한국수학사학회지 제17권 제3호(2004년 8월), 109-120

수학 탐구학습에서 지식 형성에 대한 연구

동국대학교 수학교육과 이중권
joonglee@dongguk.edu

이 연구는 학과 과제와 기말 프로젝트에 있는 문제들 중에서 컴퓨터를 활용하여 수학적 문제 해결을 해 가는 세 명의 예비 교사를 연구 조사하였다. 모든 연구 참여자들의 활동과 컴퓨터를 활용한 문제 해결 과정을 관찰하고 촬영하였다. 가능한 경우 예비 교사들의 탐구활동 전과 후 및 탐구활동 중에 개별적인 면담을 하였다. 자료수집 방법은 관찰, 면담, 현장 기록, 제출과제, 컴퓨터 작업, 오디오와 비디오 테이프를 사용하였다. 수학적 문제 해결 초기 단계에서는, 모든 연구 참여자들이 그래프와 데이터를 사용하여 모델 만들기, 사인 함수의 일반적 개념에 대하여 절차적 지식과 개념적 지식이 약하게 형성되어 있었으나 컴퓨터를 활용한 수학적 문제 해결 활동을 통하여 그들은 절차적 지식과 개념적 지식을 강하게 구성하였고 그들을 적절하게 연계시킬 수 있었다.

주제어 : 예비교사, 수학적 문제 해결, 절차적 지식, 개념적 지식

0. 서론

수학 교육 방법론에 있어서, 컴퓨터 사용이 수학을 교육하는 데 도움이 될 수 있는지 없는지에 대하여 많은 논란이 있어 왔다. 수학을 교육하는 데 있어서 컴퓨터를 사용하는 것이 효과적이라는 결론을 내린 연구들이 최근에 발표되었다([7], [10], [11], [21]). 학교 수학을 지도하는 데 있어서 컴퓨터 기술의 사용을 장려하는 NCTM Standards는 수학을 배우는 모든 학년에서 컴퓨터를 사용하여 수학을 학습하도록 권고하고 있다. 특히, 교실에서 컴퓨터 기술을 사용하여 수학을 학습하는 것과 수학 학습의 한 맥락으로서 컴퓨터를 사용한 탐구학습을 강조하는 것이 NCTM Standards (1989)[15]에 잘 반영되어 있다.

상호 작용이 가능한 컴퓨터 환경은 수학 문제를 해결하는 동안 즉각적인 반응을 제공할 수 있는 잠재력이 있다. 이러한 잠재적인 상호 작용 컴퓨터 환경은 학생들이 수학 지식을 형성할 수 있는 활동과 풀이 계산을 수행할 수 있도록 해 준다. 컴퓨터 탐구 활동을 통해 학생들은 추론을 하고, 경험적 증거를 바탕으로 수학적 가정을 시험하고, 일반화를 만들어 낼 수 있다. 적절한 소프트웨어를 장착한 컴퓨터는 전통적 기

술인 종이와 연필 및 칠판과 같은 것으로는 불가능한 수학적 아이디어를 표현하고, 조작해보고, 수집할 수 있게 한다고 [12]와 [22]에서 말했다.

학교에서 수학을 지도하는 데 컴퓨터 기술의 사용은 새로운 교육환경을 만들어 낸다는 것을 의미한다. 교실에서 컴퓨터를 사용한 수학 교육이 많은 수학교육학자에 의하여 인식되고 강조되고 있지만 아직도 컴퓨터를 기본으로 하는 수학 교육에 대한 연구는 많이 발표되고 있지는 않은 상황이다. 특히 수학의 절차적 지식과 개념적 지식 형성에 어떻게 컴퓨터 기술이 공헌을 하는지를 규명하는 것에는 실패해 왔다.

현재까지 컴퓨터 환경에서 절차적 지식과 개념적 지식을 다룬 대부분의 연구는 프로그래밍 언어를 분류하는 데 중심이 맞추어져 있었다. 예를 들면, 어떤 프로그램 언어가 인간의 개념적 지식과 관련해서 풍부한 연계성을 지녔는지 혹은 좀더 임의적으로 접근 가능한 지라든가, 어떤 프로그램 언어가 절차적 지식에 좀더 가까운 특성을 지녔는지를 연구하였다. 따라서 이론적 틀을 위한 교사 교육에 대한 연구 문제로 어떻게 컴퓨터를 기초로 한 탐구 학습이 수학 지식 구성에 영향을 미치는지에 대한 것이 주요 이슈로 떠올랐다. 이러한 상황은 절차적 지식과 개념적 지식의 관점으로 예비 교사 교육에서 컴퓨터를 기초로 하는 탐구 학습의 효과성에 대한 연구를 하도록 이끌었다.

1. 본론

수학교육 방법론의 주요 관심사 중 하나는 컴퓨터를 기초로 한 탐구 학습이다. 최근에 가장 많이 나오는 교육 방법에 대한 개혁 요구는 요구하는 변화에 대한 잠재적 효과에 관한 연구 근거에 기초하지 않는 경향이 있었다. 따라서 이 연구에서 사용한 [8]의 절차적 지식과 개념적 지식에 대한 정의는 개혁 요구 변화를 위한 연구 근거를 제공할 수 있는 컴퓨터를 기초로 하는 탐구 학습의 효과를 측정할 수 있는 이론적 기초로 사용되었다. 이 연구의 목적은 컴퓨터를 사용한 환경에서 예비교사들의 지식 형성에 대한 다음의 몇 가지 측면을 조사하고 연구하는 것이었다.

1) 예비 교사들이 가지고 있는 어떤 수학문제에 대한 절차적 개념적 지식을 조사함.
2) 어떻게 예비 교사들이 컴퓨터를 활용한 탐구 학습을 통하여 절차적 지식과 개념적 지식을 구성해 나아가는지를 연구 조사함.
3) 어떻게 예비교사들이 컴퓨터를 활용한 탐구 학습에서 절차적 지식과 개념적 지식을 연결시키는지를 조사 연구함.

따라서 이 연구는 예비 교사들이 컴퓨터를 활용한 수학 학습에서 지식 형성이 어떻게 이루어지는지를 집중적으로 연구하였다.

이 연구의 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

1. 예비 교사들이 가지고 있는 수학 문제에 대한 절차적 지식과 개념적 지식은 무엇인가?
2. 컴퓨터를 활용한 탐구학습을 통하여 예비교사들이 구성한 절차적 지식과 개념적 지식은 무엇인가?
3. 컴퓨터를 활용한 탐구학습을 통하여 예비교사들이 어떻게 절차적 지식과 개념적 지식을 연결 시켰는가?
4. 컴퓨터를 활용한 탐구학습에서 예비교사들의 절차적 지식과 개념적 지식 연결에 영향을 주는 조건은 무엇인가?

이 연구는 절차적 지식과 개념적 지식이라는 이론적 틀을 바탕으로 연구되었다. 절차적 지식은 수학적 문제나 과제들을 수행하는 데 필요한 기술에 대한 지식이다. 절차적 지식에는 두 가지 종류가 있다. 하나는 어떤 개념을 표현하는 표상에 대한 지식이고, 다른 하나는 수학적 문제를 푸는 데 사용하는 알고리즘과 공식 및 규칙들로 이루어져 있다. 미리 결정된 일차적 순서로 진행된다는 점이 절차적 지식의 주요 특징이다[8]. 또한 절차적 지식은 구조화되어 있다는 것이 중요한 특징이다. 그리고 그러한 지식은 암기식 학습에 의해 구성될 수 있다.

개념적 지식은 수학에서의 관계, 성질, 사실에 대한 지식으로 정의된다. 개념적 지식은 명백히 서로 구별된 정보들이 서로 연결된 지식의 거미줄 망과 같은 것이다[8]. 개념적 지식은 암기식 학습으로 쉽게 형성되지 않는다. 암기에 의해 얻어진 수학적 사실들이나 명제들은 서로 독립되어 기억에 저장되고, 어떤 다른 개념적 네트워크와 연결되지 않는다[8].

절차적 지식과 개념적 지식을 서로 연계시키는 것은 수학적 문제해결 능력과 수학적 이해를 발달시킬 뿐만 아니라 서로에게 많은 유리한 것들을 향상시킨다. [8]에 의하면 개념적 지식에 의해 얻어진 절차적 지식은 의미를 지닌 표상으로 나타나고 그렇게 기억된 절차적 지식은 지식의 수준을 높이고 개념적 지식을 응용할 수 있는 형식적 언어와 활동 순서를 제공한다고 하였다. 절차적 지식과 개념적 지식을 서로 연결시키는 것이 유리한 이유는 수학적 문제 풀이 과정에서 필요로 하는 지식을 사전에 저장하고 다시 빼내어 활용할 때보다 성공적이고 쉽게 할 수 있기 때문이다. 만일 절차적 지식이 개념적 지식과 연결되었다면, 절차적 지식들은 정보망의 한 부분으로 저장된 것이고 독립된 하나의 정보로 존재하는 것이 아니고 서로 밀착하여 붙어있는 것

이다. 이러한 것이 좋은 이유는, 기억을 하는 것은 그것들이 의미를 가지고 있고 잘 조직화되었을 때 효과적으로 기억할 수 있기 때문이다[2].

만일 절차적 지식과 개념적 지식이 서로 연결되어 있다면, 그 절차적 지식이 수학적 문제를 풀이하는 과정에서 그 절차에 쉽게 접근할 수 있도록 아주 많은 지식 연결고리에 연결이 되어 있기 때문에 기억을 되살리는 일이 쉬워진다는 의미이다. 개념적 지식으로 연결된 절차적 지식은 그 지식이 필요할 때 쉽게 기억에 떠올릴 수 있도록 한다. 왜냐하면 개념적 지식 네트워크가 절차적 지식을 안내하는 역할을 하기 때문이다. 만일 개념적 지식이 절차적 지식에 연결되었다면, 이것은 문제를 표현을 용이하게 하고 요구되는 풀이 절차를 간단히 해 준다[8].

[3]과 [18]에 따르면 절차적 지식과 개념적 지식 사이의 관계를 인식하고 서로 연계시키는 것을 방해하는 세 가지 주요 요소들이 있다. 첫 번째는 기초 지식의 부족으로부터 절차적 지식과 개념적 지식의 관계를 서로 연결시키는 데 실패하는 것이다. 절차적 지식과 개념적 지식의 결핍은 지식의 연결고리를 빠트리거나 약한 연결고리를 만들 수밖에 없기 때문이다. 두 번째로, 단위 지식정보들 사이의 관계를 구성하고 암호화하는 데 실패하는 이유는 서로의 연관 관계를 암호화하는 것을 간과하는 경향이 있기 때문이다. 단위 지식들의 인과 관계 형성을 막는 세 번째 요소는 제한적인 지식 습득 경위에 의해 지식을 습득하기 때문이다.

만일 학생들이 절차적 지식과 개념적 지식을 적절히 연계시키는 데 실패를 한다면, 학생들을 수학적 개념은 이해했을 지라도 문제를 풀지 못하고, 혹은 어떤 수학적 문제를 풀었지만 그들이 무엇을 했는지 이해를 못하는 현상이 생길 수 있다. 따라서 수학에서 절차적 지식과 개념적 지식을 서로 연계시키는 것은 학생들이 수학적 개념을 이해하고 수학 문제를 해결하는 데 있어서 매우 중요한 것이다.

1.1. 연구 방법

이 연구는 컴퓨터를 활용한 예비교사들의 수학적 지식형성에 대한 세 가지의 사례 연구를 하였다. 컴퓨터를 활용한 탐구학습에서 연구 참여자들의 지식 형성과정을 알아보기 위하여 교실 활동을 관찰하고 교정 인터뷰 방법([6], [16])을 사용하였다. 연구 참여자가 컴퓨터를 활용하여 수학적 문제 탐구를 할 때 참여자의 지적 과정을 규명하기 위하여 연구자 자기분석법을 사용하였다. 또한 자료 분석을 위하여 Typological Strategy[14]를 사용하였다. 어떻게 연구 참여자들이 수학적 지식을 형성해 나아가는지를 조사하기 위하여 데이터 분석 기준 범주를 구성하였다. 기준 범주는 [8]에서 제시한 절차적 지식과 개념적 지식을 기초로 만들었다.

서울시에 위치한 D 대학교의 수학교육학과의 한 수업을 선정하여 이 연구를 수행

하였다. 그 수업은 예비 교사들을 위한 컴퓨터를 사용한 탐구학습을 주로 지도하는 수업으로 디자인된 것이었다. 그 수업은 오후 1시부터 오후 3시까지 두 시간 동안 계획된 수업이었다. 19명(남학생 7명, 여학생 12명)의 학생들이 신청한 그 교실에는 인터넷에 연결된 20대의 컴퓨터, 스캐너 1대, 레이저 프린터 1대, 스크린이 설치된 오버헤드 프로젝터가 설치되어 있었다. 수업은 Algebra Xpresser, Geometer's Sketchpad (GSP), Excel, Math-view 등의 컴퓨터 소프트웨어를 사용하여 수학적 문제를 탐구하고 수학적 개념을 형성해 나아가는 데 중점을 두고 있었다. 연구 참여 지원자들 중에서 3명(김, 이, 정)을 선정하여 연구를 수행하였다. 모든 연구 참여자들은 D 대학교에서 이 수업을 듣기 위해 선수과목으로 선정된 EGC405 수업을 이미 들은 학생들이었다. 그들 모두는 수학에 대하여 중간 수준 이상의 실력이었고 이 연구에 대하여 열정적이고 긍정적인 태도를 보여 주었다. 그러나 연구 참여자 중 '이'는 개인적인 이유로 첫 번째 탐구 학습 도중 연구 참여를 포기하였다. 따라서 이 연구는 마지막 세 가지 탐구 학습을 마친 두 명의 연구 참여자를 바탕으로 이루어졌다.

이 연구는 연구 참여자들이 한 탐구 학습 중에서 수업 중에 완성하여 제출하는 제출 과제물과 기말 프로젝트 중에서 세 가지의 탐구 학습을 위주로 이루어졌다. 모든 연구 참여자들의 탐구학습 활동을 관찰하였고 비디오로 녹화를 하였다. 가능한 경우 각각의 연구 참여자들을 대상으로 탐구 학습 전과 중간 및 후에 인터뷰를 하였다. 개방적인 클리닉 인터뷰를 통하여 컴퓨터를 활용한 탐구 학습 중에 일어나는 연구 참여자들의 지식형성과정에 대한 데이터를 수집하였다. 마지막으로 연구 참여자 전체를 대상으로 인터뷰를 하였다. 주요 데이터 수집 방법은 관찰, 면담, 현장 기록, 학생들의 보고서, 컴퓨터 작업 결과물, 오디오 비디오테이프 등이었다. 연구 진행 기간 동안 자료 수집과 분석은 함께 이루어졌다. 데이터 분석 방법으로는 Typological Strategy [14]를 사용하였고, 데이터 분석을 위한 가이드라인 개발에는 [8]에서 제시한 절차적 지식과 개념적 지식에 대한 정의와 설명을 사용하였다. 보충적인 가이드라인 개발을 위하여 Analytic Induction과 Constant Comparison[14]을 사용하였다.

1.2. 사례별 연구 결과

(1) '김'에 대한 사례

첫 번째 탐구를 시작하기 전에 '김'은 이미 $x^2+y^2=1$에 대한 그래프 그리기에 대하여 절차적 지식과 개념적 지식을 가지고 있었다. 그러나 모든 n의 값에 대하여 $x^n+y^n=1$에 대한 절차적 지식과 개념적 지식은 가지고 있지 않았다. 컴퓨터 프로그램인 Algebra Xpresser를 사용하여 n의 값을 점차적으로 증가시켜가며 그래프를 그려보면서 '김'은 $x^n+y^n=1$ 에 대한 외형적 특징에 대하여 인식을 갖게 되었고 일반

적인 경우의 n에 대하여 어떤 패턴을 예측할 수 있는 개념을 가지게 되었다. 그러나 아직도 개념적 지식을 완전히 구성했다고 볼 수 있는 증거를 보여주지는 못하였다. 홀수와 짝수에 대한 탐구 과정을 거친 후에 '김'은 자신의 전개 과정을 확장하고 일반화할 수 있게 되었다. 결국 '김'은 컴퓨터를 사용한 탐구 학습을 통하여 절차적 지식과 개념적 지식을 구성하였고 두 지식을 연계할 수 있었다. 이 과정에서 드러난 것은 만일 절차적 지식이 개념적 지식과 함께 형성된다면, 그 두 지식은 쉽게 서로 연계되어 구성되는 것을 볼 수 있었다. '김'은 대수적 개념이 부족하여 새로운 수학적 개념에 자기 자신이 탐구한 결과를 연결시키는 것에 대한 어려움을 보였으나 컴퓨터 탐구를 통한 시각적 정보를 이용하여 효과적으로 그것을 연결시킬 수 있었다.

컴퓨터를 활용하여 수학을 학습하여 절차적 지식과 개념적 지식을 형성시키거나 서로를 연계시키는 데에 시간을 제약하는 것은 매우 중요한 요소로 관찰되었다. '김'의 두 번째 탐구 과제는 변수 자료를 가지고 함수 모델을 만드는 것이었다. '김'은 이 과제에 대한 탐구 학습 이전에는 한번도 이런 종류의 과제에 접해본 적이 없었고 따라서 아무런 절차적 개념적 지식을 가지고 있지 않았다. 그래서 그는 소집단 토론을 활용했다. 소집단 토론으로부터 그는 여러 가지 아이디어와 탐구 방법을 얻게 되었다. 그는 자료로부터 나온 변수 a와 b를 실험적으로 Excel 프로그램을 활용하여 탐구를 하였다. 그러나 여전히 전체적인 자료변수 처리에 대한 이해를 하지 못하였다. 그의 제한적인 풀이 과정과 풀이 결과는 함수와 변수 그리고 그들의 연계성에 대한 사전 지식의 부족으로부터 발생한 것으로 관찰되었다.

세 번째 탐구과제는 $xy=ax+by+c$를 탐구하는 것이었다. '김'은 이 방정식의 그래프가 어떻게 생겼는지 아무런 아이디어도 보여주지 못하였다. 그는 이 과제에 대하여 개념적 지식은 보여주지 못하고 단지 기본적인 절차적 지식만을 보여주었다. 그는 Math-view를 사용하여 상수 a, b, c에 실수를 대입해 가면서 그 과제를 탐구하기 시작하였다. 서로 다른 $c=0, 1, 2$에 대하여 $xy=3x+3y+c$의 과제를 탐구하는 중간에 그는 $c=0, 1$ 각각에서 나타나는 교점 0, $-1/3$에 대하여 설명을 하지 못하였다. $c=0, 1, 2$에 대하여 과제 $xy=3x+2y+c$를 탐구하는 동안에 그는 점근선에 대한 분석과 나름대로의 결론을 만들어 내었다. 그는 다양한 각도에서 이 과제를 공략하였고 결국 자신의 결과를 만들어내고 확장하여 일반화시키기에 이르렀다. 예를 들어 $c=0, 1, 2$에 대하여 $x^2y^2=ax^2+by^2+c$를 탐구하면서 그는 놀랍게도 만일 $a=5$, $b=7$이면 점근선은 $x=\sqrt{7}$, $y=\sqrt{5}$에서 나타난다는 일반화를 주장하였다. 그러나 그는 변수를 음수와 양수로 나누어 탐구하여 그 차이점을 발견하는 데 실패하였고 교점에 대한 일반적인 견해를 만들어 내지는 못하였다.

(2) '이'에 대한 사례

첫 번째 탐구 학습 시작 때에 그는 매우 열성적으로 이 연구에 임하였으나 개인적인 사정으로 연구에 대한 참여를 유보해달라는 부탁을 하여 첫 번째 탐구 학습 이후에 사례 연구에서 제외시켰다.

(3) '정'에 대한 사례

'정'은 가장 쉬울 것으로 예상되었던 $y=a\sin(bx+c)$를 탐구의 첫 번째 과제로 선택하였다. 그는 이 과제에 대하여 이미 기본적인 절차적 지식과 개념적 지식을 가지고 있었다. 그렇지만 시각적 확인을 통하여 기본적인 지식을 점검하였다. 그는 Algebra Xpresser와 Math-view를 사용하여 a의 값을 변경해 가면서 그래프를 관찰하였다. 관찰 결과 a의 값이 사인 함수의 진폭을 결정한다는 사실을 확인하였다. 그러나 b값의 역할에 대하여는 확신을 가지지 못하였다. 그는 b의 값을 변화시켜 가면서 그래프의 변화를 관찰해보더니 b의 값이 주기와 관계가 있음을 알아차렸다. 그러나 일정한 패턴을 찾아내지 못하였고 공식으로 일반화하는 데는 실패하였다. 그는 주기에 대한 선수 지식은 있었으나 그가 발견한 변수에 대한 것과 연결하는 데는 어려움을 보여주었다. 변수 c에 대하여 컴퓨터를 활용하여 탐구 활동을 한 후에 그는 확신을 가지고 c값의 역할에 대하여 설명하고 예측하고 일반화하였다. 이러한 현상은 예상하지 못했던 결과였다. 탐구 학습 이후 인터뷰를 해본 결과 기초적인 수학적 배경이 부족한 학생들은 시각적 정보만으로는 수학적 개념을 완전히 이해하는 데는 한계가 있음을 보여주었다.

'정'의 두 번째 탐구과제는 '김'과 같은 $xy=ax+by+c$였다. 그는 특별히 a와 b 변수 사이의 관계를 알아보기 위하여 컴퓨터를 활용하여 탐구활동을 하였다. 그는 적당히 변수들을 바꾸어 가면서 그래프들을 하나의 화면에 그려 넣어 비교하였다. 여러 가지 그래프를 하나의 xy 평면에 그려 넣을 수가 있어서 그래프들끼리 비교가 쉽게 이루어졌다. 결국 그는 변수 b가 어떻게 $xy=ax+by+c$의 모양에 영향을 주는지에 관심을 가지고 집중적으로 탐구활동을 하였다. 마침내 그는 어떻게 변수 a와 b가 $xy=ax+by+c$의 모양을 조절하고 영향을 주는지에 대하여 일반화하고 나름대로의 결론을 주장하였다. 이러한 그의 주장과 결론들은 컴퓨터 프로그램을 활용한 시각적 정보를 통한 것으로 일반적인 수학적 증명에서 유추된 것들은 아니었으나 그의 결론은 옳은 것이었고 이러한 결론은 수학교육에서 컴퓨터를 활용한 시각적 탐구방법이 효과가 있을 수 있다는 점을 보여주는 것으로 결론 내릴 수 있었다.

그의 세 번째 탐구 문제는 정사각형 모양의 양철 판으로 정사각형 각 모서리를 오려내고 위로 올려서 용기를 만들 때 얼마만큼을 오려내어야 용기의 체적이 최대로 되

는가에 관한 문제였다. 그는 이 문제를 Excel을 사용하여 데이터를 개별적으로 입력하여 해보기도 하고 일정한 숫자를 임의로 선정하여 용기의 체적을 구하는 삼차방정식 $y=4x^3-80x^2+375x$를 만들기도 하였다. 그리고 그 문제를 Algebra Xpresser를 사용하여 각 모서리의 한 변을 3.036정도 잘라내면 최고 값이 500정도가 된다고 말했다. 그의 이러한 탐구 방법은 주로 기본적인 수학적 지식을 바탕으로 컴퓨터를 활용하여 함수를 추적하는 시각적 탐구에 의존하는 것이었다. 이것은 일종의 triangulation 접근법으로 수학학습에서 매우 효과적인 방법으로 여겨진다. 그는 여기서 그치지 않고 GSP를 사용하여 구체적인 용기 모양을 그려서 최적화하는 풀이과정을 보여주었다. 상당히 발전적이고 창의적인 접근법으로 연구자를 놀라게 하였다. 이러한 현상이 컴퓨터를 활용한 수업을 진행할 때 간헐적으로 나타나 학생들의 감추어진 수학적 소양을 불러일으키는 작용을 할 때가 있는 것으로 결론지을 수 있었다.

2. 결론

컴퓨터를 활용한 탐구 학습은 예비교사들에게 특정한 함수의 그래프를 추적할 수 있게 해주고 그래프를 이동하고 축소 확대하며 다양한 변화를 주면서 그래프를 관찰할 수 있게 해준다. 연구 참여자 '정'이 보여준 것처럼 함수에서 변수의 영향과 그 역할에 대한 탐구는 바람직한 교육목표에 쉽게 도달하도록 도움을 주는 것들이다.

적절한 컴퓨터 프로그램을 활용하여 함수를 탐구하는 것은 이미 가지고 있는 수학적 개념을 확인해보고 새로운 수학적 개념으로 확장해 나아가는 데 매우 유용한 것이다. 이러한 컴퓨터의 사용은 기본적인 수학지식을 사용하여 더욱 복잡한 수학적 상황을 탐구할 수 있는 길을 열어줄 수 있다는 것이 커다란 장점 중의 하나이다.

예비 교사들이 이러한 컴퓨터 환경을 사용하여 수학적 문제를 탐구할 수 있는 기회를 갖는 것은 함수 속의 변수들이 어떻게 움직이는지를 관찰해 보고 경험해 봄으로서 학생들의 입장을 이해하고 실제적인 수학의 절차적 지식과 개념적 지식을 습득하여 수학적 소양을 높일 수 있기 때문에 매우 바람직한 것이다. 또한 이러한 활동을 통해서 그들은 어떻게 두 개의 일차 함수를 합성했을 때 혹은 두 개 이상을 합성했을 때 어떠한 현상이 나타나는지를 탐구할 수도 있다. 컴퓨터를 활용한 탐구학습은 개별적으로 할 수도 있지만 2인이 짝을 이루어 할 때에도 효과를 볼 수 있었다. 개인 혼자서는 쉽게 수학의 개념적 지식과 절차적 지식을 연결시킬 수 없는 상황에서도 두 명이 토론을 통하여 협동 탐구를 함으로써 의외로 좋은 결과를 보여주었다. 매 수업 후에 학생들이 스스로 한 과제에 대한 결과물들을 발표하고 그 발표물에 대한 토론과 논쟁 및 질문을 하는 것들은 발표자나 청취자 모두에게 수학적 내용에 대한 절차적 지식과 개념적 지식을 형성하는 데 도움을 주었고 이미 형성된 지식을 강화하고 절차

적 지식과 개념적 지식을 서로 연계하는 데 유리하게 작용하였다.

'김'의 첫 번째 탐구에서처럼 토론은 학생들이 어떻게 과제를 공략할 것인가에 대한 힌트를 얻을 수 있다. 특히 어떠한 형태의 일차함수들을 합성해야 특정한 형태의 포물선으로 만들어질 수 있는가와 같은 상식을 뛰어 넘는 수학적 개념들은 컴퓨터를 활용하여 그래프를 그려보고 다양한 형태의 시도를 통해서 일반화시킬 수 있는 문제들이다. 절차적 지식과 개념적 지식을 시각적 확인을 통하여 확립해 나아가는 과정은 매우 중요하며 좀더 완벽한 형태의 수학적 지식을 구성하기 위하여서는 기본적인 수학지식을 바탕으로 컴퓨터를 활용한 수학적 탐구학습이 이루어져야 한다는 결론을 얻어내었다.

컴퓨터를 활용한 탐구 학습에서 일반적으로 학생들이 탐구 과정이 막혔을 때 곧바로 힌트를 주거나 답을 제시하여 주는 것은 학생들이 절차적 지식과 개념적 지식을 형성하는 데 도움을 주지 못하고 오히려 나쁜 영향을 주는 것으로 나타났다. 이 연구는 또한 [17]에서 주장한 직관이 프로그램으로 전환되면 그것들은 더욱더 구체화되고 쉽게 사고할 수 있다는 주장과 일치하는 연구 결과를 보여주었다. 더욱이 이 연구는 시각적 정보의 도움을 받은 구두 정보는 구두 정보만으로 새로운 지식을 습득하는 것보다 훨씬 효과적이라는 [4], [5], [9], [18]의 연구 결과와 유사한 결론을 얻어내었다. 명백히 컴퓨터를 활용한 수학 탐구 학습은 예비교사들이 절차적 지식과 개념적 지식을 구성하고 서로를 연계시키는 데 도움을 주고 있는 것으로 결론지을 수 있다.

수학적 문제를 해결하는 방법은 여러 가지로 할 수 있다고 [13]에서 말하였다. 그는 또한 시험 결과를 분석하는 것만으로 한 학생의 수학적 사고에 대하여 높고 낮음을 결정할 수 없다고 하였다. 특히 컴퓨터를 활용한 탐구학습에서 학생들이 만들어낸 수학적 결과물 대신 지필 검사만으로 학생들을 평가하는 것은 학생들의 수학적 사고를 정확하게 평가할 수 없다고 말하였다. 이것은 이 연구에서 보여준 평범한 학생이 컴퓨터를 활용한 탐구학습을 통하여 의외의 좋은 결과물을 만들어내고 그 결과물을 잘 설명하고 확장하여 일반화하는 것까지 발전하는 모습으로 그 증거가 될 수 있다. 수학적 사고에 초점을 둔 탐구 학습은 수학화 과정의 가치를 높이고 수학적 관점의 발전시킬 수 있다. 그들은 이러한 것들을 이용하면서 수학적 구조를 이해하는 데 좋은 도구로 사용되어질 수 있다[20].

결론적으로 컴퓨터를 활용한 수학 탐구학습은 예비교사들이 수학의 절차적 지식과 개념적 지식을 얻고 그 두 지식을 서로 연계시키는 데 도움을 준다고 할 수 있다. 이 의미는 컴퓨터를 활용한 학습이 예비교사를 위한 수학교육에서 예비교사들이 수학적 의미를 이해하고 수학적 문제 상황에서 문제를 해결해 나아가는 데 매우 유용한 하나의 도구로 사용되어질 수 있음을 의미한다고 할 수 있다.

참고 문헌

1. Anderson, J.R., *The Architecture of Cognition*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.
2. Baddeley, A.D., *The Psychology of Memory*, New York, NY: Basic Books, 1976.
3. Bruner, J.S., *Beyond the Information Given*, New York, NY: Norton, 1973.
4. Canta, L. · Herron, J., "Concrete and formal piagetian stages and science concept attainment," *Journal of Research in Science Teaching* 15, 1978, pp. 135-143.
5. Dayer, F.M., "The program of systematic evaluation a brief review," *International Journal of Instructional Media* 10, 1982, pp. 23-38.
6. Ginsburg, H.E., "The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques," *For the Learning of Mathematics*, 1, 1981, pp. 4-11.
7. Hannafin, R.D. · Burruss, J.D. · Little, C., "Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and learners," *The Journal of Educational Research* 94(3), 2001, pp. 132-144.
8. Hiebert, J. · Lefevre, P., "Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis," in J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986, pp. 1-27.
9. Holliday, W.G., "The effects of verbal and pictorial verbal information in science instruction," *Journal of Research in Science Teaching* 12, 1975, pp. 77-83.
10. Jung, I., *Student Representation and Understanding of Geometric Transformations with Technology Experience*, Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, 2002.
11. Kang, O.K., "Practical use of technology for mathematics education," *Journal of the Korea Society of Mathematics Education Series D* 5(1), 2002, pp. 25-44.
12. Kaput, J.J., "Technology and mathematics education," in D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: MacMillan, 1992.
13. Krutetskii, V.A., *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press, 1976.
14. LeCompte, M.D. · Preissle, J., *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research* 2nd ed., New York, NY: Academic Press, 1993.
15. Natioanl Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: Authorm 1989.

16. Opper, S., "Peaget's clinical method," *Journal of Children's Mathematical Behavior* 5, 1977, pp. 90-107.
17. Papert, S., *Mind Storms,* New York, NY: Basic Books, 1980.
18. Rigney, J.W. · Lutz, K., "Effect of graphic analogies of concepts in chemistry on learning and attitude," *Journal of Educational Psychology* 68, 1976, pp. 305-311.
19. Tulving, E., *Elements of Episodic Memory*, New York, NY: Oxford University Press, 1983.
20. Schoenfeld, A.H., "Learning to think mathematically problem solving, meta-cogniton, and sense making in mathematics," in D.A. Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning*, New York, NY: Macmillan, 1992, pp. 334-370.
21. Steipen, W.J. · Senn, P.R. · Steipen, W.C., *The Internet and Problem-Based Learning: Developing Solutions Through the Web*, Tucson, AZ: Zephyr Press, 2000.
22. Wisk, M.S. · Houde, R., "For recitation to construction: Teachers change with new technologies," in J.L Stewards, M. Yerushalmy · B. Wilson(Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1993, pp. 193-216.

Knowledge Construction on Mathematics Problem Solving

Department of Mathematics Education, Dongguk University **Joongkwoen Lee**

This study investigated three pre-service teachers' mathematical problem solving among hand-in-write-ups and final projects for each subject. All participants' activities and computer explorations were observed and video taped. If it was possible, an open-ended individual interview was performed before, during, and after each exploration. The method of data collection was observation, interviewing, field notes, students' written assignments, computer works, and audio and videotapes of pre-service teachers' mathematical problem solving activities. At the beginning of the mathematical problem solving activities, all participants did not have strong procedural and conceptual knowledge of the graph, making a model by using data, and general concept of a sine function, but they built strong procedural and conceptual knowledge and connected them appropriately through mathematical problem solving activities by using the computer technology.

Key words: pre-service teachers, mathematical problem solving, procedural knowledge, conceptual knowledge

2000 Mathematics Subject Classification: 97D50