

## 수학교사의 지식과 수업 실제와의 관계

신 현 용 (한국교원대학교)

이 종 욱 (주원초등학교)

### I. 서론

교사의 지식은 단일한 요소가 아니라 통합적이며 기능적으로 이루어진 조직체이기 때문에, 학자에 따라 조금씩 달리 정의하지만 일반적으로 교사 지식의 구성 성분으로 수학에 대한 지식, 학습자에 대한 지식, 가르치는 방법에 대한 지식을 인정하고 있다.

복합적으로 구성된 교사의 지식은 교실 수업에서 실제적인 영향력을 가진다. 교사가 가르치는 방법과 학생이 학습하는 방법, 수업의 내용과 과정, 학생의 학업성취에 영향을 미치면서 교실 수업을 개선하기 위한 중요한 특징 중의 하나가 되는 것으로 많은 연구에서 보고하고 있다(Manouchehri, 1998; Fennema & Franke, 1992; Prawat, Remillard, Putnam, & Heaton, 1992; Peterson, 1988; Brophy & Good, 1986). 이 지식은 수업을 계획하고, 교실을 조직하고, 과제를 선택하고, 학생을 평가하는데 중요한 역할을 하며 학생의 지식이 계속해서 발달하는 것과 같이 교사의 지식도 교실 환경이라는 상황 속에서 발달을 진행한다(Elbaz, 1983; Fennema & Franke, 1992). 다시 말하자면, 교직 경험을 가지면서 수학 교과를 가르치고 학생과의 상호작용을 통하여 반성의 과정을 겪으면서 지식은 변하게 된다. 따라서 교사의 지식은 단절적인 것으로 볼 것이 아니라 통합적인 관점에서 살펴보아야 한다.

교사 지식의 발전적인 변화를 위해 새로운 교육과정

이 공포되고 시행될 때마다 교사 연수가 이루어진다. 그러나 연수를 통해 교실 수업을 변화시키려는 노력은 실제적인 변화를 일으키는데 만족스럽지 못하다. 미국의 경우 “새수학” 운동 기간동안 개발되어 운영된 대부분의 교육과정은 교육과정의 목적과 새로운 내용을 어떻게 접근해야 하는가에 대해 교사들이 충분히 이해하지 못했기 때문에 실패하였다고 본다. 교사들은 교육과정의 변화는 단지 몇 가지 내용이 첨가되거나 삭제되었다고 느끼면서 예전의 방식대로 가르쳐도 별 문제가 없는 것으로 생각하는 경향이 있다. 우리의 경우 교사 연수는 자격연수, 직무연수, 일반연수로 이루어지고 있으며 교육과정과 관련한 연수는 자격연수와 직무연수 프로그램에 포함되어 있다. 교육과정의 이해에 대한 연수 프로그램은 주로 교육당국에서 발간한 교육과정 해설서의 내용을 그대로 발췌하여 사용하는 경우가 많으며, 수학교과와 내용 부분에서는 교육과정에서 구분한 영역별로 각 학교별 내용 영역 지도에 대한 연수가 이루어지고 있다(부산광역시교육연수원, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d). 이러한 연수 프로그램에서 수학과 내용의 전반적인 흐름을 이해한다는 것은 표면적일 수밖에 없으며 학교 교육과정의 주요한 주제에 대한 이해에 깊이를 더하는 경우를 찾아보기 어려운 실정이다. 결국, 이론적으로 끌어들이고 교육과정이 교실 실제에 도달하는 데는 많은 어려움이 있으며 교사들은 단지 새로운 교과서를 받아서 교과서를 따라 가르치게 된다. Elbaz(1983)는 교실 실체를 잘 모르는 교육당국이 그런 교육과정을 구성한다고 지적했다. 교육과정 개혁에서 교사의 지식을 무시하는 것은 교사를 교육과정 개선에 수동적으로 만들게 되어 개혁이 목표를 달성하기 어렵게 한다.

Steffe(1990)는 수학 교육에서 일어나는 중요한 문제점 중의 하나는 “수학교사들이 학교수학에 대한 그들의

\* 2003년 11월 투고, 2004년 7월 심사 완료.

\* ZDM분류 : B59

\* MSC2000분류 : 97C70

\* 주제어: 교사 지식, 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식.

개념을 심화하고, 통합하며, 확장시킬 수 있는 개념의 연결성을 개발하지 않는다”는 것임을 지적했다(p.167). Steffe는 수학에 대한 적절한 이해가 부족한 교사는 절차 중심적이고 기계적인 방법으로 수학을 가르치는 경향이 있으며, 학생들에게 절차를 설명하기 위해 직접교수법을 사용하고 학생의 답이 맞고 틀렸다는 것을 말하며 교과서를 절대적인 것으로 인정한다고 하였다. Ma(1999)의 연구에 따르면 미국 교사들은 여전히 절차 중심적이며, 학생들에게 연습을 주된 학습 방법으로 사용하고 있고, 수학을 가르치기 위한 적절한 지식이 부족하다. 이와 비교해서 중국의 초등교사는 개념적으로 충분한 지식이 있는 것으로 보고하고 있지만, 우리의 경우, 지금의 초등학교 현실을 생각해보면 많은 교과를 여러 학년에 걸쳐서 가르치는 어려움으로 인하여 개념적인 이해가 충분하도록 가르치기가 힘든 상황이라고 볼 수 있다.

미국수학교사협회(National Council of Teachers of Mathematics: NCTM, 1991)는 수학교사의 전문성 개발을 위한 여섯 가지 기준을 제안했다. 여기서 세 가지는 수학을 가르치는 교사의 지식, 즉 수학과 학교수학에 대한 지식, 수학을 배우는 학습자에 대한 지식, 수학을 가르치는 방법에 대한 지식과 관계된다.

현재의 개혁 운동은 새로운 형태의 수학 교수를 요구한다(NCTM, 1989, 1991, 2000). 학생들이 수학을 단지 연습과 훈련에 의해 기능이나 절차를 숙달하는 것이 아니라 이해하면서 배우는 경험을 가져야 한다(Goldsmith & Schifter, 1997). 수학을 가르치는 전통적인 접근은 이해를 강조하는 방법으로 바뀌어야 하며 이런 변화의 주체는 교사가 되어야 한다. 이것은 교사가 수학 내용과 교육과정, 그리고 수학을 가르치는 새로운 방법을 잘 알아야 가능한 것이다.

이처럼 수학교육을 개선하려는 개혁 운동의 밑바탕에는 교사의 지식을 향상하는 것이 전제 조건이 되며 수학 교과에서는 수학이라는 교육내용이 간과할 수 없는 지식의 한 영역을 차지한다고 할 수 있다. 그러나 지금까지의 연구들을 살펴보면 특별히 수학교사에게 필요한 지식이 어떤 것인가에 대해 구체적으로 정리한 문헌이 부족하였으며, 교과 지식과 관련되는 문헌에서는 주로 예비 교사들을 대상으로 몇 가지 주제와 관련한 지식 상태를 분석한 연구들이 대부분이었다(Zazkis & Campbell,

1994; Khoury & Zazkis, 1994; Simon, 1993; Post, Harel, Behr, & Lesh, 1991; Ball, 1990a, 1990b; Tirosh & Graeber, 1989; Graeber & Tirosh, 1988). 다시 말하자면, 현직 교사를 연구 대상으로 설정하여 교사가 가진 수학적 지식과 수업 실제와의 관계를 제시하는 연구가 부족함을 알 수 있다.

교사의 질을 높이기 위해서는 교사양성 대학의 교육 프로그램과 함께 현직교사의 전문성 개발 프로그램을 계속적으로 변화시킬 필요가 있으며 이 변화를 가져오기 위한 선행 작업으로 수학교사의 전문성 개발에 필요한 지식에는 어떤 것이 있으며 교사의 지식이 수업 실제에 어떻게 관련되는가를 알아보는 기초연구가 이루어져야 할 것이다.

따라서 본 연구에서는 다음과 같은 두 가지 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 수학교사에게는 어떤 지식이 필요한가?

둘째, 수학교사의 지식은 수업 실제에 어떻게 영향을 미치는가?

위의 연구 문제에 대한 답을 얻기 위해 본 연구는 방법상 문헌 연구로 이루어지며 교사교육과 관련한 앞으로의 연구를 위해 몇 가지 시사점을 구하고자 한다.

## II. 교사 지식의 유형

교사의 지식을 이해하기 위해, 지식의 몇 가지 측면을 살펴볼 필요가 있다. 대부분의 연구자들은 교사 지식을 내용면에서 분류하고 있다. Kennedy 등(1993)은 교사 지식을 교과, 학습자, 학습, 교수법, 교사의 역할, 교육과정 등에 대한 지식으로 분류했다. Leinhardt와 Smith(1985)는 교사 지식의 두 가지 핵심적인 영역을 수업 구조와 교과로 보았다. 그들에 따르면, 수업 구조 지식은 수업의 계획, 자연스러운 수업의 운영과 전개, 그리고 적절한 설명을 위해 필요한 기술을 포함하며, 교과지식은 개념, 알고리즘, 알고리즘 사이의 연결, 학생의 오개념에 대한 이해, 그리고 교육과정에 대한 이해를 포함한다(p.247). 비록 지식을 두 종류로 구분하지만, Leinhardt와 Smith는 수업 구조 지식과 교과 지식은 서로 겹쳐있으며 교과 지식은 수업 구조 지식을 포함한다고 하였다.

Shulman(1986)은 교과 지식, 교수학적 내용 지식, 교육과정 지식으로 교사 지식의 세 가지 요소를 제안했다. 그에 따르면 교과 지식은 어떤 영역의 사실이나 개념에 대한 지식뿐만 아니라 교과의 구조에 대한 이해가 필요하며, 교수학적 내용 지식은 수업을 위한 교과지식의 또 다른 차원으로 교과를 적절하게 표현하고 조직하는 방법을 포함하면서 학생의 학습에서 어떤 영역에 대한 오개념에 대한 이해를 필요로 한다. 대개 이 지식은 교수전략과 관계된다. 한편, 교육과정 지식은 특별한 교육과정 내용과 관련된 지식으로 어떤 내용의 교육과정 위계뿐 아니라 같은 학년 수준에서의 내용 사이의 연결에 대한 지식을 포함한다.

NCTM(1991)은 세 가지 유형의 수학교사의 지식을 적고 있다. 수학과 학교수학, 수학의 학습자로서의 학생, 수학적으로 가르치는 방법에 대한 지식이 그것이다. Fennema와 Franke(1992)는 수학에 대한 지식, 가르치는 지식, 학습자의 인지에 대한 지식으로 수학 교사의 지식을 비슷한 방법으로 분류했다. 이것은 수학을 가르치는 세 가지 측면, 즉 수학, 교수법, 학습자에 대한 지식으로 교사는 그들이 가르치는 수학, 과목을 가르치는 방법, 학생들이 수학을 학습하는 방법을 알아야 한다는 것이다.

교사 지식을 연구하는 방법적인 측면에서 Carter(1990)는 그 동안의 연구를 정리하면서 교사 지식을 연구하는 데는 세 가지 방법이 있으며 이들은 서로 중복된다는 사실을 알아내었다. 정보 처리 지식, 실제적 지식, 그리고 교수학적 내용 지식으로 이들 세 방식은 서로 다른 가정과 이론적 틀을 보이고 있기에 각기 다른 강조점과 방법론을 가지고 있다.

정보 처리 지식은 지식을 정보를 처리하는 과정과 결과라는 관점에서 보았던 시기에 교사의 지식을 설명하기 위해 사용하였다. 연구자들은 교사의 마음 속에서 어떤 과정이 일어나는가에 관심을 가졌다. 무엇인가를 결정하는데 어떤 정신적 과정이 일어나는가에, 그리고 그런 결정이 수업을 계획하고 운영하는 것과 같은 그런 활동과 관련하여 얼마나 자주 일어나는가에 중점을 두었다. 이러한 관점에서, 연구자들은 초보 교사와 경험 있는 교사를 비교 연구하면서 경험 있는 교사들은 유용한 방법을 구성하는 특별한 지식을 가지고 있다고 결론을 내었다. 이런 연구방법론에서는 심리학적인 측면에서 언어를 분

석하고 통제된 실험 환경에서 연구를 수행하였다. 예를 들어, 교사들에게 교육과정과 관련하여 어떻게 결정을 내리는가 또는 학생을 어떻게 가르치는가에 대한 질문을 통하여 교사의 마음 속에서 일어나는 사고 과정을 탐구하였다. 정보 처리 지식에 대한 연구는 교사 지식의 실제와 조직에 대해 더 깊은 연구가 필요함을 알려주었다.

실제적 지식을 연구하는 연구자들은 수업의 실제적 실행에 중점을 두었다. 다시 말하자면, 교사가 수업을 실행하는 것과 관련하여 실제적으로 무엇을 알고 있으며 교실 환경을 어떻게 운영하는가를 분석하였으며, 교사가 수행한 과제의 유형, 수업의 흐름, 또는 학습에서 일어날 수 있는 장애 등을 분석에 포함시켰다. Elbaz(1983)는 교사의 실제적 지식을 자기, 교수 환경, 교과, 교육과정, 학습자 이 다섯 가지로 분류하였다. 다른 연구자들이 지식의 실체를 면밀히 분석하는 반면에 Elbaz는 지식의 특성에 주로 주목했으며, 이로부터 교수학적 내용 지식을 끌어 낼 수 있었다.

Shulman(1986)은 다른 유형의 교사 지식인 교수학적 내용 지식을 주목하기 시작했다. 이 지식은 내용 지식과 교수법의 혼합을 나타내며 어떤 내용에 대한 지식을 그 내용을 가르치도록 바꿀 수 있는 방법을 알 수 있는 교사의 능력을 포함했다. Shulman은 다음의 지식을 포함하는 것으로 교수학적 내용 지식을 설명하고 있다.

자신의 교과에서 가르치는 주제에 대해 그 개념을 가장 유용하게 표현하는 형태, 가장 훌륭한 유추 방법, 설명, 예증, 증명에 대해 아는 것, 즉 다른 사람이 그 주제를 이해하도록 표현하고 조직적으로 체계화하는 방법을 아는 것...[그것은] 쉽거나 어려운 내용이 어떤 것인가에 대한 이해, 서로 다른 나이와 서로 다른 환경을 가진 학생들이 가르치는 수업에서 가지게 되는 학습개념과 사전학습개념에 대한 이해를 포함한다 (p.9).

그는 계속해서 이 지식에는 학습자가 이해하도록 지식을 재조직할 수 있는 전략을 포함시키면서(p.9-10) 학생들이 형성하는 오개념을 인식하고 교육과정을 적절하게 조절하거나 특별한 개념을 가르치기 위해 적절한 도구를 선택하여 사용하는 것을 교수학적 내용 지식의 예

에 덧붙였다. 이 지식은 교사가 교직 생활을 하면서 학습하게 되는 지식이지만 예비교사 교육에서는 깊이 있게 다루지 않는 지식이다.

교수학적 내용 지식에 대한 설명은 새로운 방법으로 가르칠 필요가 있는 지식을 분석하는 기초가 되었다. 많은 연구자들은 (Borko & Putnam, 1996; Fennema & Franke, 1992; Grossman, 1991; Leinhardt & Smith, 1985) 가르치기 위해 필요한 지식은 순수 학문에서 사용되는 지식과 어떻게 다른가를 탐구함으로써 교사 지식에 대한 Shulman의 개념을 확장하였다. 교사 지식에 대한 각 연구가 교사 이해에 대해 유사한 설명을 하지만, 각 연구자들은 서로 다른 특성과 이름을 사용하면서 항목을 분류하고 있다.

한편, Borko와 Putnam(1996)은 교사 지식을 교과 지식과 신념, 일반 교수법과 신념, 교수학적 내용 지식과 신념으로 구분하고 있다. Borko와 Putnam은 내용과 교수법의 혼합을 포함하기 위해 교수법적 내용 지식이라는 Shulman의 설명을 확장했다. 그러나 이 모델은 교육과정, 학습, 그리고 학습자를 일반 교수법적 지식 아래 함께 묶고 있으며, 지식 그 자체와 함께 지식과 신념 사이의 상호작용을 강조했다. 이는 어떤 영역에서 지식을 획득하는 과정에서 동시에 그 영역에 대한 신념도 영향을 받는다는 것을 주장한 것이다.

교사 지식의 유형을 분류하면서 앞에서 언급한 학자들은 서로 다른 표현으로 분류하고 있지만 지식에 대한 이런 측면은 서로 명확히 구분되는 것이 아니라 통합적인 실체로 구성된다는 것을 알 수 있다. 또한 어떤 학자들은 교과 지식과 수학적 지식을 호환적으로 사용하는가 하면, 다른 학자들은 교과 지식은 수학을 가르치는 방법에 대한 지식을 포함한다는 점에서 수학적 지식과는 다르다는 입장을 지지하고 있다(Leinhardt & Smith, 1985). 당연한 말이었지만 수학 교사라는 입장을 수학을 가르치는 사람으로 본다면 수학의 내용 자체에 대한 지식이 수학 교사에게는 요구된다. 하지만 교사 지식의 한 유형을 수학에 대한 지식이라고 할 때, 이때의 수학은 다분히 대학 수학에서 경험하는 학문적인 수학을 주장하는 경향이 있기 때문에 이보다는 오히려 수학이라는 교과에 대한 지식이 필요하다는 것이 더 적절하다고 본다. 이것은 수학자와 수학 교사를 구분하는 의미에서도 분명하다.

수학자는 학문적인 의미에서 수학이라는 학문을 연구하면서 이 분야에 대한 지식이 풍부하다. 그러나 학교에서 수학을 가르치는 데는 학교수학이라는 수학의 또 다른 형태의 수학에 대한 지식이 필요하다. 학교수학을 안다는 것은 학문적인 수학에서처럼 깊이 있는 수학의 내용을 아는 것이 아니라 학교와 학년 수준의 수학을 교육과정 전체의 맥락에서 구조를 파악하는 것과 관계된다. 따라서 본 연구에서 교과 지식은 수학에 대한 지식과 함께 학교수학에 대한 이해를 포함하는 보다 포괄적인 개념으로 사용하고자 한다.

또한 같은 맥락에서 수학을 가르치는 교사는 가르치는 방법에 대한 지식이 필요하다. '안다는 것과 가르친다는 것은 다르다'는 말이 암시하듯이 잘 안다는 것이 잘 가르친다는 것을 보장할 수 없을 것이다. Leinhardt와 Smith(1985)가 수업 구조 지식으로 표현한 지식은 지식에서 'What'의 입장이 아니라 'How'라는 입장에서 NCTM(1991)에서 주장한 가르치는 방법에 대한 지식과 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 가르치는 방법에 대한 지식을 교수법적 지식으로 표현하고자 한다.

그리고 교사는 교실이라는 환경 속에서 특별한 대상, 즉 학생이라는 중요한 존재가 수학을 이해하도록 가르쳐야 한다. 이는 곧 교사는 학생에 대한 지식이 필요함을 시사하는 것으로 학생에 대한, 학생을 위한 지식, 다른 말로하면, 앞서 언급한 학자들이 주장한 교수학적 내용 지식을 정의하게 된다.

따라서, 본 연구에서는 비록, 신념이 교사 지식과 밀접하게 관련되어 있지만 신념은 수학교육 연구의 또 다른 주요한 영역으로 인정하면서, Borko와 Putnam이 정의한 범주를 사용하여 교사 지식을 교과 지식, 교수법적 지식, 그리고 교수학적 내용 지식으로 구분하고자 한다.

## 1. 교과 지식

NCTM(1991)은 수학과 학교수학에 대한 교사 지식에 대한 기준을 수학적 개념과 절차 그리고 그들 사이의 연결성, 수학적 개념과 절차에 대한 다양한 표현, 다른 형식 수준에서 수학적으로 추론하고 문제를 해결하고, 수학을 효과적으로 의사소통하는 방법으로 제시했다. 이

규준은 수학적 지식의 이해뿐 아니라 수학과 학교수학의 포괄적인 이해를 나타낸다. 따라서 교과 지식은 단지 수학적 지식에 한정하지 않는다.

교사의 지식에 대한 논점을 다룰 때, 가장 먼저 떠오르는 것은 수학이다. 수학적 지식의 중요성을 인정하는 가정 중의 하나는 중등학교 교사들이 대학에서 이수해야 하는 학점수이다. 교사가 되기 위해서는 대부분의 학점을 수학과 관련된 과목으로 인정을 받아야 한다. 이런 가정의 밑바탕에는 수학적 지식을 획득하는 것이 수학 교사의 중요한 요소가 된다는 생각이 깔려있다.

수학적 지식의 중요성에 대해 몇몇 학자들은 다음과 같이 말했다. “수학에 대한 지식은 분명 다른 사람이 수학을 공부하도록 돕는데 가장 중요하다”(Ball, 1988a). “기본적인 개념에 대한 확실한 이해는 초등교사가 가져야 하는 중요한 틀이다. …… (그리고) 많은 교사들은 수학을 충분히 알고 있지 않다”(Post, Harel, Behr, & Lesh, 1991). 또한 초등학교와 중학교 교사들의 수학 지식이 풍부하지 않다는 연구도 있다. 예비초등교사의 내용 지식에 대한 연구를 고찰한 후, Brown 등(1990)은 NCTM과 같은 전문적인 기관에서 제안한 초등학교 수학을 가르칠 정도로 예비초등교사들은 수학을 충분히 이해하고 있지 못한 것으로 결론지었다.

수학적 지식이 교사 지식에서 중요하다는 생각과 많은 교사들이 적절한 수학적 지식을 가지고 있지 못하다는 연구에도 불구하고, 교사의 수학에 대한 지식과 학생들의 학습 사이의 관계에 대해서는 그렇게 많은 연구가 이루어지지 않았다. 이러한 연구들 가운데 몇몇을 살펴보면 다음과 같다. National Longitudinal Study of Mathematical Abilities(NLSMA)는 교사들이 이수한 수학 학점수와 학생 학습의 관계를 알아보았으나 어떤 중요한 관계도 찾을 수 없었다(School Mathematics Study Group, 1972). 5년 후, Eisenberg(1977)는 이 연구를 다시 수행하여 같은 결과를 보고했다. 이들 연구에서는 교사가 수학에 대해 무엇을 알고 있는가를 측정하려는 시도나 이수 과정에서 이루어지는 수학이 어떤 것인가를 확인하려는 시도가 이루어지지 않았다.

이후의 몇몇 연구에서는 국가교사시험에서의 교사 성적과 학생 학습사이의 관계를 연구하였으며, 다른 연구는 교사 지식의 획득과 학생 학습 사이의 관계를 조사

하였지만 중요한 점을 시사하지 못했다(General Accounting Office, 1984). 이런 연구를 통해 교사의 지식이 충분하지 않다는 사실은 확인할 수 있었지만, 이런 지식의 결핍이 학습에 심각한 영향을 준다는 증거를 제시하지 못했다. 또한 교사 지식의 측정 방법에서 교사 지식의 복잡성에 비추어 보았을 때 통합적인 측정이 시도되지 못했으며 교사가 알고 있는 형식적인 지식과 가르치는 것 사이의 관계에 대해 의미 있는 접근이 시도되지 않았다(Fennema & Franke, 1992).

그러나 교과 지식은 단지 시험을 통과하기 위해 사용하는 그런 지식 이상의 것이다. 수학을 이해한다는 것은 핵심적인 개념이나 주제 그리고 이들 사이의 관계를 아는 것이며(NCTM, 2000), 어떤 개념을 이끌어내는 기본 원칙이나 간단한 원리를 인식한다는 것이다(Ma, 1999). Leinhardt와 Smith(1985)는 교과 지식을 특별한 교과의 내용, 주제, 그리고 연결을 아는 것으로 설명하였다. Mosenthal과 Ball(1992)은 개념을 표현하고 설명하는 것, 교과에 대해 질문하는 것, 그리고 개념적 이해를 증명하는 것으로 교과 지식을 더욱 상세히 설명했다. 여기서 개념적 이해는 각각의 흩어진 정보만큼이나 연결된 관계가 중요한 지식의 연결망으로 생각할 수 있다. 교사가 분수와 같은 주제를 개념적으로 이해할 때, 여러 주제들을 연결시키는 방법을 안다는 것이다(Hiebert, 1997). 그러나 중요한 주제에 대해 개념적 이해가 부족할 때는 반대로 오개념이 형성된다.

이해라는 측면에서 교사의 지식을 바라보면, 자연스럽게 교사가 가지게 되는 내용 지식을 생각하게 된다. 이것은 앞서 수학적 지식에서 언급한 바와 같이 많은 학자들의 관심을 받으면서, 교과 지식을 가진 교사와 그렇지 못한 교사 사이의 차이를 연구하게 하였다.

교과 지식은 어떤 학년 수준에서 수학을 가르치는 것과 직접적으로 관련된다. 교과 지식은 이전 학년과 다음 학년에서 가르쳐지는 내용을 아는 것을 포함한다. Shulman(1986)은 “교사는 단지 어떤 영역에서 용인된 진리를 학생을 위해 정의할 수 있을 뿐만 아니라, 특별한 명제가 정당화되는 이유, 그것을 알아야 하는 이유, 다른 명제와 어떻게 관련되는가를 그 교과 내에서와 밖에서, 이론적이고 실천적으로 설명할 수 있어야 한다”고 주장했다(p.9). 과목의 구조에 대한 지식 또한 교과 지식

의 일부분이다. Ball(1993)은 3학년년을 가르치면서 세 가지 딜레마에 직면했다고 한다. 어떤 주제나 개념을 표현하는 방법, 학생의 사고와 그들이 알고 있는 것을 이해하는 방법, 그리고 교실 공동체에서 학습을 일어나도록 유도하는 방법이 그것이다. Ball은 교과를 더 잘 이해할수록 학생들을 더욱 잘 이해하면서 가르치는 것 같다고 하였다. 교과 지식은 학교 수학과 수학을 가르치는 것에 대한 이해를 포함한다.

교사가 각 교과에 대한 이해가 부족할 때, 학생들에게 최선의 학습 기회를 제공하기 어렵게 하면서 제한된 교과 지식은 개념적 학습을 제한하게 된다. 이것은 개념을 가르치는 것 대신에, 즉 알고리즘이 어떻게 해서 이루어지는가에 대한 이유나 방법을 이해하도록 학생들을 가르치기보다는 연산의 순서를 기억하는 기억법을 가르치면서 절차를 암기하도록 하게 된다. 교과 지식이 부족한 교사는 학생들이 질문하는 것을 금할 정도로 교과서에 의존하는 경향이 있으며(Ball, 1990b), 교과서 이외의 답에 대해 틀린 답을 인지할 수 없게 된다. 이들 교사에게 교과 지식을 향상시킬 수 있는 기회를 준다는 것은 교사의 능력을 향상시킬 것이며 이는 곧 학생들의 학습 능력에 기여하게 될 것으로 본다.

그러나 교사의 교과 지식을 측정하는 적절하고 효과적인 방법을 찾는 데는 연구자들 사이에 아직도 논쟁이 일고 있다. 과거에, 교사의 교과 지식의 정도를 교사의 전공 이수 학점수, 평점으로 결정하면서, 이런 특징이 교사 자질과 학생 성취 사이에 강한 상관관계를 보이기도 했지만, 학생 성취와 교과 지식 사이의 분명한 관계를 측정하지는 못했다(Ball, et al, 2001). 따라서 Ball(1990b), Grossman(1990), 그리고 다른 연구자들(Ma, 1999; Lampert & Ball, 1998; Steinberg et al., 1985)은 교사 지식의 지표로서 수학에 대한 지식을 포함하여 교사의 교과 지식을 평가하기 위해 다양한 시험과 질문, 개념도, 면담을 사용하였다. 다양한 평가가 교사의 교과 지식의 깊이에 대한 새로운 그림을 제공하면서 이런 연구방법은 교과 지식 측정의 신뢰성을 높였다.

## 2. 교수법적 지식

교과 지식이 효과적인 수업을 위해 중요한 것은 사실

이지만, 교사 지식을 개선하려는 목적에서 보면 모든 것이 될 수 없다. Borko와 Putnam(1996)은 교사 지식의 두 번째 영역으로 교수법적 지식을 들고 있다. 이 지식은 내용 중립적이며 교사가 교육과정, 학습, 학습자와 관련하여 가지고 있는 지식과 신념에 관한 것이다. 학생을 이해하도록 수업을 계획하고, 세운 계획을 수정하고, 수업을 나열하고, 다양한 평가를 실행하는 능력으로 더욱 구체화된다. 이것은 교사 자격 프로그램에서 운영하는 내용 중의 하나이기도 하다.

교수법에 대한 깊은 지식을 가진 교사는 학습이 일어나는 방법과 함께 학습자가 다양한 방법으로 학습한다는 사실을 이해한다. 심리학의 발전으로 이 지식에 대한 이해는 상당한 발전을 이루었다. 이러한 발전은 NCTM(2000)의 수학 규준에 반영되었다. 다섯 가지 과정 규준(문제해결, 추론과 증명, 연결, 의사소통, 표현)과 내용 규준(수와 연산, 대수, 기하, 측정, 자료 분석과 확률)은 같은 맥락을 가지면서, 이들 과정 규준은 학습을 도와주는 다양한 교수 전략에 대한 지식을 포함하고 있다.

교수법적 지식은 또한 학습자에 대한 지식을 포함한다. 학생의 동기부여와 행동에 대한 문제를 다루는 방법을 포함한다. 예를 들어, 수학 교사는 학생의 수준과 환경에 따라 학습 내용을 조직하거나 수정하여 학습자가 흥미를 가질 수 있도록 동기부여를 하고, 다양한 기술과 모델을 사용하여 학습자의 반응에 맞도록 적절하게 조절할 수 있어야 한다(Shulman, 2000; Ma, 1999; Williams, 1996).

교수법적 지식은 교실 관리와 조직, 수업 구조에 대한 일반적인 지식, 그리고 수업 방법에 대한 지식을 포함한다. 성공적인 교실 관리자는 학생이 나타내는 신호를 잘 알아차리고 교실 활동의 원활한 흐름과 목적을 잘 알고 있는 교사이다(Carter, 1990). 더욱이, 능숙한 교사는 학년을 시작할 때 교실 활동의 규범을 빨리 설정한다.

결국, 수업의 전문성에서 보았을 때, 경험 있는 교사는 교실에 대한 정보를 초보 교사와는 다르게 처리한다고 보았다. 예를 들어, 경험 있는 교사는 초보 교사보다 그들이 관찰한 활동에 대한 패턴을 빨리 파악하고 추론하는 것 같았으며, 초보 교사는 활동을 있는 그대로 받

아들이면서 피상적인 설명을 하였다(Berliner, 1986).

교사의 수업 구조에 대한 지식은 수업을 계획하고 가르치기 위해, 수업의 다른 부분으로 자연스럽게 이동하기 위해, 그리고 내용을 명확하게 설명하기 위해 필요한 지식을 포함한다(Leinhardt & Smith, 1985). 이와 함께 수업 구조에 대한 지식은 암묵적으로 가르치는 내용과 관련된다.

어떤 연구자는 교사의 수업 방법에 대한 지식은 특별한 주제를 위해 교육과정 안에 조직되어야 한다고 주장했다(Putnam, 1987). 수업의 내용과 방법이 이 과정 속에 포함되어야 한다는 것이다. 가르치는 방법에 대한 지식은 가르치는 특별한 내용에 대한 지식과 무관한 것이 아니라 중복되는 부분을 가지는 지식으로 보자는 것이다.

### 3. 교수학적 내용 지식

교사 지식의 세 번째 영역은 내용과 교수법의 혼합으로 생각할 수 있다. 이해를 위한 수업은 교과 내용에 대한 지식과 함께 가르치는 방법이 공존해야 한다. 이것은 학습자에게 맞는 다양한 방법으로 어떤 주제를 표현하는 지식과 함께 그 주제에 대한 학습자의 일반적인 개념과 오개념을 이해하고 인식하는 것을 의미한다(Fennema & Franke, 1992).

수학을 가르치기 위해 교사들은 교수학적 내용 지식을 가져야 한다. 교수학적 내용 지식은 교사가 학생의 사고와 학습에 영향을 주는 그들의 교수실체를 반성할 수 있도록 하는 것으로 먼저 학생에 대한 이해가 중요함을 지적하고 있다(Barnett, 1998).

교사는 학생들이 지식을 어떻게 습득하는지를 알아야 할 필요가 있다. 이런 지식은 교육심리학의 분야로서, 인지과학의 관점에서 학습에 대한 연구는 학습자의 사고에 대한 지식과 그 지식이 교사의 의사결정에 어떻게 적용되는가에 대한 논의를 새롭게 했다.

Carpenter 등(1989)의 연구에 의하면, 아동 사고에 대한 교사의 지식은 교실 수업에 중요한 영향을 미친다. 이 연구는 Carpenter와 Moser(1983)의 연구를 기초로 하여 아동에 의해 해결될 수 있는 11가지의 덧셈과 뺄셈 문장제를 규명하였으며, 이 연구를 통해 아동의 인지에

대한 교사 지식의 해석을 위한 바탕을 마련할 수 있었다.

CGI(Cognitively Guided Instruction) 연구는 아동에게 문제를 해결하도록 하고 아동이 문제를 해결하는 방법을 교사들이 예상하도록 하였다. 실험집단(CGI교사) 교사와 통제집단 교사가 그들의 학생에 대해 가지는 지식을 측정된 결과, 실험집단의 교사들은 통제집단의 교사들보다 수업 시간에 훈련활동을 적게 사용했으며 문제해결 활동에 더 많은 시간을 사용하였다. 또한 CGI교사들은 아동의 설명을 듣는데 시간을 더 할애하였으며 아동의 문제 해결 전략을 받아들였다. 실험 교실에서의 아동들은 통제 교실에서 보다 계산 기능과 문제해결에서 좋은 결과를 보였다. CGI연구는 학습자의 사고에 대해 교사가 적절히 작 조직된 지식을 가질 때 학생을 잘 지도할 수 있다는 증거를 제공한다(Fennema & Franke, 1992).

Ball(1988a)은 교사들은 그들이 가르치는 수학에 대해 교육적으로 생각할 필요가 있다고 지적했다. 즉 교사는 개념과 관련되는 절차뿐 아니라 개념을 표현하고 모델링하는 방법, 학습자료를 사용하는 방법을 알아야 한다.

학생에 대한 이해는 결국 학생을 위한 이해로 해석할 수 있는데, 이것은 학생을 위해 특별한 표현이 필요하다는 사실을 끌어낼 수 있다. 수학적 표현에 대한 지식은 복잡한 교과내용을 학생들이 이해할 수 있도록 표현하는 지식이다. 수학을 이해할 수 있는 표현으로 나타내는 것은 수학자와 수학교사를 구별짓는 능력이다. 학교수학을 표현하는 방법 중의 하나는 도식적인 표현으로 기호를 나타내거나 문제를 상황과 관련시켜 나타내는 것이다. 간단한 덧셈과 뺄셈 문제를 모델로 만들거나 실생활 상황으로 다시 표현할 수 있다. 이런 표현 활동은 학생들이 이해를 통하여 추상적인 수학 개념을 학습하는데 도움을 줄 수 있다고 본다. 따라서, 학생이 이해를 통한 학습을 하기 위해서 교사는 수학적 개념을 해석하거나 표현하는 방법을 알아야 한다.

Ball(1988b)은 19명의 예비교사를 대상으로  $1\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}$ 을 문장제나 모델로 표현하는 지식에 관한 연구를 하였다. 이 연구에서 예비교사들 중 2명을 제외한 모두가 문제에 맞는 계산은 정확하게 맞았지만, 예비초등교사들 중 어느 누구도 문제에 적절한 표현을 할 수 없었고 예비중등교사들의 약 반 정도만이 적절한 표현을 할 수 있

었다. 이들 예비교사들은 답을 계산하는 규칙이나 절차는 잘 알고 있었으나 이런 절차적 지식을 학생들이 개념을 이해하도록 돕는 형태로 표현할 수는 없었다. Orton(1988)은 분수 개념에 대한 예비교사의 표현에 대한 지식을 연구한 후, 예비초등교사들의 대부분이 분수에 오개념을 가진 학생을 어떻게 지도할 것인가에 대한 물음에 대부분의 예비교사들은 개념적 이해를 촉진시키는 표현보다는 절차나 기호적 표현을 주로 사용하였다고 보고한다.

교사는 또한 학생들이 자신의 방법으로 수학적 지식을 구성하도록 격려하는 방법과 학생들의 수학에 대한 이해를 평가하는 방법을 알아야 한다. Carpenter 등(1988)은 다음과 같이 말했다.

교수학적 내용지식은 학생들이 한 주제의 학습에 가져오는 개념적이고 절차적인 지식에 대한 이해, 그들이 발달시킬지도 모르는 주제에 대한 오개념, 그리고 그들이 이해를 전혀 하지 못하는 상태에서 완전히 이해하는 상태로 변하면서 지나게 되는 이해의 단계에 대한 지식을 포함한다. 그것은 또한 학생들의 이해를 평가하고 그들의 잘못된 오개념을 진단하는 지식, 학생들이 현재 학습하는 것을 이미 소유한 지식과 연결할 수 있기 위해 사용되는 교수 전략에 대한 지식, 그리고 그들이 발달시킬지도 모르는 오개념을 제거하는 교수전략에 대한 지식을 포함하다(p.386).

NCTM(1991)은 또한 수학을 가르치는 교수법적 지식을 상세하게 설명했다. 이것들은 다음의 것들에 대한 지식과 사용하고 평가하는 능력을 포함한다. a)교수 자료와 자원, b)수학 개념과 절차를 표현하는 방법, c)교수 전략과 교실 조직 모델, d)답화를 증진시키고 수학적 공동체감을 형성하는 방법, 그리고 e)수학에 대한 학생들의 이해를 평가하는 수단이다. 이 지식은 과제를 선택하고 특별한 학습 목표를 위한 그들의 교수를 조직하는데 더욱 필요한 지식이다.

1973년에서 1983년 동안 교사 행동과 학생 성취사이의 관계에 대한 연구를 고찰한 후, Brophy와 Good(1986)는 결과물을 통합하여 교사 행동은 학생 성

취에 궁극적으로 영향을 미친다고 종합했다. 교사의 행동에는 수학을 기호나 그림으로 표현하는 것, 학생에게 질문하는 것, 학생의 반응에 대한 반응, 그리고 교실에서 부과하는 과제나 가정에서 이루어지는 과제를 제시하는 것 등이 포함된다. 이런 행동은 부분적으로 교사의 교수학적 내용 지식으로부터 영향을 받을 수 있다.

Grossman(1990)은 교수학적 내용 지식을 네 가지로 언급하였다. 첫째, 교사는 학습 범위 내에서 학습 내용을 학습자를 위해 적절하게 구조화시켜 개념화할 수 있어야 한다. 둘째, 교사는 학생들이 전형적으로 나타내는 개념과 오개념을 인식해야 한다. 셋째, 교사는 다양한 방법으로 한 주제를 표현할 수 있어야 한다. 넷째, 교사는 어떤 주제를 위해 적절한 학습 재제를 사용하기 위해 교육과정과 학습자를 이해할 필요가 있다.

위의 논의로부터, 교수학적 내용 지식은 교사가 수업을 계획하고, 가르치고, 평가하는데 사용하는 복잡한 과정임을 알 수 있다. 게다가, 이 지식은 교과 지식과 같은 교사 지식의 다른 측면과도 관련되어 있다.

요약하면, 교수학적 내용 지식은 교사가 학생을 가르친다는 입장에서 학습의 주체자인 학습자에 대한 이해가 중심이 되어야 한다는 것이다. 따라서 수학교사는 수학에 대한 학생의 개념을 확인하는 경험, 어떤 영역에서 학생들이 해결할 때 사용하는 전략, 그리고 수학에 대한 학생의 태도와 신념을 확인하는 경험을 가져야 한다. 수학교사들은 또한 수학 교수학습에 대한 현재의 이론과 연구 결과를 잘 알고 있어야 하고 그것을 교실에 적용하는 기회를 가져야 한다(Quisenberry & Partridge, 1993; NCTM, 1991).

### III. 교사 지식과 교실 수업과의 관계

수학에 대한 교과 지식과 관련한 연구는 많이 있지만 이 지식과 교실 수업 사이의 관계에 대한 연구는 상대적으로 많이 부족한 실정이다. 여기서는 이 관계성에 면밀한 조사를 한 네 연구를 살펴볼 것이다. 먼저 Leinhardt와 Smith(1985)와 Lehrer와 Franke(1992)의 두 연구는 분수 영역에서 경험 있는 교사와 초보 교사의 지식, 지식의 조직, 교실 수업과의 관계를 조사하였다.

Thompson과 Thompson(1994)의 연구는 한 교사의



수학에 대한 교과지식이 비의 개념에 대한 수업에서 사용하는 언어에 어떻게 반영되는가를 연구하였다. 그리고 비교적 최근에 이루어진 Buckreis(2000)의 연구는 곱셈과 나눗셈에서 내용 지식의 차이를 가지고 있는 특정한 교사를 분석하여 내용 지식 구조의 차이가 교실 수업과 학생 학습에 어떻게 관련되는가를 탐구하였다.

Leinhardt와 Smith(1985)는 경험 있는 초등교사의 수업 구조 지식과 교과 지식이 수업 행동과 어떻게 관련되는가에 대하여 연구하였다. 8명의 4학년 수학교사를 연구대상으로 하였으며, 이들 중 4명은 경험 있는 교사이고 4명은 초보 교사이다. 경험 있는 교사는 학생들의 수학 점수가 5년 동안 계속해서 특별하게 향상되었기 때문에 선정하게 되었으며 초보 교사는 교사 연수 프로그램의 마지막 학년으로서 지도교수에 의해 추천을 받은 교사들이었다.

처음 2년 동안 다양한 자료가 관찰, 면담, 카드 분류과제를 통해 수집되었다. 연구의 처음 2년 간 3달에 걸쳐 교실 관찰이 이루어졌다. 모두 10시간 분량의 수업을 비디오 녹화하였으며 수업의 계획, 녹음된 수업 내용, 분수에 대한 지식과 관련된 사항에 대해 면담이 이루어졌다. 그리고 4학년 수학 교과서의 내용 중 계산문제를 다루는 단원에서 무작위로 선정한 40문제로 만든 카드 문제를 교사들과 교생들에게 제시하였다.

분석은 두 가지로 이루어졌다. 하나는 혼란스러워 하거나 잘못 이해하는 어떤 패턴뿐 아니라 바르게 이해하고 있는 어떤 일관된 패턴을 알아보기 위해 면담과 카드 분류를 통해 분석하였으며, 다른 하나는 2명은 높은 지식 수준을 가지고 1명은 중간 수준의 지식을 가진 것으로 보이는 세 교사의 수업을 녹화하여 수업을 분석하는 것이었다. 각 교사는 같은 교재를 사용하였으며, 같은 내용을 수업하였다.

카드 분류의 결과 높은 지식을 가진 교사와 초보 교사의 지식 사이에 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. 높은 지식을 가진 경험 있는 교사는 45개의 수학 문제를 10개의 범주로 분류하여 가르치기 어려운 순서로 문제를 정리하였으며, 초보 교사는 각각 또는 두 문제로 범주화하였고 난이도에 차이를 나타내지 않았으며 어떠한 내적 연결성도 지적하지 않았다. 하지만 경험 있는 교사는 더욱 세심한 지식 구조를 보였다.

분수와 관련된 4 문제에 대한 면담에서도 비슷한 결과가 나타났다. 첫 번째 문제는 참여자가 분수를 정의하는 것이었다. 교사들 중 7명이 전체에 대한 부분의 관계로 분수를 정의하였다. 나머지 교사는 분수를 0과 1 또는 0과 다른 자연수 사이의 한 점으로 정의하였다. 이 교사는 수직선을 일관되게 사용하였으며 분수를 측정의 과정으로 본 유일한 교사였다.

두 번째 문제는 참여자들이 동치분수를 정의하는 것이었다. 모든 교사들은 바르게 정의할 수 있었다. 그러나  $3/7$ 과  $243/567$ 이 동치분수인가를 물었을 때, 한 경험 있는 교사와 두 명의 초보교사는 동치가 아니라고 하였다. 지식 수준이 낮은 교사들은 81을 인수로 가지면서 그 분수는 동치가 아니라고 하거나 잘 모르겠다고 하였다. 반대로, 높은 수학적 지식을 가진 두 교사는 곧바로 동치라고 하였다.

세 번째 문제는 단위 개념을 알아보는 것이었다. 분수  $3/4$ ,  $5/5$ ,  $5/4$ 를 나타내는 그림을 그리도록 했을 때, 한 명을 제외한 모든 교사가 바르게 그렸다.

네 번째 문제는 비와 분수 두 개념에 관한 것이었다. 교사들에게 비와 분수 사이에 어떤 차이가 있는가를 물었을 때, 교사 모두는 분수는 비와 같거나 유사하다는 반응을 보이기도 하였으며 잘 모르겠다는 반응도 있었다. 다시 말하자면, 모든 교사는 비와 분수를 명확히 구분하지 못하였다.

카드 분류 과제와 면담을 통해 4명의 경험 있는 교사의 수학 교과 지식 사이에 차이가 있음을 알 수 있었다. 이들 교사 모두 학생의 성적이 높지만, 2명의 경험 있는 교사는 높은 수학 지식을, 1명은 적절한 지식을, 또 1명은 교실 수업에 충분하지 않은 지식을 가졌다. 4명의 초보 교사는 보통의 수준이거나 낮은 수준의 수학 지식을 가진 것으로 나타났다.

지식 수준이 낮은 한 명의 교사를 제외한 세 명의 경험 있는 교사의 수업을 분석한 결과 학생들을 가르치는 수업 실제에서는 많은 차이가 있는 것으로 나타났다. 첫째, 알고리즘적인 정보를 제시하는 수준에서의 차이뿐만 아니라 개념적인 정보를 제시하는 수준에서 상당한 차이가 있었다. 둘째, 교사들은 제시하는 방법에서 근본적인 차이가 있었다. 한 교사는 공약수를 사용하여 분수를 줄이는 방법을 사용한 반면, 다른 두 명의 교사는 동치분

수를 찾는 방법과 반대되는 방법, 즉  $1/2$ 과 같은 분수를  $2/4, 3/6, 4/8$ ...으로 찾는 방법의 역순으로 분수를 줄여 가는 방법을 사용하였다. 셋째, 수직선 모델, 넓이 모델, 수 모델과 같은 분수를 나타내는 각기 다른 방법을 사용한다는 것이다.

이 연구의 결과 경험 있는 교사와 초보 교사의 분수에 관한 교과 지식에 실제적인 차이가 있는 것으로 나타났다. 일반적으로, 비록 한 명의 교사가 부족한 지식을 가진 것으로 나타났지만 경험 있는 교사는 더욱 깊은 이해를 하고 있었다. 수업을 통해 분석해 볼 때, 세 명의 경험 있는 교사는 각각 다른 지식 수준에서 다양한 접근 방식으로 분수에서 강조하는 바가 각각 다르다는 것을 알 수 있었다. 이들 세 명의 교사 모두 학생들의 성적이 모두 높았지만, 그들 각자는 가르치는 능력에서 큰 차이가 있었다.

Leinhardt와 Smith(1985)는 교사가 교과 지식의 수준이 높아지고 그들의 지식을 수업에 유연하게 연결하게 될 때 학생들의 수학적 능력 또한 향상된다고 하였으며, 분수에 대한 개념 형성을 위해 교과서에서 더욱 자세한 설명이 있어야 할 것으로 주장했다.

Lehrer와 Franke(1992)는 분수에 대한 두 교사의 교과 지식과 교실 수업의 상호작용을 알아보기 위하여 개인구성심리학<sup>1)</sup>을 기본적인 연구 방법으로 사용하였다. 이 연구는 수업 실재에서 분명하게 차이가 있는 것으로 나타난 두 교사를 연구대상으로 하였다. 2학년 교사인 Ms. Hunter는 17년의 교육경력을 가지고 있으며 수학 수업 대회에서 상을 받은 경험이 있다. 그녀는 문제해결에 중점을 두고서 수업을 하였으며, 학생들에게 문제를 내고 학생들의 해결 방법에 귀를 기울이는 아주 적극적인 자세를 보였다. 이와는 대조적으로, 5년의 교육경력을

가진 5학년 교사 Ms. Gardner는 교과서의 내용에 따라 문제를 제시하고 보기를 들었다.

연구 문제는 다음과 같았다.

1. 개인구성심리학은 다른 연구에서 발견된 교사 지식의 다양한 구성요소를 도출하기 위한 방법을 제공하는가?
2. 교사 지식의 구성요소들 사이에 잠정적인 관계가 있는가?
3. 개인의 구성을 분석하여 얻은 교사 지식에 대한 설명과 교실 수업 실제 사이에 어떤 관련이 있는가?(p.225)

면담과 관찰을 통하여 자료를 수집하였으며, 면담을 하는 동안 교사들에게 몇 가지 활동을 제시하였다. 먼저, 3개의 분수 문제를 제시하고 내용적으로 나머지 한 문제와 다른 두 문제가 어떤 것인가를, 그리고 그 문제를 학생들이 어떻게 생각하겠는가를 생각해보도록 하였다. 다음으로, 분수 문제 12문제가 포함된 이와 같은 형태의 10 문제를 제시하였다. 문제는 분수의 정의, 표현, 순서, 동치, 연산과 관련하여 교사의 지식을 알아보는 데 초점을 두었다. 문제는 서로 어떻게 같으며 또 어떻게 다른가?, 어떤 두 문제가 유사한가? 그 이유는? 학생들이 문제를 해결하는 방법과 관련해서 이 문제는 어떻게 다른가? 와 같은 질문을 교사들에게 제기하여 교사의 내용지식을 검사하였다.

문제 제시 후, 교사의 반응에 따라 연구자가 작성한 구성 목록을 교사들에게 보여주었으며 교사들에게 각 구성에 대하여 분수 문제 12문제 각각의 관련 정도에 따라 10점에서 1점의 점수를 주도록 하였다. 구성을 도출한 다음, 두 교사가 분수 관련 수업을 하고 있는 어느 날 교실 수업 관찰이 이루어졌다.

각 교사가 구성한 목록은 분수에 대한 내용지식, 일반적인 교수 지식, 분수 교수와 관련된 교수학적 지식에 따라 분류하였다. 연구 결과 분수 문제에 대한 두 교사의 반응 사이에 서로 다른 다양한 구성이 있음을 알 수 있었다. Ms. Hunter는 모두 33개의 구성을 나타낸 반면 Ms. Gardner는 단지 18개의 구성을 보여주었다. Ms. Hunter의 구성은 일반적으로 분수를 가르치는 것과 관련된 교수법에 집중되어 있었지만 어느 것도 단순한

1) 개인구성심리학은 어떤 의미에 대한 각 개인의 해석을 강조하는 구성주의자의 관점에 기초하고 있다. 의미를 해석한다는 것은 각 개인이 한 사건에 대해 예상하거나 조절할 수 있도록 하는 구성을 만든다는 것이다. 예를 들어, 분수와 관련된 서로 다른 3문제를 각각 2문제는 이산량으로 1문제는 연속량과 관련시켜 해석한다거나 1문제는 수직선 모델로 2문제는 직사각형 모델로 표현해야하는 것으로 해석한다면 이때 이산량과 연속량 또는 수직선 모델과 직사각형 모델은 각 개인이 해석한 구성이 되는 것이다.

알고리즘이나 절차를 가르치는 것과 관련된 것은 없었다. Ms. Gardner는 분수 문제를 해결하기 위한 분수 알고리즘의 기초가 되는 개념과 분수 문제를 해결하는 절차에 대한 구성을 주로 나타내었다.

공분모 분수의 뺄셈을 가르치는 Ms. Gardner의 수업을 분석해 보았을 때, Ms. Gardner의 행동은 도출된 구성과 일치하는 것으로 나타났다. 그녀는 구성에서 나타난 것과 같이 전체의 부분으로서의 분수에 중점을 두었다. 부분이 모여 전체가 되며 이 전체는 분모가 된다는 사실에 주목하면서 이것을 설명하기 위해 그림을 그렸다. 전체 수업을 하든, 소집단 활동을 하든, 개별 수업을 하든 어려움을 가진 학생들에 대한 그녀의 반응은 부분과 전체의 관계로서 자신의 입장을 설명하는 것이었으며 학생이 어떻게 이해하는가에 바탕을 두고 있지 않았다.

Ms. Hunter의 수업은 대체적으로 학생 중심적이었다. Ms. Hunter는 학습자료를 사용하였으며, 친숙한 분수로서 수업을 시작하면서 그 시간 가르칠 내용과 관련이 많은 다른 내용을 연결지으면서 그림이나 기호로서 분수를 표현하였다. 또한 상호작용적인 대화를 이끌었으며 가분수와 진분수의 이해에 초점을 두었다. 이런 활동은 모두가 Ms. Hunter의 지식 구조의 일부분으로 도출된 구성과 일치하였다.

사례연구에 대한 이런 방법은 연구자가 교사의 구성을 도출하였으며 이를 교실 실제와 관련하여 분석하는 것이었다. 교사가 도출한 구성들 사이의 관계는 교실 수업에 그대로 반영되고 있음을 알 수 있었다.

Thompson과 Thompson(1994)은 수학에 대한 한 교사의 지식이 비 개념을 가르치는 언어에 어떻게 반영되는가를 연구하였다. 연구 대상은 Bill이라고 부르는 한 교사로 6학년에서 8학년 수학을 가르치고 있었다. 연구 시기에, Bill은 중학교에서 2년 동안 근무하고 있었으며 그 학교에서 가르치기 전에 고등학교 물리, 화학, 자연과학을 가르쳤다. 교사가 되기 전에 Bill은 사업을 했으며 그가 1986년에 퇴임하면서 교사에 관심을 가졌다.

연구 목적은 Bill이 교사로서 수학을 경험하는 방법과 Ann이라고 부르는 6학년 학생에게 비 개념을 가르치기 위해 그런 방법이 어떻게 언어에 반영되는가를 분석하는 것이었다. 교수 경험이 속력과 비의 개념에 대한 학생의 구성에 어떻게 반영되는지 그리고 학생이 가지는 속력과

비 개념 사이에 교수 경험이 어떤 관계를 가지는가를 알아보는 것에 중점을 두었다. 1대 1 수업에서 Bill은 비를 개념적인 언어로 표현하는 데 어려움을 가지고 있는 것으로 나타났다. 그의 설명은 본질적으로 알고리즘에 의존하였으며 Ann이 개념적 이해를 하도록 도울 수 없었다. 결국, Bill이 가지고 있는 문제는 Ann이 이해할 수 있는 상황을 표현하는 적절한 언어를 구사할 수 없다는 것이었다.

Thompson과 Thompson은 비록 Bill 자신은 비에 대한 개념이 명확하게 형성되어 있지만 한 학생을 가르치는 상황에서는 비를 설명하는 언어가 수와 연산과 관련되는 언어로만 한정되어 Ann이 비에 대한 개념을 이해하도록 돕기에는 부족한 면이 있었다고 결론지었다. 또한 연구자는 다른 연구 결과와 같이 이 연구도 교사가 알고 있는 것과 학생들이 학습하는 것 사이의 분명한 관련성을 알아내는 데는 실패했다고 지적했다. 이 연구를 통해 교사가 한 개념에 대해 개념적 이해를 하고 있다는 것은 어떤 의미인지, 이해를 하고 있다는 것이 어떻게 대화에서 나타나는지에 대한 많은 연구가 있어야 한다고 제안했다.

Buckreis(2000)는 교사의 교과 지식과 교실 수업과의 관계에 대해 좀 더 구체적으로 연구하였다. 초등수학에서 주요한 내용인 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 내용 지식으로 선택하여 이 지식에서 차이가 교실 수업과 학생의 학습에 어떻게 관련되는가를 알아보았다. 내용 지식 가운데 적어도 두 부분에 대해 서로 다른 양상을 가진 Meg이라는 한 교사와 Meg의 학생들을 연구대상으로 한 단일 사례 연구방법으로 이루어졌다. 자료의 수집과 분석에는 양적인 방법과 질적인 방법을 함께 사용하였다. 지식 구조에서 차이를 보인 곱셈과 나눗셈에 대한 교실 수업과 학생 학습을 상세히 기술하기 위해 반구조화된 면담, 교실 관찰, 학생 면담이 이루어졌으며, 곱셈과 나눗셈 단원의 수업 후 학생들에게 사후 평가를 하였다. 사후 평가의 목적은 단원 내용에 대해 학생들이 가지는 이해와 다양한 문제해결 상황에 Meg의 교과 지식이 어떻게 적용되었는가를 알아보는 것이었다.

Meg은 경험 있는 초등교사로 4학년을 담당하고 있었으며, 약 350명의 학생으로 구성된 이 학교는 대체적으로 부유하며 다양한 민족으로 구성되었다. 덧셈, 뺄셈,

곱셈, 나눗셈에 대한 Meg의 교과 지식 구조를 평가할 목적으로 연구가 시작되기 전 면담이 이루어졌고 또한 부가적인 정보를 얻기 위해 수업 관찰 단계에서도 면담이 이루어졌다. 면담 후 7주 동안 곱셈과 나눗셈 단원을 수업하는 동안 하루에 약 한 시간씩 일주일에 3일간 교실을 관찰하여 모두 20번의 교실 관찰을 하였다. 수업 관찰의 끝에, Meg이 설정한 단원 목표와 관련하여 곱셈과 나눗셈에 대한 학생 평가를 실시하였으며, 사후 평가 후 3주 안에 다양한 성취를 이룬 6명의 학생에 대해 부가적인 정보를 위해 면담을 실시하였다. 연구자가 수업을 더 깊이 분석하기 위해 매 수업마다 비형식적인 면담을 하였으며 마지막 면담은 마지막 교실 관찰 후 이루어졌다.

분석의 결과, Meg의 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대한 교과 지식은 양호하였다. 그러나 나눗셈에 대한 이해는 불완전하였으며 제한적이었다. Meg은 나눗셈을 측정이나, 동수누감과같은 그루핑(grouping)으로 이해하는 능력이 결여되었으며 모든 나눗셈 상황을 분할로서 바라보고 있었다. 곱셈에서는 표준 알고리즘에 대해 개념적인 이해를 하고 있었으나 나눗셈에 대해서는 개념적 기초가 부족하였던 것이다.

Meg은 교과서를 따르지 않았으며, 나눗셈에 대해 불완전한 지식을 가지고 있었지만 곱셈과 나눗셈을 위해 스스로 단원을 구성하였다. Meg이 선택한 학습제재, 개념과 절차를 표현하는 방법, 교수 전략, 그리고 대화를 촉진시키는 방법은 수학교육 개혁의 권고와 일관되었다(NCTM, 1991, 1995). 그러나 Meg의 나눗셈에 대한 불완전한 교과 지식은 자신이 구성한 곱셈과 나눗셈 단원의 수업계획, 교실 수업, 그리고 학생 학습에 그대로 나타났다.

수업에서, Meg의 나눗셈에 대한 불완전한 지식은 나눗셈과 관련한 모든 부분을 다루는데 방해가 되었다. 학생들은 그루핑 유형의 나눗셈 문제를 인식하고, 모델화시키고, 문제를 해결하는데 적절한 기회를 제공받지 못했다. 학생들의 모델과 문장제는 분할 나눗셈에 단지 집중되었으며, 나눗셈 알고리즘을 이해에 바탕을 두고 발달시키지 못했고 가분성(divisibility)에 잘못된 개념이 나타났다.

학생들이 보여준 학습은 Meg이 가진 불완전한 이해

와 제한된 지식의 결과로서 제시된 수업과 직접적으로 관련되어 있는 것으로 연구자는 결론지었다.

#### IV. 결론

교사의 지식에 관한 연구를 수행한다는 것은 사실 다양한 면에서 이루어져야 한다. 신념과 지식이 서로 간에 영향을 줄 수 있는 부분이 있고 지식은 교실이라는 특수한 상황에서 전개되기 때문에 지식은 어떤 맥락에서 이해되어야 할 부분도 있다. 그러나 본 연구에서는 지식과 관련한 다른 많은 부분은 배제하고 단지 수학교사가 학생들에게 수학을 가르치는 것과 관련된 지식에 한정하여 이러한 지식의 유형과 이 지식이 수업 실제와 어떻게 관련되는가를 분석해 보았다.

연구 결과 수학 교사에게는 무엇보다도 수학에 대한 지식이 필요함을 알 수 있었다. 수학을 안다는 것이 과연 무엇을 의미하는지 그리고 어떤 수학 내용을 알아야 하는지에 대해서는 아직도 서로 다른 입장이 있지만 수학교사는 대학에서 학문으로서 수학을 배웠지만 학교에서 가르치는 학교 수학에 대한 깊이 있는 이해가 필요하다는 것이다. 수학에 대한 명확한 이해가 가르치는 방법을 보장할 수는 없지만 수학교사는 자신이 알고 있는 수학을 학생이 이해할 수 있도록 표현하는 방법을 알아야 할 것이며 이것은 학생이 가지고 있는 수학에 대한 이해 정도에 따라 달리 표현되어야 하기 때문에 학생의 사고에 대한 지식이 요구된다.

수학교사에게 필요한 지식을 수학, 표현, 학생에 대한 이해로 압축해서 나타낼 만큼 이 세 가지 지식이 교사 지식의 최소한의 필요조건이라고 한다면 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식은 앞의 세 지식을 포함하는 보다 포괄적인 지식으로 정의할 수 있다. 비록 교사의 지식을 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식으로 구분하고 있지만 이 지식들은 서로 중복되면서 상호간에 영향을 주고 있음을 알 수 있었다.

수학교사의 지식과 수업 실제와의 관계에 대한 네 연구를 분석한 결과 두 연구(Buckreis, 2000; Lehrer & Franke, 1992)에서는 교사가 가진 지식은 교실 수업에 그대로 반영되면서 학생의 이해에 직접적으로 관련되어 있다고 주장하였다. 그리고, Leinhardt와 Smith(1985)의

연구도 교사가 교과 지식의 수준이 높을 때 학생들의 수학적 능력이 향상된다고 주장하였다. 비록, Thompson & Thompson(1994)의 연구가 교사가 알고 있는 것과 학생들이 학습하는 것 사이의 분명한 관련성을 알아내는데는 실패했다고 지적했지만, 이는 교사가 한 개념을 이해하고 있다는 것에 대한 분명한 정의가 이루어지지 않은 상태에서 연구가 이루어진 것에 기인한다고 볼 수 있다. 또한, Thompson과 Thompson의 연구에서 교사 Bill은 수학에 대한 이해가 견실하다고 볼 수 있지만 교수학적 내용 지식이라는 측면에서 바라보면 부족한 지식을 소유한 교사로 볼 수 있다. 그리고 학생에 대한 이해가 부족한 지식으로 인하여 Bill은 비에 대한 개념을 Ann에게 적절한 언어로 설명할 수 없었던 것으로 해석할 수 있다. 네 편의 문헌을 통해 볼 때, 교과 지식이 확고한 교사들은 학생들의 질문에 적절하게 반응할 수 있었으며, 다양한 수학적 표현을 포함하는 적절한 학습활동을 계획할 수 있었다. 또한 교실에서 일어나는 수학적 담화를 수학적 활동이 일어나도록 적절하게 조절할 수 있었다(Buckreis, 2000; Lehrer & Franke, 1992; Leinhardt & Smith, 1985). 그러나 부족한 교사 지식은 학생의 이해를 돕기에 제한적이었다(Thompson & Thompson, 1994). 따라서 교사의 지식은 어떤 형태론든 수업의 실제와 상당히 관련이 있다는 결론을 얻을 수 있다.

교사의 지식과 수업 실제와 관련된 연구를 고찰하면서 앞으로의 연구를 위해 몇 가지 논의할 사항이 있었다. 먼저, 수업 실제와 관련되는 연구의 분석에는 본질적인 한계가 있었다. 비록 이 네 연구가 초등학교와 중학교 수학교사의 교사 지식과 관련된 것이지만 연구에서 다루고 있는 내용이 분수와 비 개념에 한정되었다는 것이다. 지식이라는 것이 이해를 통해 형성되는 것으로 본다면 이해라는 것은 서로 다른 내용에 대한 많은 연결이 이루어질 때 그 깊이가 더해간다고 할 수 있다(Hiebert & Carpenter, 1992). 이런 의미에서 본다면 교사의 지식을 어느 한 영역에 편중하여 평가한다는 것은 교사 지식에 대한 충분한 이해를 제공하지 못하게 된다.

다음으로, 대부분의 연구에서 교사들은 연구자에 의해 제시되는 문제에 반응하는 형식을 따랐는데 연구자들이 제시하는 문제가 과연 교사의 다양한 지식 측면을 알아보는데 적절하였는가라는 사실을 재고해 보아야 할 것

이다. 각각의 연구들은 특정한 영역에 한정된 주제를 평가하면서 연구자가 선정한 몇 가지 기준에 따라 설정된 문제에 특별한 방법으로 표현하였다. 이것은 앞서 교사의 지식 유형에서 살펴본 다양한 수학교사의 지식을 알아보는 데는 충분하지 않은 것으로 본다. 교사의 지식을 평가하기 위해서는 개방적인 질문 형식을 갖추면서 교과 지식, 교수법적 지식, 교수학적 내용 지식을 보다 심층적으로 분석할 수 있는 문제를 구성하여야 할 것이다.

세 번째로, 교사 지식과 수업 실제의 관계를 연구하는 데 있어서 중요한 자료가 될 수 있는 교과서에 대해 다시 한번 생각해 보아야 할 것이다. 교과서를 초월하여 자신이 구성한 교재로 수업을 하는 교사도 있지만, 교과서는 대부분의 교사들이 실제 수업하는 현장에서 중요한 영향을 주는 자료라고 볼 수 있다. 수업 속에서 표현되는 교육과정이 바로 교과서라고 해도 과언이 아닐 정도로 교과서가 차지하는 비중이 높고 많은 교사가 교과서에 의존하고 있는 실정을 인식한다면 교과서를 비롯한 교재가 수업 실제에 어떤 영향을 주는가에 대해서도 깊은 논의가 이루어져야 할 것이다.

마지막으로, 교사 지식과 수업 실제와의 관계를 연구하는 문헌에서는 아쉽게도 국내 문헌에서는 이러한 문제를 구체적으로 다루고 있는 연구가 이루어지고 있지 않다는 것이다. 이를 위해서는 무엇보다 교사의 교과 지식이나 교수학적 지식이 수업 실제와 어떻게 관련되는가에 대한 국내 실정에 맞는 연구가 꼭 이루어져야 할 것으로 본다. 이런 연구가 진행될 때에야 비로소 교사 교육의 실천에 대한 진지한 논의가 일어날 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- 부산광역시교육연수원(2003a). 중등학교 수학과 1급 정교사 자격연수 교재.  
 \_\_\_\_\_ (2003b). 중등학교 수학과 직무연수 교재.  
 \_\_\_\_\_ (2003c). 초등학교 1급 정교사 자격연수 교재.  
 \_\_\_\_\_ (2003d). 초등학교 수업개선 직무연수2(수학) 교재.  
 Ball, D. L. (1988a). *Unlearning to teach mathematics*, East Lansing: Michigan State University, National Center for Research on Teacher Education.

- Ball, D. L. (1988b). *Examining the subject matter knowledge of prospective mathematics teachers*, Unpublished manuscript.
- Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(2), pp.132-144.
- Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education, *The Elementary School Journal* 90, pp.449-467.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics, *Elementary School Journal* 93(4), pp.373-397.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.), Washington, DC: American Educational Research Association.
- Barnett, C. S. (1998). Mathematics case methods project, *Journal of Mathematics Teacher Education* 1(3), pp.349-356.
- Berliner, D. C. (1986). In pursuit of the expert pedagogue, *Educational Researcher* 15(7), pp.5-13.
- Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach, In R. C. Calfee & D. Berliner (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp.673-708), NY: Macmillan.
- Brophy, J., & Good, T. L., (1986). Teacher behavior and student achievement, In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd edition, pp. 328-375). NY: Macmillan.
- Brown, S. I., Cooney, T. J., & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education, In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp.639-656). NY: Macmillan.
- Buckreis, W. F. (2000). *Elementary mathematics teacher subject matter knowledge and its relationship to teaching and learning*, Doctoral dissertation, Oregon State University, Oregon.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. & Carey, D. A. (1988). Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* 19, pp.385-401.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P. & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study, *American Educational Research Journal* 26(4), pp.499-532.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts, In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp.7-14). NY: Academic Press.
- Carter, K.(1990). Teachers' knowledge and learning to teach, In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp.291-310), NY: Macmillan.
- Eisenberg, T. A. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education* 8, pp.216-222.
- Elbaz, F. (1983). *Teaching thinking: A study of practical knowledge*, NY: Nichols.
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164), NY: Macmillan.
- General Accounting Office. (1984). *New directions for federal programs to aid math and science teaching* (GAO/PEMO-85-5), Washington, DC: Author.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*, New York: Teachers College Press, Teachers College Columbia University.
- Goldsmith, L., & Schifter, D. (1997). Understanding

- teachers in transition: Characteristics of a model for developing teachers, In E. Fennema & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp.19-54). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Pre-service elementary teachers' performance and beliefs, *Journal for Research in Mathematics Education* 7, pp.263-280.
- Hiebert, J. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*, Portsmouth, NH: Heinemann.
- Kennedy, M. M., Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1993). *A study package for examining and tracking changes in teachers' knowledge*, East Lansing, MI: Michigan State University, National Center for Research on Teacher Education.
- Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fraction and non-standard representations: Preservice teachers' concepts, *Educational Studies in Mathematics* 27, pp.191-204.
- Lampert, M., & Ball, D. (1998). *Teaching, multimedia, and mathematics: Investigations of real practice*, NY: Teachers College Press.
- Lehrer, R., & Franke, M. L. (1992). Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions, *Journal for Research in Mathematics Education* 23(3), pp.223-241.
- Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge, *Journal of Educational Psychology* 77(3), pp.247-271.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Manouchehri, A. (1998). Mathematics curriculum reform and teachers: What are the dilemmas? *Journal of Teacher Education* 49(4), pp.276-286.
- Mosenthal, J. H., & Ball, D. L. (1992). Constructing new forms of teaching - subject matter knowledge in in-service teacher education, *Journal of Teacher Education* 43(5), pp.347-356.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*, Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.
- Orton, R. E. (1988). *Using representations to conceptualize teachers' knowledge*, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning, *Educational Researcher* 17(5), pp.5-14.
- Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts, In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp.177-198), Albany, NY: State University of New York Press.
- Prawat, R. S., Remillard, J., Putnam, R. T., & Heaton, R. M. (1992). Teaching mathematics for understanding: Case studies of four fifth-grade teachers, *Elementary School Journal* 93(2), pp.145-152.
- Putnam, R. T. (1987). Structuring and adjusting content for students: A study of live and simulated tutoring of addition, *American Educational Research Journal* 24(1), pp.13-48.
- Quisenberry, N. L., & Partridge, E. (1993). Preparation of elementary teachers, *Childhood Education* 70(1), pp.34-35.
- School Mathematics Study Group. (1972). Correlates of mathematics achievement: Teacher background and

- opinion variables, In J. W. Wilson & E. A. Begle (Eds.), *NLSMA Report* (No. 23, Part A), Palo Alto, CA: Author.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* 15(2), pp.4-14.
- Shulman, L. S. (2000). Teacher development: Roles of domain expertise and pedagogical knowledge, *Journal of Applied Developmental Psychology* 21(1), pp.129-135.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division, *Journal for Research in Mathematics Education* 24(3), pp.233-254.
- Steffe, L. P. (1990). On the knowledge of mathematics teachers, In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp.167-184), *Journal for Research in Mathematics Education Monographs*, (4).
- Steinberg, R., Haymore, J., & Marks, R. (1985). *Teachers' knowledge and structuring content in mathematics* (Technical Report No. CC-09), Stanford, CA: Knowledge Growth in a Profession Project, Stanford University.
- Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle, *Journal for Research in Mathematics Education* 25, pp.279-303.
- Tirosh, D., & Graeber, A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division, *Educational Studies in Mathematics* 20(1), pp.79-96.
- Williams, B. (1996). *Closing the achievement gap: A vision for hanging beliefs and practices*, Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Zazkis, R. & Campbell, S. (1994). *Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding*, Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Association, New Orleans, LA.



## **A Study on the Relationship between Mathematics Teachers' Knowledge and Teaching Practice**

**Shin, Hyun Yong**

Korea National University of Education, Chungbuk, Korea

E-mail: shin@kue.ac.kr

**Lee, Jong Euk**

Juwon Elementary School, Busan, Korea

E-mail: joungeuk@chol.com

In this paper, we analyze what the components of mathematics teachers' knowledge are, and find that mathematics teacher need knowledge of three areas: subject matter knowledge, pedagogical knowledge, and pedagogical content knowledge.

Studies of practicing teachers suggest that When teachers lack understanding in their respective disciplines, it inhibits them from providing students the best learning opportunities, but that a teacher possessing pedagogical content knowledge provides learners with multiple approaches into learning. Some teachers having sound knowledge of mathematics and students were able to respond appropriately to students' questions, design appropriate learning activities involving a variety of mathematical representations, and orchestrate mathematical discourse in the classroom. Thus, it appears that mathematics teachers' knowledge positively affect teaching and student learning..

---

\*ZDM Classification : B59

\*2000 Mathematics Subject Classification : 97C70

\*Key Words: Teachers' knowledge, Subject matter knowledge, Pedagogical knowledge, Pedagogical content knowledge.