중 몇 가지를 소개하면 다음과 같다.

방법1의 경우: Pick의 정리를 활용한 문제해결
초등예비교사가 문제해결 방안으로 도출된 방법들 중 다음은 Pick의 정리[1](Funkenbusch, 1974; Pick, 1899)를 이용하여 손바닥의 넓이를 구한 과정을 설명한 것이다.

<그림 2>에서 곡선 모양의 손바닥의 넓이를 가장 근사하게 나타낼 수 있는 직선을 찾아내서 넓이가 근사한 다각형을 구해서 외부점, 내부점을 개수를 구해 넓이를 구하는 방법을 사용하였다. <그림 10>은 손바닥의 곡선을 포함하는 영역에서 가장 근사한 넓이를 만드는 다각형을 구해낸 결과이다.



<그림 10> 둥근 손바닥 일부 부분에 외곽선을 그은 모습

이러한 절차를 거친 결과 나타난 내부점과 외부점은 각 학습자마다 내부점과 외부점의 개수는 동일하지 않았으며 이중 도출된 예 중 하나는 다음과 같다.

내부점(interior point: I)의 개수: 131개
외부점(boundary point: B)의 개수: 54개

이 경우 Pick의 정리(넓이 = $\frac{B}{2}$ + I - 1) 에 의한 넓이는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{54}{2} + 131 - 1 = 157$$

결과적으로 실제 장갑의 가격은 다음과 같이 산출되었다.

157㎠ x 2 (앞・뒤면) x 2 (두 짝) x 100 (원)
= 62,800(원)

방법2의 경우: 둥근 부분들 넓이의 근사치 구하기
학생들이 사용한 또 다른 방법으로는 손가락의 곡선 부분의 넓이를 측정하는데 있어 곡선 부분을 더 작은 정사각형으로 쪼갬으로써 구하고자하는 손바닥 넓이에 가장 근사한 값을 찾아간다(<그림 11>, <표 3> 참조).

1) Pick의 정리는 격자다각형의 넓이를 구하는 새로운 방법을 제시해 준 Vienna 출생 Georg Pick(1899)에 의한 정리로서 2차원 격자점 위에 꼭지점을 갖는 다각형의 넓이는 다각형 내부의 격자점의 수 + 1/2 다각형 둘레의 격자점의 수 - 1과 같다.

① 손바닥 내부에서 1㎠ 의 정사각형(1단계)을 이용하여 채울 수 있는 정사각형의 개수를 구한다.

② 손바닥 내부에서 ①을 채우고 난 후의 나머지 부분을 1㎠ 의 $\frac{1}{4}$ 크기(2단계)로 채워 넣을 수 있는 만큼 채우며 그 개수를 구한다.

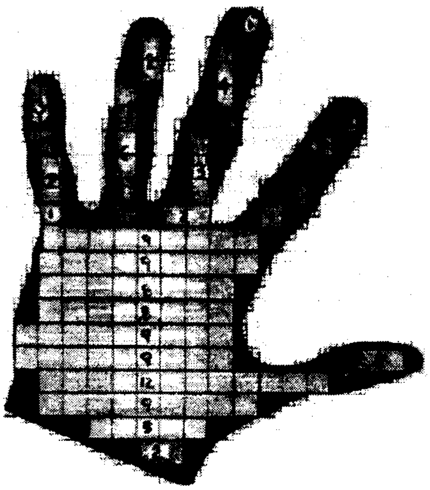
③ 구해야 하는 나머지 부분에서 1㎠ 의 $\frac{1}{8}$ 크기(3단계)로 채워 넣을 수 있는 만큼 채우며 그 개수를 구한다.

④ 구해야 하는 나머지 부분에서 1㎠ 의 $\frac{1}{16}$ 크기(4단계)로 채워 넣을 수 있는 만큼 채우며 그 개수를 구한다.

⑤ 구해야 하는 나머지 부분에서 1㎠ 의 $\frac{1}{32}$ 크기(5단계)로 채워 넣을 수 있는 만큼 채우며 그 개수를 구한다.

이 방법을 사용한 결과, 실제 장갑의 가격은 다음과 같이 산출되었다.

161.25 ㎠ x 2 (앞·뒤면) x 2 (두 짝) x 100 (원)



<그림 11> 정사각형 크기 별로 영역을 표시

<표 3> 각 단계 별 정사각형의 개수

단계	단위 넓이	갯수	넓이
1	1㎠ x 1	112개	112 ㎠
2	1㎠ x $\frac{1}{4}$	97개	24.25 ㎠
3	1㎠ x $\frac{1}{8}$	98개	12.25 ㎠
4	1㎠ x $\frac{1}{16}$	64개	4 ㎠
5	1㎠ x $\frac{1}{32}$	280개	8.75 ㎠
총 넓이			161.25 ㎠

이 두 가지 해결방법의 경우를 보더라도 <표 3>에 의하면 각 단계에서 구해진 넓이의 합은 161.25 ㎠ 로 앞에서 Pick의 정리를 이용해 구한 넓이, 157 ㎠ 와 그 차이가 그다지 크지 않음을 발견할 수 있다. 하지만 여기서 제시된 방법들만이 정답이 아니며 더 효율적인 방법도 얼마든지 도출될 수 있을 것이다.

이와 같이 이 문제의 경우 이러한 문제를 해결할 수 있는 방법으로 (1) Pick의 정리를 이용할 수 있으며, (2) 손바닥 내부의 넓이는 정사각형을 그려냄으로써 구할 수 있고 외부의 곡선 부분은 그 부분들만 따로 조각조각 모아 근사 넓이를 구하는 방법 등이 도출되었다.

3. 초등예비교사 프로그램의 수업사례(2)

초등예비교사 대상의 초등수학 관련 수업에서 넓이와 관련하여 위에서 제시한 수업사례를 응용하여 다음의 문제상황을 제시하였으며 이 문제를 접한 초등예비교사는 각자 가능한 모든 문제해결 방법을 생각, 시도할 수 있게 하였다.

문제: <당신과 당신 동료는 유명한 동물 고고학자>
당신과 당신 동료는 추적하고 있는 동물을 분석하기 위하여 때때로 동물의 발자국의 길이를 알아보거나 발자국 주물(mold)을 떠야 할 때도 있답니다. 오늘은

당신이 추적하던 공룡의 발자국(뒷 발자국)의 길이를 알아내고 그 발자국의 플라스틱 주물을 떠야 합니다. 한 발자국 주물을 만들어 달라고 하는데 평방 1㎠ 당 300원을 지불해야 합니다.

(1) 당신이 추적하고 있던 공룡은 무엇이라고 생각합니까? 공룡은 어떻게 생겼나요?

(2) 그 공룡 뒷 발자국의 길이는 실제로 몇 cm입니까?

(3) 주문한 발자국 주물을 위해 얼마를 지불해야 합니까?

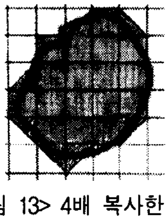
이 문제를 풀기 위하여 공룡의 뒷발자국 제시는 $\frac{1}{40}$ 로 축소된 다양한 공룡의 모형을 이용하였으며 이 수업에서 사용된 공룡은 아파토사우르스, 유오플로케팔루스, 카르노타우르스, 플라테오사우르스 등이다. 위에서 제시된 세 문제 중 (2)와 (3) 문제를 중심으로 그 풀이과정을 살펴보겠다.

<u>방법1의 경우</u>: 유오플로케팔루스

(2) 축소된 공룡 뒷발자국(<그림 12> 참조)의 길이는 측정결과 1㎝가 나오므로 40배로 확대하여 환산하면 40㎝가 나온다.

<그림 12> 유오플로케팔루스의 뒷발자국

(3) 오차를 줄이기 위해 위의 <그림 12>를 4배로 확대복사한 후 발자국을 포함하는, 최소한의 외접다각형을 표시한다. 그 결과 1 ㎠ 의 정사각형은 모두 17개가 나오고 나머지 부분들은 정사각형이 아닌 직각삼각형으로 표시한 7개가 나오게 된다. 그리하여 넓이는 다음의 <그림 13>과 같이 나오게 된다.



<그림 13> 4배 복사한 그림

(정사각형들의 넓이) 1 ㎠ x 17 = 17 ㎠

(직각삼각형의 넓이) 0.5 ㎠ x 7 = 3.5 ㎠

(총 넓이) 20.5 ㎠

그러므로 40배로 확대한 발자국의 넓이는 16 : 1600 = 20.5 : x 이 되어 2050 ㎠ 가 된다.

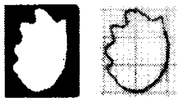
결국 주물의 가격은 2050 ㎠ x 300원/㎠ 으로 약 614,000(원)이 나온다.

<u>방법2의 경우</u>: 아파토사우르스

(2) $\frac{1}{40}$ 로 축소된 모형의 뒷발자국(<그림 14> 참조)의 크기는 측정결과 1.5㎝ 이므로 공룡의 실제 길이는 다음과 같이 구해진다.

1.5 : x = 1 : 40

x = 60 (㎝)

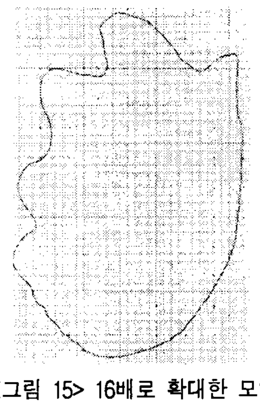


<그림 14> 아파토사우르스의 뒷발자국

또는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다. 공룡의 뒷발자국을 16배 확대한 <그림 15>를 이용하여 측정한 결과 23.2㎝가 나오므로 공룡의 실제 길이는 다음과 같이 구해진다.

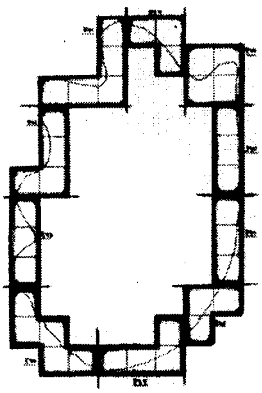
16 : 40 = 23.2 : x

x = 58 (㎝)

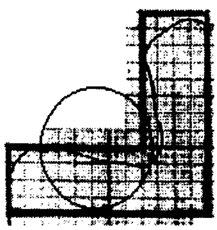


<그림 15> 16배로 확대한 모양
(아파토사우르스)

(3) 공룡의 뒷발자국을 16배 확대한 <그림 15>를 다음의 <그림 16>과 같이 내부 넓이가 완전한 정사각형들로 이루어진 부분(part A)으로 구분을 하여 이 부분의 넓이를 구하고 이 밖의 둥근 부분들을 다음과 같은 10개의 다각형(part B)으로 구분하여 각각의 부분을 40배로 확대하여 넓이를 계산한다. 예를 들어 동그라미로 표시한 부분을 40배 확대한 그림은 <그림 17>과 같다.



<그림 16> part A와 part B로 구분



<그림 17> 40배로 확대한 그림
(아파토사우르스)

결국 part A의 총 넓이는 520.13 ㎠, part B의 넓이는 1100 ㎠가 나와 총 넓이는 약 1620.16 ㎠가 나온다.
그러므로 주물의 가격은 1620.16 ㎠ x 300원/㎠ 으로 약 486,036(원)이 나온다.

방법3의 경우: 카노타우르스

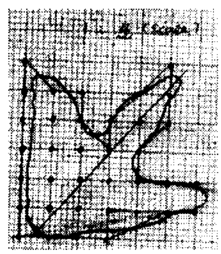
(2) 확대하면서 오차를 줄이기 위하여 다음의 <그림 18>과 같이 40배로 축소되었던 발자국을 각각 2배, 4배, 8배로 확대하여 <그림 19>, <그림 20>, <그림 21>을 얻은 후 <그림 21>에서 그 길이를 구하면 14.3 ㎝를 구할 수 있다. 그리하여 구하고자 하는 발자국의 길이는 다음과 같이 구해진다.

$8 : 40 = 14.3 : x$

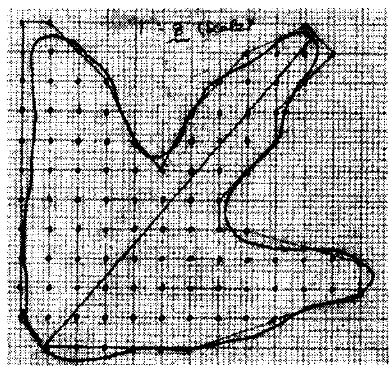
$x = 71.5$ (㎝)

<그림 18> 원래 축소된 모양

<그림 19> <그림 18>의 2배 확대



<그림 20> <그림 18>의 4배 확대



<그림 21> <그림 18>의 8배 확대

(3) Pick의 정리를 이용하여 16배로 확대된 <그림 21>에서 내부점과 외부점을 구하여 넓이를 구한다(83.5 ㎠). 넓이의 비례식을 이용하여 다음과 같이 실제 크기의 넓이를 구한다.

64 : 1600 = 83.5 : x

x = 2087.5 (㎠)

그러므로 주물의 가격은 2087.5 ㎠ x 300원/㎠ 으로 약 626,250(원)이 나온다.

이 공룡의 문제의 경우에는 앞의 장갑 문제보다는 축소 또는 확대시 넓이의 비를 이해해야 하는 부분이 더 고려되어야 하는 문제로 난이도가 좀더 높은 문제라 하겠다. 초등예비교사들이 문제를 해결해 나가는 과정을 분석한 결과 장갑 문제에서와 같이 둥근 부분에 대한 넓이를 어떻게 해결해야 하는 문제에 봉착하게 된다. 이때 Pick의 정리를 이용하기도 하며 보다 정확한 넓이를 측정하기 위해 둥근 부분을 다시 좀더 세밀하게 분류, 측정하기도 한다. 결국 넓이를 보다 정확하게 측정해 가기 위해 여러 가지 다양한 방법이 시도되었다.

V. 맺는 말

21세기는 무한한 정보의 홍수 속에서 각자가 처한 상황에서 해결해야 하는 문제를 위하여 각자에게 유용한 정보를 채택하고 이들 정보를 분석하고 조직하여 문제상황에 가장 적절한 방법을 모색하는, 고차원의 사고력을 요하는 시대일 것이다. 우리 교육현장의 학습자에게 유의미한 학습 환경을 제공하고, 이를 지원하기 위해서는 그들에게 의미있는 문제상황이며 그들의 현재뿐 아니라 미래 생활에도 적용 가능한 문제이어야 하며, 가장 적절하고 유용한 문제해결 방안을 모색할 수 있어야 할 것이다.

이를 위한 한 방법으로 본 고에서는 초등학교 5학년과 예비초등교사를 대상으로 발자국 모양의 넓이를 측정하는 열린 문제를 제시, 그 문제해결 방법을 분석한 결과, 각 집단은 여러 가지 다양한 문제해결 방법을 고안, 가장 적절한 문제해결을 위하여 효율적으로 의사결정해 나가는 과정이 제시, 분석되었다. 하지만 본 연구의 아쉬운 점은 초등학생들 스스로가, 예비교사 스스로가 문제해결 방법을 찾아내는 과정을 통하여 다른 아동들, 다른 예비교사들과 종합적인 토의과정을 통하여 보다 효율적인 방법을 찾아내는 의사결정에 대한 부분의 제시가 이루어지지 않은 점이다. 이는 후속연구에서 보완되어야 할 것이다.

문제를 푸는 과정을 교과서에서 각각 단계를 자세히 제시하면서 전개하고 있는 기존의 문제해결 방식으로는 기대하기 어려운 결과라고 생각된다. 정형화되어 있는 문제보다는 보다 비정형화된, 열린 문제상황의 제시와 함께 문제해결 방법에 대한 아동의 다양한 반응의 적절한 진단과 분석을 통하여 학습자의 다양한 풀이 전략을 학습자가 먼저 스스로 생각해 보며 이에 대한 교사의 피드백 제공이 가능한 환경을 조성하며, 교사의 적절한 안내 및 피드백이 요구된다고 하겠다.

하지만 현실적으로 비정형화된 열린 문제상황 구성, 개발 및 활용이 결코 쉽지 않은 게 우리의 현실이다. 그럼에도 불구하고 개념 학습 및 사고력 증진, 문제해결력 증진을 위한 방안으로 열린 문제가 적절히 활용될 수 있다는 가능성을 제시하면서 교육적 효과를 기대해 보고자 하는 입장이다. 이를 위해서는 교육현장의 교사는 학습자에게 의미있는 실생활 관련 상황문제나 수학자의 수학 활동과 학습자의 학습 활동간 연계가 가능한 문제 등을 개발, 학생들에게 교수학적 상황을 제공하며 학습자의 다양한 사고를 가능하게 하는 발문과 학습자가 능동적이고 협력적이며, 창의적인 문제해결을 할 수 있는 환경을 조성할 수 있는 역할자로 변화되어야 할 것이다. 본 고에서 제시한 열린 문제 이외에도 타 영역 및 다양한 내용에서의 열린 문제의 개발 및 그 적용 가능성을 기대해 본다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 제7차 수학과 교육과정.

교육부 (1998). 초등학교 교육과정 해설(IV) -수학, 과학, 실과-.

김경자 · 정미화 · 손지원 (2002). 지식기반사회에서의 초등수학과 교육과정 개발을 위한 기초연구로서의 제7차 초등수학 교과서 분석, 초등수학교육 6(1), pp.11-18.

김재복 · 이경환 · 허경철(편저) (1999). 초등학교 교육과정 해설. 서울: 교육과학사.

방승진 · 이상원 · 황동주 (2001). 소집단 토의학습을 통한 Polya의 문제해결 전략을 이용한 문장제 지도방안 - 중학교 중심-, 수학교육논문집 11, pp.201-233.

장혜원 (2002). 수학 학습을 위한 상황문제의 활용, 학교수학 4(3), pp.483-494.

한국교육과정평가원 (2000). 우리 나라 중학생의 수학 · 과학 성취 결과, 국제수준은 어떠한가? 연구자료 ORM 2000-16.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A cognitive vie,* Holt, Rinehart & Winston.

Burton, L. (1984). *Thinking things through,* Basil Backwel Limited.

Bassarear, T. (1997). *Mathematics for elementary school teachers*, Houghton Mifflin Company.

Erickson, D. K. (1999). A problem-based approach to mathematics instruction, *Mathematics Teacher* 92(6), pp.516-21.

Funkenbusch, W. W. (1974). From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem, *The American Mathematical Monthly* 81, pp.647-648.

Gagné, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction* (4th ed.), New York: Holt, Rinehart and Winston.

Krulik, S. & Rudnick, J .A. (1987). *Problem solving: A handbook for senior highschool teachers* (2nd ed.), Needham Height, Mass: Allyn & Bacon.

Lenchner, G. (1983). Creative problem solving in school mathematics, Boston : Houghton Mifflin.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM

Pick, G. (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre, *Naturwissen Zeitschrift Prague* 19, pp.311-319.

Polya, G. (1957). *How to solve it,* Princeton: Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*, New York: Academic Press, INC.

Investigation of the Problem Solving in Open-Problem Related to Area

Kim, Min Kyeong
Dept. of Elementary Education, Ewha Womans University
email: mkkim@mm.ewha.ac.kr

The purpose of the study is to investigate how children and preservice teachers would make a progress in solving the open-problems related to area. In knowledge-based information age, information inquiry, information construction, and problem solving are required. At the level of elementary school mathematics, area is mainly focused on the shape of polygon such as square, rectangle. However, the shape which we need to figure out at some point would not be always polygon-shape. With this perspective, many open-problems are introduced to children as well as preservice teacher. Then their responses are analyzed in terms of their logical thinking and their understanding of area. In order to make students improve their critical thinking and problem solving ability in real situation, the use of open problems could be one of the valuable methods to apply.

* ZDM classification : D53
* 2000 Mathematics Classification : 97D50
* key word : Area, Open-Problem, Problem Solving