한국수학사학회지 제17권 제3호(2004년 8월), 93-108

슈타이너 · 레무스 정리에 대한 다양한 증명 방법

경상대학교 수학교육과 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

본 연구에서는 슈타이너 · 레무스(Steiner-Lehmus) 정리에 대한 다양한 증명을 찾아 이들 증명에 사용된 수학적 개념, 정리, 방법들을 고찰하며, 몇 가지 증명에 대해서는 기존의 기술 방법을 개선한 좀더 구체적인 형태로 기술하였다. 이를 통해, 이등변삼각형의 흥미로운 성질인 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 다양한 증명 방법을 밝히고, 중등학교 수학교육의 질적이고 양적인 확장을 위한 기초 자료를 제공할 것이다.

주제어 : 이등변삼각형, 슈타이너 · 레무스 정리, 각의 이등분선, 기하학적 문제해결 방법, 대수적 문제해결 방법

0. 서론

수학의 역사는 수학적 사실에 대한 단순한 축적이 아니라, 수학의 다양한 탐구 방법을 배우고 수학의 발전 방향을 예측하며, 수학의 아름다움을 경험할 수 있는 수학과 수학교수학의 바탕이라 할 수 있다. 최근 들어, 수학의 역사에 관련된 의미 있는 소재들을 수학교육에 활용하자는 주장들([1], [2], [3], [4], [5])을 이러한 맥락에서 이해할 수 있을 것이다. 수학사에서 중등학교 수학교육에 관련될 수 있는 내용들을 발굴하여 중등학교 수학교육에서 활용할 수 있도록 체계적이고 심도 있게 고찰하는 것은 수학교육의 질적 · 양적인 발전을 위해 의미 있을 것이다.

슈타이너 · 레무스(Steiner-Lehmus) 정리는 1800년대 후반에 유명해진 정리로, '삼각형에서 두 내각의 이등분선이 같으면, 그 삼각형은 이등변삼각형이다.'라는 것이다. [7]에 의하면, '1840년 레무스(Lehmus)는 슈투름(Sturm)에게 이 정리에 대한 순수한 기하학적 증명을 찾아달라는 내용의 편지를 보냈고, 슈투름은 이것을 많은 수학자에게 이야기했다. 이러한 요청에 대한 의미 있는 첫 시도가 스위스의 기하학자인 슈타이너(Steiner)에 의해 이루어졌고, 이 정리가 슈타이너 · 레무스 정리라 불린다.'고 한다.

슈타이너 · 레무스 정리는 삼각형이 이등변삼각형이 되는 조건들 중의 하나이다. 이등변삼각형에 관련하여 중학교에서는 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것과 그 역, 이등변삼각형의 한 꼭지점에서 밑변에 그은 각의 이등분선, 중선, 높이가 일치함을 증명과 함께 다루고 있다. 이때, 이등변삼각형에서 각의 이등분선, 중선, 높이를 각각 두 개씩 긋는다면, 어떤 결과를 얻을 수 있을까? 라는 의문이 발생한다. 이등변삼각형에서는 두 옆변에 그은 각의 이등분선은 서로 같고, 중선, 높이에 대해서도 같은 성질이 성립하며, 그 역도 모두 성립한다. 슈타이너 · 레무스 정리를 제외한 나머지 성질들은 삼각형의 합동이나 무게중심의 성질을 이용하여 쉽게 증명되지만, 슈타이너 · 레무스 정리의 증명에서는 예상치 못한 어려움이 발생한다.

[10]에 의하면, 정리가 흥미로운 사실이나 예상치 못했던 측면들을 포함하거나, 중요한 원리를 보여주고, 높은 수준에서 일반화될 수 있으면, 학생들의 수학적인 창의적 활동을 개발 · 육성하는 데 중요한 도구가 될 수 있다고 하였다. 슈타이너 · 레무스 정리의 증명 과정에서 발생하는 예상치 못한 어려움은 학생들의 창의적 탐구 활동을 자극하는 좋은 소재가 될 것이다.

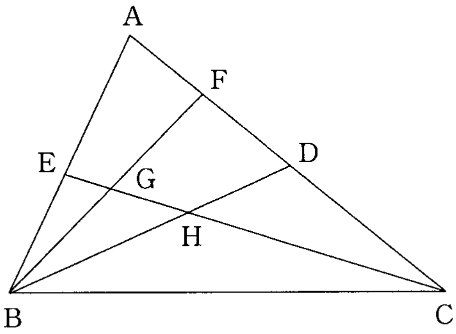
본 연구에서는 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 다양한 증명들을 찾아 이들 증명에 사용된 수학적 개념, 정리, 방법들을 고찰하며, 몇 가지 증명에 대해서는 개선된 증명을 구체적인 형태로 기술할 것이다. 이를 통해, 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 다양한 증명 방법을 밝히고, 중등학교 수학교육의 질적이고 양적인 확장을 위한 기초 자료를 제공할 것이다.

1. 기하학적 방법을 이용한 증명들

중등학교 수학 교과 내용을 바탕으로 하는 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 증명을 기하학적 방법과 대수적 방법을 이용한 증명으로 나눌 수 있다. 기하학적 방법을 이용한 증명으로는 첫째 삼각형에서 내각의 이등분선 사이의 대소 관계를 이용한 방법, 둘째 평행사변형과 이등변삼각형의 성질을 이용하는 방법, 셋째 평행한 보조선들을 이용하는 방법, 넷째 원의 성질을 이용한 방법, 다섯째 삼각형의 합동 조건을 이용한 방법, 여섯째 원과 등변사다리꼴의 성질을 이용한 방법 등이 있다.

우선, 삼각형에서 내각의 이등분선 사이의 대소 관계를 나타내는 다음 보조정리 1을 이용하여 슈타이너 · 레무스 정리를 증명할 수 있다.

보조정리 1. 삼각형의 두 내각에서 큰 각의 이등분선은 작은 각의 이등분선보다 작다.



<그림 1>

보조정리 1이 증명되면, 이로부터 어렵지 않게 슈타이너·레무스 정리에 대한 증명을 얻을 수 있다. 보조정리 1에 대한 두 가지 증명을 살펴보자.

보조 정리 1의 첫 번째 증명 방법[6]. 삼각형 ABC에서 각 B가 각 C보다 크고(그림 1), BD와 CE를 이들의 이등분선이라 하자. 선분 AD 위의 점 F를 $\angle FBD = \angle ACE = \angle ECB$가 되도록 잡자. H, G를 BD, BF와 이등분선 CE의 교점이라고 하자.

삼각형 FBD와 FGC는 두 각이 같으므로, 서로 닮은 도형이다. 그러므로 $BF : CF = BD : CG$이다. 한편, 삼각형 BFC에서 꼭지점 C에서의 각은 꼭지점 B에서의 각보다 작으므로, $BF < CF$이다. 그리고 $BF : CF = BD : CG$에 의해 $BD < CG < CE$이다. 이로부터, 정리가 증명된다. □

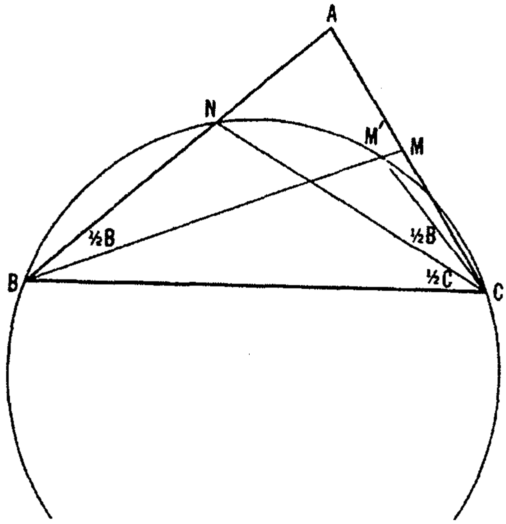
보조정리 1은 원의 성질을 이용하여 증명할 수도 있는데, 이러한 증명은 [7]에서 찾아볼 수 있다.

보조정리 1의 두 번째 증명 방법. ABC가 $\angle B < \angle C$인 삼각형이고(그림 2), BM과 CN을 각각 각 B와 C의 이등분선이라 하면, $BM > CN$을 증명하면 된다.

BM 위의 점 M′을 $\angle M'CN = \frac{1}{2}\angle B$가 되도록 잡자. 이때, $\angle M'CN$은 $\angle M'BN$과 같으므로, 네 점 N, B, C, M′은 한 원 위에 있다. $\angle B < \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) < \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C)$이므로, $\angle CBN < \angle M'CB < 90°$이다. 보조정리[1]에 의해, $CN < M'B$이다. 그러므로 $BM > BM' > CN$이 성립한다. □

이제, 슈타이너·레무스 정리의 증명을 살펴보자.

1) [7]에 사용된 보조정리는 '예각인 서로 다른 두 원주각에 대한 현들에 대해, 작은 각에 작은 현이 대응된다.'는 것임.



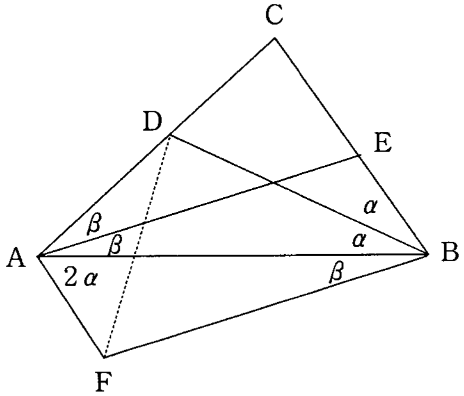
<그림 2>

증명 방법 1. 슈타이너 · 레무스 정리를 직접 증명하는 대신에, 대우 명제를 증명하자. 즉, '△ABC에서 ∠B와 ∠C의 이등분선 BM과 CN이 주어졌다. 이때, AB≠AC이면, BM≠CN.'임을 증명하면 된다. 이를 위해, ∠B≠∠C이면 BM≠CN을 증명하자. ∠B≠∠C이므로, ∠B > ∠C이거나 ∠B < ∠C이 가능하다. 가령, ∠B > ∠C라고 가정하면, 보조정리 1에 의해 BM < CN이므로, 대우 명제가 성립한다. 한편, ∠B < ∠C라고 가정하면, 보조정리 1에 의해 BM > CN이므로, 대우 명제가 성립한다. 이로부터 슈타이너 · 레무스 정리가 증명된다. □

이 증명 방법의 특징은 보조정리인 '삼각형의 두 내각에서 큰 각의 이등분선은 작은 각의 이등분선보다 작다.'는 사실로부터 슈타이너 · 레무스 정리가 유도된다는 것이다.

중학교 수학 교과서에는 각의 이등분선이 각의 변들로부터 같은 거리만큼 떨어져 있다는 것과 삼각형에서 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만나며 그 교점이 내심이라는 것, 즉 각의 이등분선에 대해 상등 관계를 주로 지도하고 있다. 그러므로 삼각형에서 내각의 이등분선 사이의 부등 관계인 보조정리 1은 학생들에게 흥미로운 탐구의 대상이 될 수 있으며, 보조정리 1에 대한 탐구를 한 후에 그 확장으로 슈타이너 · 레무스 정리를 소개하는 것도 의미 있을 것이다.

증명 방법 2[8]. BF//AE, AF//BC를 작도하자(그림 3). 만약 $\alpha > \beta$라고 가정하면, 삼각형 ADB와 ABF를 비교하여 AD > AF를 얻을 수 있다. 게다가, 삼각형 ADF에서 각 ADF와 AFD를 α와 β로 나타내면, ∠AFD < ∠ADF임을 알 수 있다. 결국, AD는 AF보다 작다. 이처럼, 우리의 가정 $\alpha \neq \beta$은 모순으로 귀착된다. □



<그림 3>

살펴본 증명에서는 증명의 전체적인 틀이 체계적으로 기술되지 않았다. 이 증명에 사용된 접근 방법을 분석하면, 다음과 같다.

- $\alpha > \beta$일 때, $\triangle$ADB와 $\triangle$ABF로부터 AD > AF;
- $\triangle$ADF에서 $\angle$AFD < $\angle$ADF;
- AD < AF;
- 모순 발생.

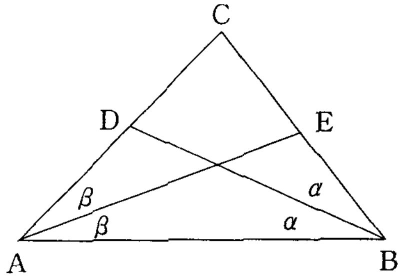
살펴본 증명에서는 귀류법의 가정인 $\angle\alpha \neq \angle\beta$이 증명의 시작에 기술되지 않았기 때문에, 왜 $\angle\alpha > \angle\beta$인 경우를 고찰하는가를 알 수 없다($\angle\alpha \neq \angle\beta$을 보이기 위해선 $\angle\alpha < \angle\beta$도 보여야 하는데, 이것에 대한 언급도 없음). 그리고 $\triangle$ADB와 $\triangle$ABF로부터 부등식 AD > AF을 얻는 것이나 $\triangle$ADF에서 $\angle$AFD < $\angle$ADF을 얻는 것도 자명하지 않기 때문에, 상세한 기술이 필요하다. 살펴본 바와 같이, [8]에 제시된 기술은 간단한 방향 제시라 할 수 있으며, 이것을 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

증명. $\triangle$ABC에서 AE와 BD는 각의 이등분선이며, AE=BD라 하자(그림 4). 이때, $\triangle$ABC가 이등변삼각형임을, 즉 AC=BC를 증명하면 된다.

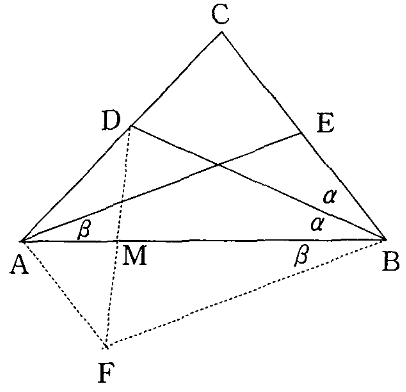
이를 위해 $\angle$CAB=$\angle$CBA, 즉 $\angle\alpha = \angle\beta$임을 귀류법을 이용하여 보이자. 우선, $\angle\alpha > \angle\beta$라 가정하자. 이제, BF//AE, AF//BC인 보조선 AF와 BF를 작도하자(그림 5).

그러면 사각형 AFBE는 평행사변형이고, $\angle$ABF=$\angle\beta$, BF=AE=BD이므로, $\triangle$BDF는 이등변삼각형이다. $\angle\alpha > \angle\beta$이므로 $\triangle$BDF에서 각 B의 이등분선 BN을 그으면, <그림 6>을 얻게 되며, ND=NF이다. $\triangle$NAF에서 삼각부등식에 의해, AF < NA + NF = NA + ND이다. 즉, DA > AF이다.

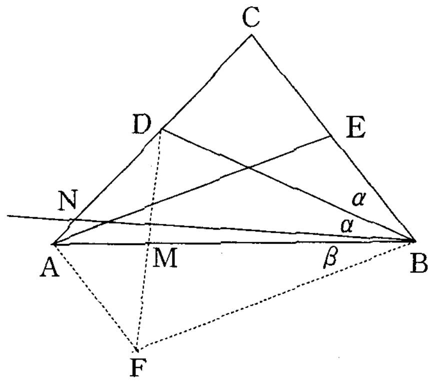
이제, $\triangle$ADF에서 $\angle$ADF > $\angle$AFD임을 보여 AF > DA임을, 즉 모순을 유도하자.



<그림 4>



<그림 5>



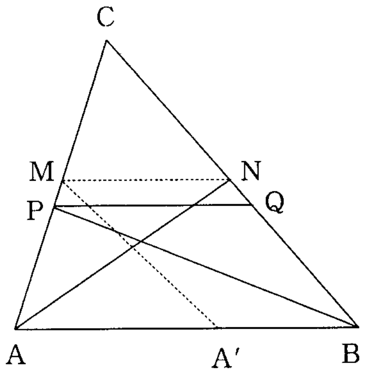
<그림 6>

$\triangle$ADM에서 $\angle ADM = \angle ADF = 180° - 2\angle\beta - (\angle\alpha + \angle BDF)$이고, $\triangle$AMF에서 $\angle AFM = \angle AFD = 180° - \angle MAF - \angle AMF = 180° - 2\angle\alpha - (\angle\beta + \angle BFD)$가 성립한다. 이에 의해 $\angle ADF > \angle AFD$이다. 삼각형에서 큰 각의 맞은편에 긴 변이 존재하므로, $AF > AD$이고, 이것은 $DA > AF$에 모순된다. 그러므로 가정 $\angle\alpha > \angle\beta$은 거짓이다.

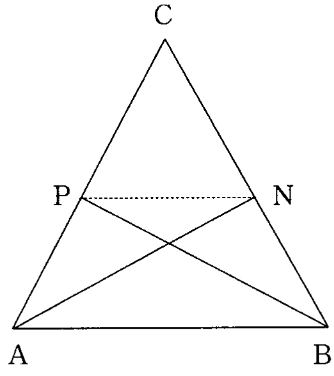
한편, $\angle\alpha < \angle\beta$를 가정하여, 유사한 방법으로 모순을 유도할 수 있고, 결국 $\angle\alpha = \angle\beta$임을 알 수 있다. 이로부터, $\triangle$ABC가 이등변삼각형임이 증명된다. □

위의 증명에서 $AF > DA$이라는 것은 $\triangle$ABD와 $\triangle$ADF에 대해 코사인 제2정리를 사용하여도 쉽게 얻을 수 있다.

증명 방법 3[14]. $\triangle$ABC에서 서로 같은 이등분선 AN과 BP가 주어졌다고 하자. N과 P를 지나 밑변 AB에 평행인 직선들을 작도하여, 삼각형의 변들과의 교점을 각각 M과 Q라 하자(그림 7). 이제, MN과 PQ가 포개어짐을 증명하자. 귀류법으로, 가령 선분



<그림 7>



<그림 8>

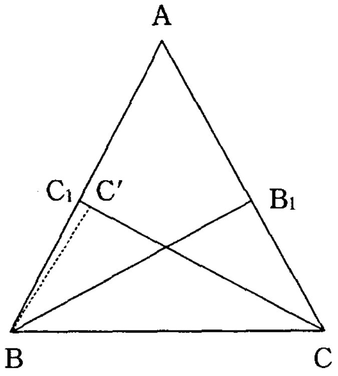
MN이 PQ보다 꼭지점 C에 더 가깝게 있어 MN < PQ를 만족시킨다고 하자. ∠PBQ=∠PBA(PB가 각 A의 이등분선이므로)이고, ∠PBA=∠BPQ(평행인 직선에서 엇각으로)이므로, ∠PBQ=∠BPQ, 즉 삼각형 BPQ는 이등변삼각형이고, PQ=QB이다. 마찬가지로, AM=MN이 증명된다. 결국, △PQB와 △AMN은 같은 밑변 AN과 BP를 가지는 두 이등변삼각형이다.

삼각형 PQB의 옆변이 삼각형 AMN의 옆변보다 크므로, ∠PQB < ∠AMN이 성립한다. 이 부등식을 확인하려면, A와 B가 포개어지도록 밑변 AN과 BP를 겹쳐놓으면 된다. 그러므로, ∠QBP > ∠MAN이고, 결국 ∠CBA > ∠CAB이다. 그리고 사다리꼴 AMNB에서 ∠B > ∠A이면, A′M//BN, A′M=BN에 대해, AM>A′M=BN이다. 이로부터 MN=AM > BN > BQ=PQ을 얻는데, 이것은 가정 MN < PQ에 모순된다.

얻어진 모순은 선분 MN과 PQ가 일치한다는 것을 의미한다(그림 8). 이처럼, AP=PN=NB, 즉 사다리꼴 APNB는 등변사다리꼴이다. 그러므로, ∠A=∠B이고, △ABC는 이등변삼각형이다. □

살펴본 증명 방법은 보조선이 흥미롭다. 이 증명에서는 세 개의 보조선이 사용되었는데, 모두 주어진 선분에 평행한 선분의 작도이다. MN과 PQ는 AB와 평행한 선분들이며, MA′은 CB와 평행한 선분이다.

주어진 선분이나 직선에 평행한 선분이나 직선의 작도는 중학교 수학 교과서의 기하 문제해결 과정에서 자주 접하는 보조선이므로, 학생에게 이러한 유형의 보조선을 작도하여 상응하는 문제를 해결할 수 있는 능력이 요구된다. 그러므로 살펴본 증명 방법은 평행한 선분 하나를 보조선으로 그어 해결하는 문제를 다룬 후에, 후속적인 탐구 과제로 제시하여도 의미 있을 것이다.



<그림 9>

증명 방법 4[14]. 결론이 옳지 않다고, 즉 삼각형 ABC에서 이등분선 BB_1과 CC_1이 같지만, $\triangle ABC$는 이등변삼각형이 아니라고 가정하자. 이로부터, 각 B와 C는 같지 않으며, 가령 $\angle B > \angle C$라고 하자(그림 9).

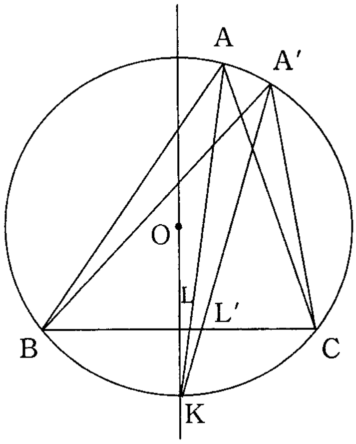
각 ABB_1의 내부에 각 ACC_1과 같은 각 B_1BC'을 놓자(여기서 C'은 각의 이등분선 CC_1의 점이며, $\angle B_1BA = \frac{1}{2}\angle B > \frac{1}{2}\angle C = ACC_1$). $\angle B_1CC' = \angle B_1BC'$이므로, 점 B, C, B_1과 C'은 한 원에 속한다. 각 B_1CB과 $C'BC$는 이 원의 원주각이고, 이들은 모두 예각이다. 왜냐하면 $\angle B_1CB = \angle C$는 삼각형 ABC의 각들 중 가장 큰 각이 아니며, $\angle C'BC = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B$는 삼각형의 모든 각들의 합의 절반, 즉 $90°$보다 작다.

이때, $BB_1 = CC_1$이므로, $BB_1 > CC'$, 즉 각 CBC'은 각 BCB_1보다 작은 현에 대응되며, 이 경우에 원의 작은 호에 대응된다. 즉, $\angle CBC' < \angle B_1CB$이다. 이와 같이, $\angle CBC' = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B < \angle C = \angle B_1CB$를 얻고, 이것은 가정한 부등식 $\angle B > \angle C$에 모순된다. 얻어진 모순으로부터, 삼각형 ABC가 이등변삼각형임이 증명된다. □

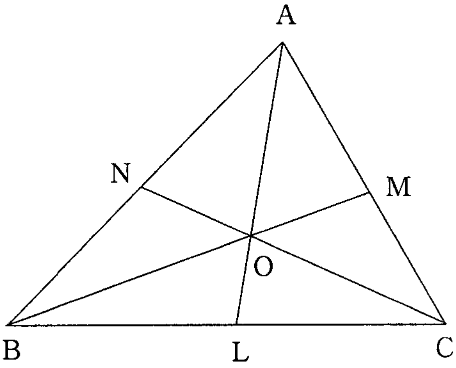
다음으로 삼각형의 합동 조건을 이용한 증명 방법을 살펴보자. 이 증명 방법은 앞에서 살펴본 보조정리 1을 이용한 증명 방법과 마찬가지로, 삼각형의 합동 조건(보조정리 2)을 증명하면 슈타이너 · 레무스 정리가 쉽게 증명된다.

보조정리 2. 두 삼각형에서 한 각이 같고, 이 각의 이등분선, 이 각의 대변이 서로 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

삼각형에 대한 외접원의 성질을 이용한 보조정리 2에 대한 증명은 [9]를 중심으로 살펴보자.



<그림 10>



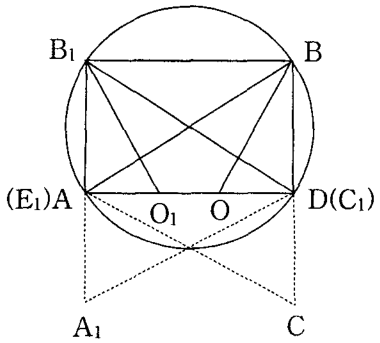
<그림 11>

증명. 삼각형 ABC와 A′B′C′에서 각 A와 A′은 같고, 각의 이등분선 AL과 A′L′, BC와 B′C′이 같다고 하자. 그리고 K를 △ABC의 외접원에서 호 BC의 중점이라 할 때, 꼭지점 A와 A′은 외접원의 지름 OK에 대해 같은 쪽에 놓여있다(그림 10). 이제, 꼭지점 A와 A′이 포개진다는 것을 증명하자.

$\angle A = \angle A'$이므로, 점 A′은 △ABC의 외접원에 속하고, 각의 이등분선 AL과 A′L′의 연장선은 외접원과 점 K에서 만난다. 가령, A′이 호 AC에 속한다고 가정하자(A가 호 A′C에 속하는 경우도 마찬가지 방법으로 생각할 수 있다). 이때, $AK > A'K$이고, $KL < KL'$이다. 이로부터, $AL = AK - KL > A'K - KL' = A'L'$이 성립한다. 이것은 불가능하며, 이로부터 점 A와 A′이 포개어짐이 증명된다. □

증명 방법 5[9]. △ABC에서 각의 이등분선 BM과 CN이 같고, O를 이들의 교점이라 하면(그림 11), 삼각형 ABM과 ANC는 공통각 A와 공통의 각의 이등분선 AO, 그리고 같은 밑변 BM과 CN을 가진다. 그러므로 보조정리 2에 의해, △ABM과 △ANC는 합동이고, 이때 상응하는 변들인 AB와 AC는 같다. 이로부터, △ABC가 이등변삼각형임이 증명된다. □

살펴본 증명 방법은 삼각형의 합동 조건을 이용한다는 측면에서 흥미롭다. 학생들 중에는 삼각형의 합동 조건은 SAS, ASA, SSS만 존재하며, 이들은 중학교 2학년에서만 다루는 것으로 생각하는 경우가 있다. 살펴본 증명 방법을 통해, 삼각형의 합동 조건에는 기술한 것 이외에 다른 것들이 존재하며, 삼각형의 합동을 증명하기 위해 원의 성질도 활용됨을 확인할 수 있다. 그리고, 보조 정리 2에 대한 증명을 통해 쉽게 슈타이너·레무스 정리를 증명할 수 있다는 것도 주목하자. 살펴본 증명과 유사한 방법을 [13]에서도 찾아볼 수 있다.



<그림 12>

한편, [9]의 이 증명 방법이 앞에서 살펴본 다른 증명 방법들과 구별되는 한 특징을 살펴보자. 앞에서 기술한 방법들은 귀류법에 의한 간접 증명 방법이었는데, 삼각형의 합동을 이용한 [9]의 증명은 가정에서 결론을 직접 유도하는 직접 증명이라는 것이다. 직접 증명에 의한 슈타이너 · 레무스 정리의 다른 증명 방법도 살펴보자.

증명 방법 6[12]. $\triangle ABC$의 각의 이등분선 AD와 CE가 같다고 하고, AD와 CE의 교점 O를 지나는 세 번째 각의 이등분선 BO를 작도하자. 이제, $\triangle ABC$와 합동인 삼각형 $A_1B_1C_1$을 만들어, 꼭지점 C_1이 점 D와 포개지고, 이등분선 C_1E_1이 DA에 포개지고, 꼭지점 B와 B_1이 이등분선 C_1E_1과 DA의 같은 쪽에 놓이도록 $\triangle A_1B_1C_1$을 $\triangle ABC$에 겹쳐놓자(그림 12). 각 B와 B_1이 같으므로, 사각형 $ADBB_1$에 대해 외접원을 작도할 수 있다.

이제, $AD // BB_1$을 증명하자. 삼각형의 외각의 성질에 의해, $\angle BOD = \angle BAD + \angle OBA$를 얻는다. 그리고 같은 호에 대한 원주각으로 $\angle BAD = \angle BB_1D$이고, 같은 각 B와 B_1의 절반인 $\angle OBA$와 $\angle O_1B_1D$는 같다. 그러므로 $\angle BOD = \angle BB_1O_1$, $\angle BB_1O_1 + \angle BOO_1 = 2R$이 성립한다.

이처럼, 사각형 OBB_1O_1에 외접원을 작도할 수 있으며, 각 B의 이등분선에서 $O_1B_1 = OB$이므로, 사각형 OBB_1O_1의 외접원에서 현 O_1B_1과 OB에 대한 호의 길이는 같게 된다. 이때, $OO_1 // BB_1$ 또는 $AD // BB_1$이다. 결국, 사각형 $ADBB_1$은 원에 내접하는 등변사다리꼴이다. 그리고, 등변사다리꼴에서 대각선 AB와 B_1D는 같다. 이로부터, $AD = BC$, 즉 $\triangle ABC$가 이등변삼각형임이 증명된다. □

2. 대수적 방법을 이용한 증명들

삼각형에서 각의 이등분선의 길이는 삼각형의 변들과 각을 이용하여 나타낼 수도 있고, 변들의 길이만으로 대수적으로 나타낼 수도 있다. 우선, 삼각형에서 각의 이등분선의 길이를 삼각형의 변들과 각을 이용하여 나타내어 슈타이너·레무스 정리를 증명한 두 가지 경우를 살펴보자.

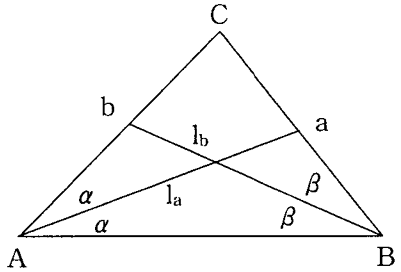
증명 방법 7[11]. 각 A와 B의 이등분선이 같고, $a>b$라고 가정하자. 이때, $\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{B}{2}$이고, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}<\frac{1}{c}+\frac{1}{b}$, 즉 $\frac{bc}{b+c}<\frac{ac}{a+c}$이다. 얻어진 부등식을 변끼리 곱하면, 모순을 얻게 된다. 왜냐하면 $l_a=\frac{2bc\cdot\cos(A/2)}{b+c}$, $l_b=\frac{2ac\cdot\cos(B/2)}{a+c}$이기 때문이다. □

[11]의 증명을 좀더 상세히 기술해 보자. 삼각형 ABC에서 각 A와 B의 이등분선을 각각 l_a와 l_b라고 하면, $l_a=l_b$이다 귀류법으로 $AC\neq BC$, 즉 $a\neq b$라 가정하자(그림 13). 우선, $a>b$라 가정하면, 삼각형에서 큰 변의 맞은편에는 큰 각이 놓여있으므로, $2\alpha>2\beta$이다. 이때, α와 β는 예각이므로, 다음을 얻는다.

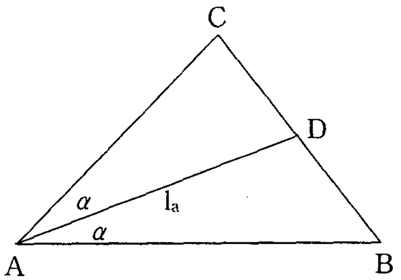
$$\cos\alpha<\cos\beta \quad \cdots\cdots \text{①}$$

한편, $a>b$이므로, 역수를 취하면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다. 얻어진 부등식의 양변에 $\frac{1}{c}$를 더하면, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}<\frac{1}{c}+\frac{1}{b}$이고 다음이 성립한다.

$$\frac{bc}{b+c}<\frac{ac}{a+c} \quad \cdots\cdots \text{②}$$



<그림 13>



<그림 14>

부등식 ①과 ②의 각 변을 서로 곱하면, $\frac{ac}{a+c}\cdot\cos\beta < \frac{bc}{b+c}\cdot\cos\alpha$를 얻는다. 그런데 $\frac{ac}{a+c}\cdot\cos\beta = l_b$, $\frac{bc}{b+c}\cdot\cos\alpha = l_a$이므로, $l_b < l_a$이다 이것은 가정 $l_a = l_b$에 모순되며, 이로부터 $a=b$가 증명된다.

한편, $a<b$인 경우에 대해서도 유사한 방법으로, $a=b$이 증명된다. □

살펴본 증명에서는 삼각형의 내각의 이등분선 l_a의 길이가 $\frac{bc}{b+c}\cdot\cos\alpha$임을 이용하였다. 이 관계식은 삼각형의 넓이를 이용하여 쉽게 증명할 수 있다. <그림 14>에서 삼각형 ABC의 넓이를 S_{ABC}로 나타내면, $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD}$이다.

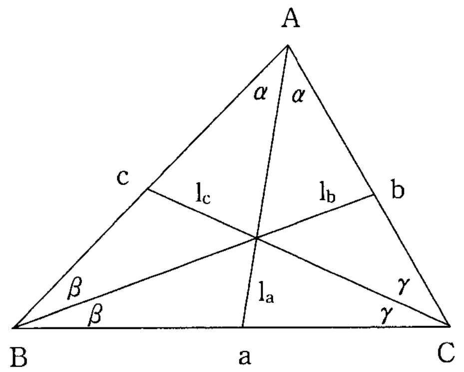
$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\cdot\sin 2\alpha$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}bl_a\cdot\sin\alpha$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}cl_a\cdot\sin\alpha$이다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2}bc\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}bl_a\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}cl_a\cdot\sin\alpha,\quad l_a(b+c)\sin\alpha = bc\sin 2\alpha$$

얻어진 식에 사인의 배각 공식을 이용하면, $l_a = \frac{bc}{b+c}\cdot\cos\alpha$을 얻게 된다. □

[11]의 증명에서는 $a>b$라는 가정으로부터 대각의 크기 관계 $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$와 변들 사이의 관계 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a} < \frac{1}{c}+\frac{1}{b}$를 유도하고, 이들을 곱하여 부등식 $\frac{ac}{a+c}\cdot\cos\frac{B}{2} < \frac{bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}$를 얻었다. 이때, 얻어진 부등식이 각의 이등분선의 길이에 대한 등식 $l_a = l_b$에 모순됨을 보였다.

한편, [9]의 증명에서는 역의 증명 과정을 보여주고 있다. 즉, 등식 $l_a = l_b$로부터, 각과 변을 포함하는 관계식을 얻고, 얻어진 식에서 각과 변들 사이의 관계를 고찰하여 모순을 유도하였다. 자세한 증명은 다음과 같다.



<그림 15>

증명 방법 8[9]. $\triangle ABC$에서 $\angle B=2\beta$와 $\angle C=2\gamma$의 이등분선이 같다고 하자(그림 15).

그러면 $l_c=\dfrac{2ab\cos\gamma}{(a+b)}=l_b=\dfrac{2ac\cos\beta}{(a+c)}$이다. 이때, $\angle B=\angle C$임을, 즉 $AB=AC$임을 증명하자. 실제로, $\dfrac{l_c}{l_b}=\dfrac{b\cos\gamma(a+c)}{c\cos\beta(a+b)}=\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\dfrac{ab+bc}{ac+bc}=1$이다.

$\gamma>\beta$라고 가정하자. 그러면 $\cos\gamma<\cos\beta$이고 $c>b$이다, 즉 $ab+bc<ac+bc$는 앞의 등식에 모순된다. 마찬가지로 $\gamma<\beta$가 될 수가 없다. 이로부터, 정리가 증명된다. □

살펴본 [11]나 [9]의 증명에서는 삼각형에서 각의 이등분선의 길이를 변과 각을 이용하여 나타낸 공식 $l_a=\dfrac{bc}{b+c}\cdot\cos\alpha$이 사용되었다. 이제, 삼각형의 내각의 이등분선의 길이를 변의 길이를 이용하여 나타내는 다음 공식을 이용한 슈타이너·레무스 정리의 증명 방법을 살펴보자.

$$l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

이 공식에 대한 자세한 증명은 생략하고, 이를 이용한 슈타이너·레무스 정리에 대한 증명을 살펴보자.

증명 방법 9. 삼각형 ABC에서 각 B와 각 C에서 그은 각의 이등분선 l_b와 l_c가 같다고 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$l_b=\frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c},\quad l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

그리고 등식 $l_b=l_c$에 의해, 다음이 성립한다.

$$\frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

양변을 제곱하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\frac{b(a+b-c)}{(a+b)^2}=\frac{c(a-b+c)}{(a+c)^2}.$$

전개하고 a에 관해 내림차순으로 정리하면, 다음을 얻는다.

$$a^3(b-c)+a^2(b+c)(b-c)+3abc(b-c)+bc(b-c)(b+c)$$
$$=(b-c)[a^3+a^2(b+c)+3abc+bc(b+c)]=0$$

이에 따라 b=c이므로, 주어진 삼각형 ABC는 이등변삼각형임이 증명된다. □

살펴본 슈타이너 · 레무스 정리를 대수적으로 증명한 세 가지 방법 모두 직접 증명법에 해당한다.

3. 결론

본 연구에서는 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 다양한 증명들을 찾아 이들 증명에 사용된 수학적 개념, 정리, 방법들을 고찰하며, 몇 가지 증명에 대해서는 개선된 증명을 구체적인 형태로 기술하였다.

슈타이너 · 레무스 정리는 '삼각형에서 두 내각의 이등분선이 같으면, 주어진 삼각형은 이등변삼각형이다.'라는 이등변삼각형의 조건들 중 하나를 나타내는 것으로, 1840년 레무스는 슈투름에게 이 정리에 대한 순수한 기하학적 증명을 찾아달라는 요청을 했고, 슈투름은 이것을 많은 수학자에게 이야기하여 유명해진 정리이다.

본 연구에서는 중등학교 수학 교과 내용을 바탕으로 하는 슈타이너 · 레무스 정리에 대한 증명을 기하학적 방법과 대수적 방법을 이용한 증명으로 나누었다. 기하학적 방법을 이용한 증명 방법으로는 첫째 삼각형에서 내각의 이등분선 사이의 대소 관계를 이용한 방법, 둘째 평행사변형과 이등변삼각형의 성질을 이용하는 방법, 셋째 평행한 보조선들을 이용하는 방법, 넷째 원의 성질을 이용한 방법, 다섯째 삼각형의 합동 조건을 이용한 방법, 여섯째 원과 등변사다리꼴의 성질을 이용한 방법 등이 있으며, 각각의 방법에 상응하는 슈타이너 · 레무스 정리의 증명을 각각 상세히 기술하였다.

한편, 대수적 방법에서는 삼각형에서 각의 이등분선의 길이를 삼각형의 변들과 각

을 이용하여 나타내는 경우와 변들의 길이만으로 나타내는 두 가지 경우 각각에 대해 상응하는 슈타이너 · 레무스 정리의 증명을 살펴보았다.

살펴본 방법들 중 몇몇은 간접 증명인 귀류법을 이용했으며, 삼각형의 합동 조건을 이용한 [9]의 증명, 원과 등변사다리꼴의 성질을 이용한 [12]의 증명, 그리고 대수적 방법에 의한 증명들은 가정에서 결론을 직접 유도하는 직접 증명법이 사용되었다.

참고 문헌

1. 김종명, "수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학교육관," 한국수학사학회지 10 (2), 33-48.
2. 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대출판부, 2000.
3. 유윤재, "역사발생적 원리의 비판적 수용에 대하여," 한국수학사학회지 15(1), 109-114.
4. 허민, "수학교육에 활용할 옛 문제 연구," 한국수학사학회지 13(1), 33-48.
5. Avital S., "History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning," in *Learn from the Masters.* Eds. Swetz F. · Fauvel J. · Bekken O. · Johansson B. · Katz V. 1995, 3-12
6. Court N.A., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., 1963.
7. Coxeter H.S. · Greitzer S.L., *Geometry Revisited*, MAA, 1967.

<러시아어 참고 문헌>

8. Atanacyan L.S. · Vasileva M.B. · Gurevich G.B. · Ilin A.S. · Kozmina T.L. · Redozubova O.S., 초등 기하학 문제 선집, 교육출판사, 1964.
9. Korobov A., "Steiner 문제에 대한 일곱 가지 풀이," *Kvant* 4(1996), 38-40.
10. Loshina N.L., "기하 문제해결에서 학생들의 심미적 성향 육성에 대해," 학교에서 수학, 2(1997), 4-7.
11. Prasolov V.V., 평면기하학 문제들 제1부, Fizmatlit, 1995.
12. Shahno K.U., 고난도의 초등수학 문제 선집, Vysheish Shola, 1967.
13. Sharygin I.F., 기하학 : 9~11학년, Drofa, 1996.
14. Shklyarski D.O. · Chentsov N.N. · Yaglom I.M., 평면기하학, Fizmatlit, 2000.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 17 No. 3 (Aug. 2004), 93-108

A Study on Various Proofs of the Steiner-Lehmus Theorem

Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University **Inki Han**

In this article we study on various proofs of the Steiner-Lehmus theorem(any triangle that has two equal angle bisectors is isosceles). We suggest 6 geometric proofs and 3 algebraic proofs of the theorem in detail, analyze these proofs, extract related theorems, proof ideas.

Key words: Steiner-Lehmus theorem, angle bisector, isosceles triangle, geometric problem solving method, algebraic problem solving method

2000 Mathematics Subject Classification : 97C90, ZDM Classification : E54