한국수학사학회지 제17권 제3호(2004년 8월), 73-92

수학교육에서의 '기본개념'과 수학사의 접목*

-평균값의 예를 통해서 본 수업 모형-

한국수학사학회 **한경혜**
stern261@hanmail.net

본 연구에서는 브루너의 이론에서 처음 등장하여 수학과 교수·학습 방안을 구성하는 데 주요한 도구가 되어온 '기본개념'을 둘러싼 다양한 고찰을 다룬다. 기본개념의 주요한 특성 가운데 한 가지는 그 성립과정이 수학사적 전개와 조응한다는 점이다. 따라서 수학교육을 위한 내용과 방법을 구성할 때 수학사는 아주 유용하고도 중요한 토대로서 작용한다는 것을 기본개념의 탐색과 관련하여 다룬다. 그리고 기본개념으로서 평균값을 지도하는 방안을 모형으로 제시하도록 한다.

주제어: 기본개념, 평균값, 수학과 교수·학습, 발생원리, 피타고라스 학파, 슈케평균, 브루너, 수학사 활용, 보편개념, 비례론

0. 시작하며

모든 교과와 마찬가지로 수학을 배우는 것이 단지 단편적인 지식을 쌓는 것이 아니라, 지식 자체에 대한 비판적인 태도까지 포함하는 것이라면 전수된 지식의 양보다 질이 문제가 될 것이다. 교사는 학생들로 하여금 지식의 상대성에 대해서 자각할 수 있게 해야 하며, 어떤 사실을 받아들이는 것보다 수학적 지식이 어떻게 형성되는가에 대한 올바른 관점을 가지게 하는 것이 훨씬 의미 있는 일이라 할 수 있다. 이러한 맥락에서 유럽을 비롯한 서구 여러 나라에서는 70년대 중반부터 수학사를 교육적 측면에서 고찰하여 이를 수업에 활용하고자 하는 경향이 강해졌다.

그 배경으로는 우선 60년대를 풍미했던 이른바 '새수학'(New Math)이 소기의 성과를 내지 못한 데서 수학교육을 위한 역사적 고찰에 대한 필요성이 제기되었기 때문이다. 두 번째로는 쿤[1]이 1962년 **과학혁명의 구조**(The Structure of Scientific Revolution)를 펴내어 기존의 학문 이론에 일대 경종을 울린 이후 그 영향으로 수학 역시 역사적 문제제기에서 비켜날 수 없다는 라카토스[2]의 새로운 학문이론이 등장하게 된 것

* 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-043-C00001).
1) Thomas Kuhn, 1922~1996

을 들 수 있다. 라카토스의 이론은 수학 교육에 관한 관점에도 지대한 영향을 끼침으로써 그간의 수학과 교수·학습을 위한 연구에서 역사적 요소를 다루는 데 소홀해 왔다는 점에 대한 자성이 일기 시작하였다. 그 결과 수학과 교수·학습에 수학사를 접목시키기 위한 연구가 활발히 개진되었다. 한편 근래 들어 컴퓨터를 중심으로 한 학습환경의 변화로 전통적으로 확고하다고 여겨져 왔던 학습 목표, 내용, 방법 등에 변화가 생겨나게 되었다. 이에 다시 브루너[3]의 이론에서 비롯된 '기본 개념'을 수학과 교수·학습의 중심 주제로 삼고자 하는 움직임이 생겨나게 되었다. 아무리 학습 환경이 달라지더라도 변하지 않는 것은 '기본 개념의 학습'이라 보고 그에 대한 내용을 분명하게 설정하고자 하는 것이다.

본고에서는 브루너의 학습이론에서 중심이 되는 '기본개념'(fundamental idea)이 수학교육과 관련해서는 어떻게 정의되고 전개되어 왔는지를 살펴보고, 기본개념의 형성이 수학사와는 어떤 연관성을 지니고 있는지, 나아가 수학과 교수·학습 과정에서 기본개념을 형성할 수 있도록 수학사를 접목하여 수업을 진행시키기 위한 모형을 제시하도록 한다.

1. '기본개념'의 기원

브루너는 1960~70년대에 걸쳐 학습지도에 관해 많은 연구 업적을 남겼으며, 수학현대화 운동에 커다란 영향을 준 학자이다.[4] 그의 이론이 각광을 받기 시작한 것은 이른바 학문중심적 교육과정이라 일컫는 새로운 움직임과 관련이 있다. 학문중심적 교육과정은 1957년 소련이 인공위성 스푸트니크호를 발사하자 충격을 받은 미국에서 당시 교육의 주류를 이루던 진보주의 교육에 대한 비판이 일면서 등장하였다. 이전의 경험중심적 교육과정이 그 구성방식에서 지식의 체계성이 별로 치밀하지 않았고, 체계적인 사고와 연구에 필요한 능력을 기르는 데 결함이 많았다고 여기고 이를 지양하기 위한 운동의 일환으로 나타났던 것이다. 브루너의 주관 아래 1959년 우즈 홀(Woods Hole)에서 학자와 교육 전문가들이 모여 이전의 교육에서 드러난 문제점을 진단하고 그 대안을 모색하기 위한 회의가 개최되었는데, 브루너는 거기서 논의된 결과를 발전시켜 1960년에 **교육의 과정**(The Process of Education)이라는 소책자를 편찬해 낸다. 이 책은 수학교육을 위시한 교육 개혁에 관한 당시의 분위기를 알 수 있는 기록이기도 한데, 여기서 브루너는 기본개념에 관한 자신의 견해를 다음과 같이 피력하였다.

2) Imre Lakatos, 1922~1974
3) Jerome Bruner, 1915~
4) 수학교육현대화운동에 따른 새로운 교육과정을 '새수학'이라 일컬었다.

이 장의 처음부터 독자들은 어떤 교과든지 연령의 많고 적음을 막론하고 누구에게나 적절한 형태로 그 기초를 가르칠 수 있다는 주장을 접하게 될 것이다. 이러한 주장은 다소 놀랍게 들릴지도 모르지만, 교육과정을 수립하는 데에 간과되어 온 중요한 사실, 즉 모든 자연과학이나 수학에서 기본적인 개념이나 기초가 되는 주제들은 단순할 뿐만 아니라 누구에게나 설득력이 있다는 것을 강조하는 것이다.[5, p. 26]

브루너에 따르면 모든 교과목은 각각의 고유한 구조가 있으며 한 교과를 지도함은 바로 그 과목의 구조를 지도함을 뜻한다. 모든 현상을 개별적으로 연구하고 그 사실과 법칙들을 모두 파악한다는 것은 인간의 한정된 지력으로는 불가능하며 여러 모로 비생산적이므로 학생들에게 교과 내용의 기본적 구조를 이해시켜야 한다는 것이다.

지식의 구조는 교과의 구조 또는 학문의 구조와 동일한 의미를 갖는데, 교과의 구조를 파악하는 것은 한 가지 현상을 여러 가지 현상과 관련지어 이해하는 것이며, 구조를 학습하는 것은 사물이나 현상이 어떻게 관련되어 있는지를 학습하는 것이다. 구조를 이해하는 것은 사물이나 현상에 대한 기본적인 원리를 이해하는 것이며, 이를 통해 학습자는 내용을 쉽게 이해할 수 있고, 기억하기 쉬우며, 학습 이외의 일반적인 사태에 적용할 수 있을 뿐만 아니라 고등지식과 초보적인 지식 사이의 간격을 좁힐 수 있는 것이다.[1] 브루너는 이를 토대로 한 가설을 좀 더 분명한 어조로 밝힌다.

처음부터 우리는 다음의 가설을 제시한다: 어떤 어린이든지 각각의 발달 단계에서 어떠한 학습대상이든지 지적으로 완전한 형태로 성공적으로 배울 수 있다. 이는 대담한 가설로서 ...[5, p. 44]

그런데 지식의 구조를 반영한 교육과정 계획의 원리는 나선형 교육과정이다. 한 학문의 개념이나 원리, 태도, 사고방법 등은 학생의 발달단계가 높아짐에 따라 그 지적 성격의 동일성을 유지하면서 점점 세련된 형태로 가르칠 수 있도록 조직될 수 있는 것이다. 달팽이 껍질에 있는 선[5]이 입구 쪽으로 갈수록 깊고 넓어지는 것과 같이 학습자의 발달 수준이 높아질수록 교과내용의 폭과 심도가 넓어지고 깊어지는 것과 비슷한 형태로 전개된다고 할 수 있다.[6]

그렇지만 위의 인용문에서 밝힌 것처럼 브루너의 학설을 수용할 때에 종종 이 주장이 가설로서 제기되었다는 사실은 가려져 왔다. 이러한 가설이 수학교육과 관련하여 이론적으로 전개, 발전되어 온 것은 여러 학자들의 다양한 시도에 따른 결과였다.

---

5) 나선(螺線)

6) 중학교 7단계에서 다루는 1차 방정식과 9단계에서 다루는 2차 방정식과 같이 동일한 종류의 지식이 수준을 높여 학습자들에게 제시됨으로써 학습자들이 심화학습을 할 수 있도록 하는 것이다.

2. 기본개념에 대한 다양한 고찰

실제 대담한 가설로 제기되었다고 볼 수 있는 브루너의 이론을 수학교육과 관련하여 해석하려고 최초로 시도한 것은 비트만(Wittmann)으로 1974년에 펴낸 저서 수학수업의 기본 문제(Grundfragen des Mathematikunterrichts)에서 수학 수업을 기본적인 개념을 습득할 수 있도록 구성하는 것을 '기초개념 지향의 원칙'(Prinzip der Orientierung an Grundideen)이라 칭하였다.[30][7] 이리하여 브루너와 비트만 이래로 수학 교수・학습에서 기본 개념에 관한 고찰은 하나의 주요한 주제가 되었다. 한편 브루너 자신은 기본개념이 구체적으로 무엇인지에 대해서는 명시하질 않았다. 다만 그에 관해 언급해 놓은 다음의 구절을 근거로 브루너가 생각한 기본개념의 구체적인 내용을 유추해 볼 수는 있을 것이다.

> 수, 양 또는 확률을 정밀 과학을 위해서 필수불가결하다고 본다면 ...[5, S. 63]

1978년 폴라트(Vollrath)는 자신의 논문에서 브루너를 직접 인용하지는 않았지만 그와 비슷한 생각을 다음처럼 분명히 하였다.

> 수학 수업은 중심개념(Leitidee)을 통해 구성할 수 있다; 개념 형성, 특성과 관계의 파악, 문제 제기와 해결 전략은 수학 수업에서 탐구해야 할 수학적 개념의 핵심이다. 왜냐하면 그것을 통해서 교육이 완성되기 때문이다.[2, p. 29]

이러한 생각을 바탕으로 폴라트는 기본 개념에 대한 정의를 다음과 같이 내렸다.

> 내가 이제부터 개념이라고 말할 때 그것은 한 주제에서 핵심적인 사상, [대상을] 고찰할 때에 근본이 되는 핵심, 문제를 해결하기 위해 유용한 착상, 하나의 이론을 주도해 나가는 문제 제기, 정리를 나타내는 중심 명제, 알고리즘의 바탕에 깔려 있는 관계, 개념 형성과 결합되어 있는 직관 등을 뜻한다.[29, p. 29]

그렇지만 이러한 정의만으로는 기본개념이 구체적으로 무엇인지 파악할 수 없었으므로 그는 기본개념을 실제로 설정하는 데 도움이 될 수 있는 몇몇 중요 측면을 다음과 같이 제시하였다.[29]

- 개념에 의해서 생성된다.
- 사물의 핵심과 맞닿아 있다.
- 근본 주제를 알 수 있다.
- 고유한 사고 능력을 경험하게 한다.
- 망각에 빠지는 것을 지켜준다.

---

7) 본고에서는 1980년 판을 참조했다.

한편 수학이 발전함에 따라 기본개념 자체를 설정하는 것 자체가 상당 정도 일반화와 포괄성을 띠게 된다는 것은 아티야(Atiyah)가 다음과 같이 언급한 것을 보아서도 알 수 있다.

> 현대 수학의 가장 큰 장점이라고 할 수 있는 것은 대칭성, 연속성, 선형성 등 아주 광범하게 적용할 수 있는 성질을 강조하는 데에 있다.[2, pp. 73-74]

그럼에도 불구하고 수학 교육과 관련하여 구체적으로 기본개념을 어떻게 설정할 수 있을지는 여전히 남는 문제였다. 융(Jung)은 브루너에 근거하지 않으면서 독자적으로 수학에서의 개념, 혹은 수학교육에서 중심이 되는 개념의 기준을 다음과 같이 설정하였다.[17, p. 190]

· 계산 또는 알고리즘의 개념

· 무한 개념

· 측정 개념

융은 수학교육에서 기본적인 개념은 가급적 애매하면서도 흥미를 끌 수 있어야 한다고 주장하였는데, 이와 비슷한 맥락에서 논의를 전개시킨 것은 할모스(Halmos)라 할 수 있다. 그는 자신의 논문 "수학에 기본 요소가 있을까"(Does Mathematics Have Elements, 1981)에서 역시 브루너의 주장과는 독립적으로 다음과 같이 기술하였다.

> 많은 수학자들이 주지한 바와 같이 몇몇 기본적인 개념이 서로 다른 영역에서 광범하게 나타나는 몇몇 기본적인 개념이 있다는 것은 확실하다.[11, p. 147]

그는 "계산적" "범주적" "개념적"이라는 기준 위에서 아래의 목록을 제시하였다.[11]

· 일반 대수 : 구조(structure), 범주(category), 동형성(isomorphism), 몫(quotients)

· 규모 : 소수(primes), 쌍대성(duality), 비둘기집 원리(pigeonhole), 무한(infinity)

· 결합 : 반복(iteration), 교차(cross section), 지수(exponential)

· 유사성 : 호환성(commutativity), 대칭성(symmetry), 연속성(continuity)

브루너의 이론을 적극 수용하여 발전시킨 것은 피셔(Fischer)로서 교육 일반에서 기본개념의 내용을 제시하였으며, 특히 문제 해결 지향, 응용 지향, 구조 지향의 수학 교수·학습이라는 관점에서 미분과 관련한 실함수의 학습 이론을 전개하였다.[8] 그는 해석학 교과서의 목차에 상응할 정도로 상당히 촘촘한 목록을 작성하기도 하였다. 하이텔(Heitele) 역시 1975년에 브루너의 생각을 좀 더 구체화하여 통계학에서의 기본개념의 목록을 작성하면서 다음과 같이 서술하였다.

> 나는 다음 네 가지 각도에서 [기본 개념의] 목록에 도달하게 되었다.

(1) 브루너의 개념의 틀 안에서

(2) 통계학적 개념에 관한 발달심리학의 결과를 연구함으로써

(3) 통계학적 상황과 관련하여 다양하게 발생하는 오류를 연구함으로써

(4) 확률의 역사를 연구함으로써[12, p. 190]

특히 (3)과 관련하여 하이텔는 중요한 견해를 제시하였다.

> 기본 개념이 있으면 더불어 기본적인 오류도 존재하며, 둘은 서로를 동반상대(count-partner)로 삼게 된다. 여기서 오류는 세대나 연령, 문화적 간극을 메꾸어 주며 무엇이 참으로 "기본"인지에 대한 기준을 보여줄 것이다.[12, p. 191]

이 견해에 따르면 학습 과정에서 학생들이 범하는 실수나 각 학문의 분야사(分野史)에서 생기는 오류를 대비하여 분석함으로써 기본 개념을 설정할 수 있다는 것이다.

이밖에도 구체적으로 수학의 각 분야에서 기본 개념을 설정하려는 시도는 계속되었다. 1979년에 크론펠러(Kronfellner)는 '선형화'의 기본 개념에 관한 연구 결과를, 1988-89년에 단크베르츠(Danckwerts)는 교육과정상의 주요 개념으로 '선형성'을 제시하였다. 1979년에 슈라이버(Schreiber)는 "수학적 사고에서의 보편개념 - 전공교수법에서의 연구 대상"(Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik)이라는 제하의 논문에서 "학생들은 폭넓은 개념 또는 일상적인 사고와는 아무런 관계를 파악할 수 없는 개별적인 사실들을 당혹스럽게 마주하고" 있으므로 "몇몇 넓은 의미를 지닌 일반적인 개념을 직접적이고도 단순한 방식으로" 다룰 것을 권장하였다.[23] 특히 슈라이버는 교수학적인 견지에서 '보편개념'(univereselle Idee)에 관한 연구에서 밝혀야 할 것으로 다음을 제시하였다.

1. (보편개념의) 보편적인 틀에 관한 내용을 명확하게 규정할 수 있어야 한다. 더욱이 보편성에 관한 기준을 마련할 수 있는 게 바람직하다.
2. 적합한 개념에 관한 목록을 마련할 수 있어야 하며, 그 내적, 외적 관계를 규명할 수 있어야 한다.
3. 수학에 관한 적합한 상을 세우는 데 보편개념이 맡을 수 있는 역할에 대해 설명할 수 있어야 한다.
4. 보편개념을 수업에 도입하는 방안을 탐구해야 하는데, 그와 관련하여 어떤 자료가 특정한 개념을 가장 잘 나타낼 수 있는지에 답할 수 있어야 한다.
5. 특정한 부분 영역에서 보편개념을 표현하고 조합함으로써 될 수 있는 대로 수학의 많은 영역과 연관지어 분석할 수 있는 중심개념으로 나아갈 수 있어야 한다.[23, p. 166]

이러한 요구에 따라 다소 국지적이고 불완전하지만 다음과 같이 개념의 목록을 제시하였다.[25]

(1) 알고리즘(기계적인 연산이나 결정 과정; 계산가능성: 프로그래밍)
(2) 실진법(근사치 계산법; 모델링)
(3) 불변성(일정한 연산을 거치는 대상의 특성의 보존)
(4) 적합성(주어진 조건을 최대한 만족시키는 식, 크기, 수의 특성)
(5) 함수(함수적 종속성; 일대일 대응; 사상)
(6) 특성화(특성을 통한 대상의 분류)

나아가 슈라이버는 보편개념에 상응하는 내용을 지닌 주요개념과 방법을 구분하였으며, 방법은 다시 발견술[8]과 개념형성술(귀납, 추상, 관념화 등의)로 나누었다. 슈라이버의 이러한 견해는 더욱 진척되어 수학적 사고 과정에서 '보편개념'이 담당하는 역할을 설명하였는데, 대체로 다음과 같은 문제를 다루었다.[24]

수학을 한다는 것의 의미는 어디에 있는가? 수학과 관련하여 제시되는 개념 중에서 '보편개념'은 어떠한 관점에서 찾아낼 수 있는가?

이후 1985년에 벤더(Bender)와 슈라이버는 기하 수업에서 '보편개념'의 역할을 설파하고 그 목록을 다음과 같이 제시하였다.[3]

실진법(exhaustion); 반복; 귀납적 추론; 사상; 알고리즘; 양; 연속성; 적합성; 불변성; 무한; 관념화; 추상화; 대표성; 공간; 단위

그렇지만 이 목록은 너무 광범해서 오히려 체계적인 고찰을 어렵게 한다는 단점이 있다. 이에 슈라이버는 다시 이 목록을 세 개의 그룹으로 나누었다.

· 과정
· 특성
· 개념형성의 요소

슈바이거(Schweiger)는 1992년 브루너의 이론을 수학 교수·학습의 실제에서 구체화시키기 위하여 아음과 같은 목록을 작성하기도 하였다.[26]

· 선형성, 단순한 구조
· 분리, 닮음. 안정성, 독립성

이처럼 기본개념과 관련하여 여러 학자들이 내놓은 견해는 상당히 유사한 점이 많으면서도 차이점 또한 분명하게 눈에 띈다. 피셔는 그러한 까닭에 대하여 "기본 개념을 수업에 적용하는 것 못지 않게 찾아내는 것이 더욱 어렵다."[9, p. 62]고 피력했다.

8) Polya의 의미에서 발견술을 지칭한다.

이는 아마도 기본 개념 자체가 상당히 애매한 성격을 띠고 있기 때문이라 여겨지지만, 역으로 융은 기본 개념은 본질적으로 애매해야만 한다고 주장하기도 하였다. 즉, "기본개념의 정의가 엄밀하면 할수록, 의미가 더욱더 작아진다는 것이다."[17, p. 168] 슈바이거는 기본 개념에 대한 다섯 가지 기준을 제시하였는데, 그에 따르면 기본개념은 다음을 만족하는 내용, 전략, 기술의 총체라 할 수 있다.

첫째, 수학의 역사적 전개 과정에서 찾아볼 수 있으며,

둘째, 수학 교수·학습 과정을 체계적으로 구성할 수 있는 근거가 되어야 하며,

셋째, 수학이 무엇인지에 대한 질문과 수학에 대한 설명에 적합하여야 하며,

넷째, 수학 수업을 역동적이고 이해하기 쉽게 하는 토대라야 하며,

다섯째, 일상의 언어와 사고에서 그에 상응하는 언어 또는 행위의 원형을 가지고 있다.[26, p. 207]

이 중에서 둘째와 넷째 항목의 내용은 규범적 성격이 강하고 나머지 세 항목은 기본개념의 기술적(記述的) 측면을 밝힌 것이다. 슈프(Schupp)은 그 중에서 세 가지 측면에서 비슷한 주장을 전개한다:

(1) 기본 개념은 그 분야의 역사적 전개 과정에서 드러나야 하며,

(2) 기본개념은 (적어도 부분적으로라도) 그 본질에 대하여 해명할 수 있어야 하며,

(3) 기본개념은 수학 외에서도 사고의 원형을 발견할 수 있어야 한다.[25, p. 60]

위 두 학자의 견해와 상통하게 퀴팅(Kuetting)은 통계학 수업과 관련하여 기본개념에 대한 자신의 견해를 다음과 같이 피력하였다.

통계 수업에서 기본 개념과 목표는 학습을 이끄는 주된 생각과 전략, 기술 등이라 할 수 있는데 이는 교육과정의 원리(나선형 원리)로서 수업에 적용할 수 있도록 일상적으로 견지하고 있는 사고와 연결되어 있다.[21, p. 88-89]

이러한 생각에서 한 발 더 나아가 벤더와 슈라이버는 기본개념-보편개념-이 지녀야 할 특성에 대하여 다음처럼 정식화하였다.

수학을 하는 데서 적용할 수 있는 일반적인 틀을 생각할 수 있다. 그 일반성은 단지 자주 사용되어서가 아니라 여러 분야에 걸쳐 광범하게 사용되는 것을 일컫는다...보편개념은 다음의 특성을 지니고 있어야 한다.

- 넓이(논리적 일반성)
- 깊이(다양한 분야에 적용가능)
- 의미(일상적 사고와 연결)[3, p. 199]

3. 수학에서 '기본개념'이란?

그렇다면 이처럼 다양한 견해를 기초로 기본개념을 어떻게 체계화시킬 수 있을 것인가라는 문제가 제기된다. 그 난점은 일찍이 티체(Tietze) 등이 언급한 바 있다. 그는 특히 기본개념을 찾아내는 것이야말로 학습내용이 풍부해지는지 여부에 대한 교수학적 답변이 될 수 있다는 견해를 가지고 있었다. 그렇지만 기본개념이 무엇인지에 대한 논란 역시 불가피한 것으로, 그 이유는 개념 자체가 모호하다는 특성을 가지고 있는데다 수학 자체에 대하여 서로 다른 견해를 가지고 있으며 나아가 교육학적 관점 역시 다양하기 때문이라고 보았다.[27, p. 41] 사실 학문 자체가 전문 분야에만 국한되지 않는 일반적이고도 보편적인 개념에서 비롯되는 인간적 행위의 연장이라고 볼 수 있다. 따라서 수학에서의 기본 개념이란 이처럼 더욱 보편적인 개념을 구체화한 것이라고 할 수 있다.

이러한 관점에 상응하여 슈라이버는 수학 수업에서 보편 개념(혹은 기본개념)의 효과를 두 가지 측면에서 제시하였다. 즉 기본개념은 학생의 학습에서 국소적인 구조화를 가능하게 해 주며, 교사의 메타인지의 한 요소가 될 수 있다는 것이다.[24, p. 72] 나아가 피커(Picker)는 브루너의 이론에 근거를 두고 기본개념을 지향하는 수업이 다음 네 가지 효과를 가져올 수 있다고 주장하였다.

1. 학습의 대상이 무엇인지를 파악할 수 있다.
2. 개별적인 내용이 쉽게 잊혀지지 않는다.
3. 기본적인 원리를 이해하게 함으로써 전이를 쉽기 한다.
4. '심화된' 지식과 '기본적인' 지식 사이의 간극을 좁힌다.
5. 학습대상이 흥미로워진다. 학생으로 하여금 동기유발이 더 잘 되게 한다.
6. 학습대상이 더욱 현실적이 된다. 학생은 진짜 수학이 뭔지를 경험한다.[22, p. 70]

이 밖에도 많은 학자들이 수학교육에서 기본개념이 가지는 의미에 대하여 그 중요성을 설파하였다. 이러한 가정에 따라 실제로 기본개념 지향의 수업이 확실한 성과를 거둘 수만 있다면 그것을 찾아내는 일은 아주 의미 있는 작업이라 할 수 있다.9)

이상의 논의를 바탕으로 몇 가지 잠정적인 결론을 정리할 수 있다. 우선 기본개념에 관한 정의는 대체로 비슷하나 그를 토대로 한 목록은 상당히 다르다는 것이다. 이는 수학이라는 학문을 바라보는 관점의 차이에서 비롯된 것이라 할 수 있다.

그리고 수학과 교수·학습과 관련해서는 우선, 수학의 역사적 전개과정에서 기본개념이 어떻게 확립되는지를 보이는 것, 다음으로 일상의 사고와 언어가 기본개념에 어

9) 교수학습과정을 기본개념을 지향하는 방향으로 구조화하는 것이 실제 얼마나 유효한지에 관한 확실한 결과가 나와 있지는 않다. 여기서는 하나의 가설로 논의를 전개하도록 한다.

떠한 방식으로 대응하는지를 이른바 "교수학적 현상학"(didactical Phenomenology)의 견지에서 탐구[10]하는 것, 또한 실제로 교수학습과정에서 어떻게 다루어지는지, 어떻게 영향을 미치는지를 실증적으로 뒷받침하는 것 등이 필요함을 알 수 있다. 이러한 방향으로 논의를 전개하되 여기서는 위의 여러 견해 중에서 슈바이거의 정의를 근거로 삼고자 한다. 이는 무엇보다도 앞서 언급한 다양한 정의의 핵심을 포괄하고 있기 때문이다. 다시 한 번 정리하자면 수학의 기본개념이란 역사적 전개 과정에서 찾아볼 수 있으며, 수학이 무엇인지에 대한 질문에 대해 적절한 설명을 부분적으로나마 할 수 있어야 하며, 일상의 언어와 사고에서 그에 상응하는 언어 또는 행위의 원형을 가지고 있어야 한다. 그리고 수학교육과 관련해서는 수학과 교수·학습 과정을 체계적으로 구성할 수 있는 근거가 되어야 하며, 수학 수업을 역동적이고 이해하기 쉽게 하는 토대라야 한다는 것이다. 이에 따라 기본개념의 조건을 충족하는 요소를 찾아내어 실제로 수업과 접목시키는 모형을 제시하고자 한다. 특히 이 정의에 따르면 기본개념의 형성과정 자체가 역사적 과정을 전제로 하고 있으므로 수학사를 활용하는 것이 필수불가결하다고 보인다.

4. 교수학적 견지에서 본 기본개념의 학습과 수학사의 접목

먼저 기본개념 지향의 수업이 기존의 교수학습이론과 관련된 논의에서 어떤 지위를 점할 수 있는지, 그리고 그 과정에서 수학사의 접목은 어떠한 이론적 근거를 가지게 되는지를 살펴보도록 한다.

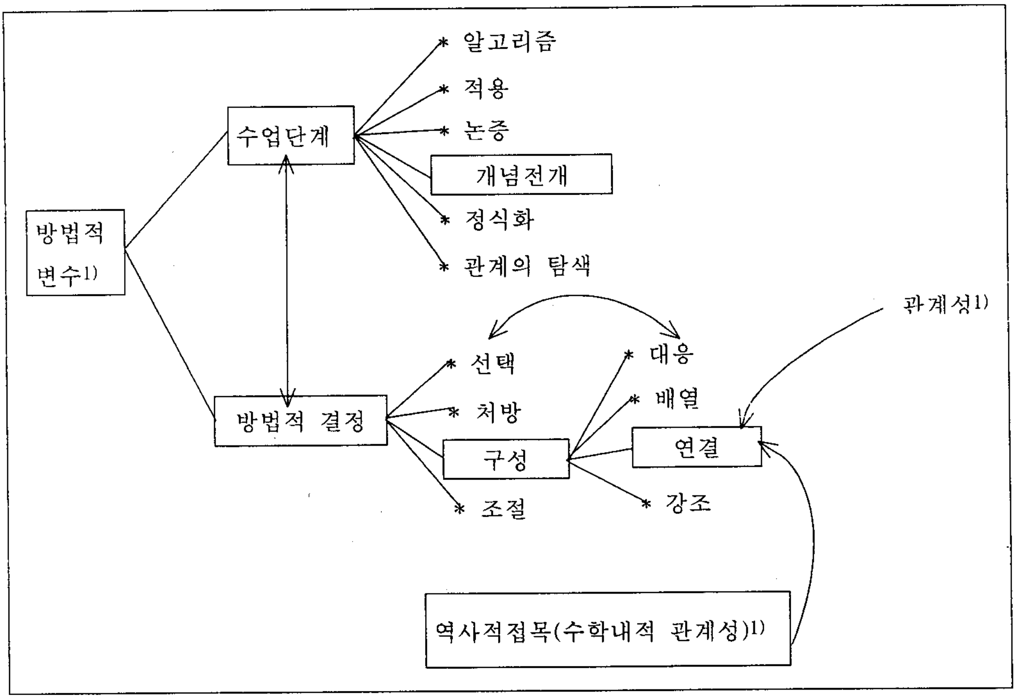
힐베르트[11]의 제자였던 퇴플리츠(Toeplitz)는 자신의 저서에서 다음과 같이 기술하고 있다.

> 오늘날 우리가 규범적인 필수 요목으로 가르치고 있는 미적분학의 모든 대상, 즉 중간값 정리, 테일러 급수, 수렴에 관한 개념, 정적분 및 심지어 미분계수 자체에서도 '왜 그렇게?'라든가 '어떻게 그러한 생각에 이르게 되었는가?' 등의 질문은 결코 제기되지 않는다. 이 모든 필수적인 내용이 그것이 만들어지던 당시에는 한때 흥미로운 탐구의 대상이었으며, 자극적인 연구의 대상이었음에 틀림없다. 우리가 이들 개념의 근원으로 되돌아간다면, 시간이 흐르면서 낀 먼지나 오랜 동안 소모됨으로써 생겨난 상처가 떨어져 나가고 다시 생명력 있는 모습으로 우리 앞에 나타날 것이다.[28, p. 27]

퇴플리츠는 여기서 클라인(Klein)의 이른바 '발생원리'의 의미에서 수학사를 수학수업에 접목시키는 것이 얼마나 유의미한지를 풍부하게 표현하고 있는 것을 볼 수 있다. 이는 프로이덴탈[12]과 비트만의 이론에 따르면 '관계성'(Beziehungshaltigkeit), 그것

10) cf. Freudenthal 1977
11) David Hilbert, 1862~1943

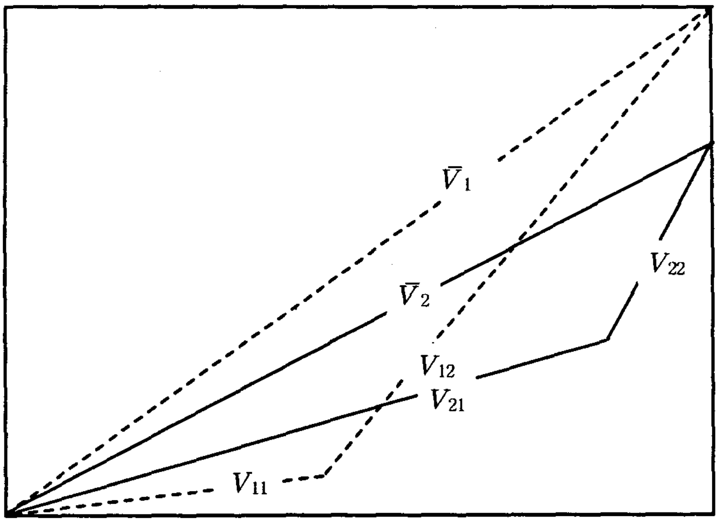
도 *수학내적 관계성*(innnermathematische Beziehungshaltigkeit)이 형성된다는 것을 뜻한다. 동시에 이는 폴라트[29]가 수학과 수업방안을 구성하기 위하여 도입한 방법적 변수의 하나인 '연결'(Verbindung)에 해당하는 것이라고도 볼 수 있다. 이를 히셔(Hischer)의 도표에 따라 나타내 보면 다음과 같다.[16, p. 12]



5. 기본개념으로서의 '평균값' 성립

시속 30km/h(<그림 1>에서 V_{11}에 해당)로 달리다가 시속 100km/h(<그림 1>에서 V_{12}에 해당)로 바뀐 자동차와 시속 70km/h(<그림 1>에서 V_{21}에 해당)로 달리다가 120km/h(<그림 1>에서 V_{22}에 해당)로 바뀐 자동차의 평균속도에 대해서 가지게 되는 직관적인 표상은 후자의 평균속도가 더 크다는 것이다. 그렇지만 <그림 1>의 그래프를 거리와 시간의 관계, 즉 가로축은 시간을, 세로축은 거리를 나타낸 것으로 해석해 보면, 얼마 동안의 시간(혹은 거리)을 달린 후에 속도가 바뀌었는가에 따라서 평균속도가 결정되어 우리가 가지는 직관에 위배되는 경우가 생김을 알 수 있다. 이처럼 평균이라는 개념은 일상생활에서 사고의 원형을 가지고 있으며 그 오류는 수학화를 통해서 극복이 가능함을 알 수 있다. 아울러 이 그래프에서 각각의 평균속도를 산출하

12) Hans Freudentahl, 1905~1990



<그림 1>

는 식은 $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$($b$, d는 시간, a, c는 거리)로서 '잘못된' 분수의 덧셈이다.[13] 이 '잘못된' 분수셈 역시 역사적 전통을 가지고 있는데, 지금으로부터 약 500년여 전인 1484년에 프랑스의 의사 슈케(Nicolas Chuquet, 1430?~1487)가 자신의 저서인 수의 과학에서의 세 부분(Triparty en la science des nombres)에서 세 분수의 크기를 비교하면서 다음과 같은 사실을 밝혔다(Boyer, 1968):

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

그 이후로 '슈케평균'이 두 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$의 평균값의 한 형태로 기능해 왔다. 예컨대 농도가 다른 두 액체를 섞었을 경우의 농도계산 등에서는 곧바로 적용할 수 있다. 여기서 '평균'의 일반적 정의를 함수로 나타내어 보면, 다음과 같다고 할 수 있다.

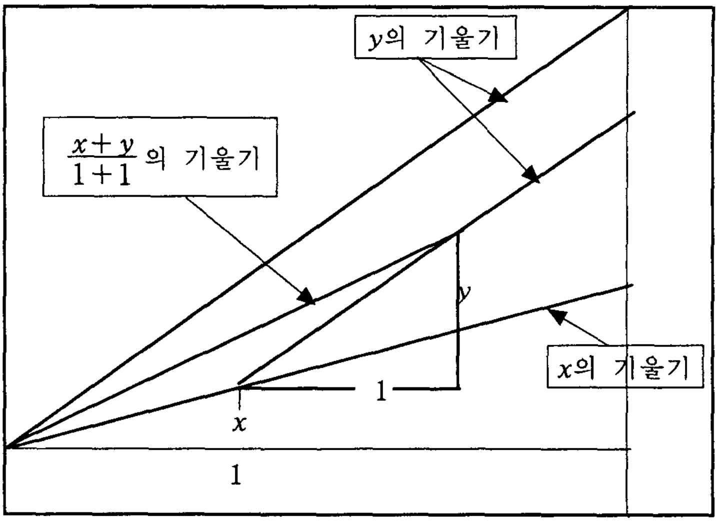
$$\textit{평균함수}\ M\colon\ \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$$

<그림 2>에서 가로의 길이가 각각 1이고 세로의 길이가 각각 x와 y인 삼각형을 잡으면, 그 기울기는 각각 $\frac{x}{1}$와 $\frac{y}{1}$가 되고 그 기울기에 대한 '슈케평균'은 다음과 같이 바로 산술평균이 된다.

$$\frac{x}{1} \oplus \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1+1}$$

---

13) $\frac{4}{10} \oplus \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$이며 $\frac{2}{5} \oplus \frac{1}{10} = \frac{3}{15}$로서 통상적인 분수 계산과는 다른 결과가 나온다.



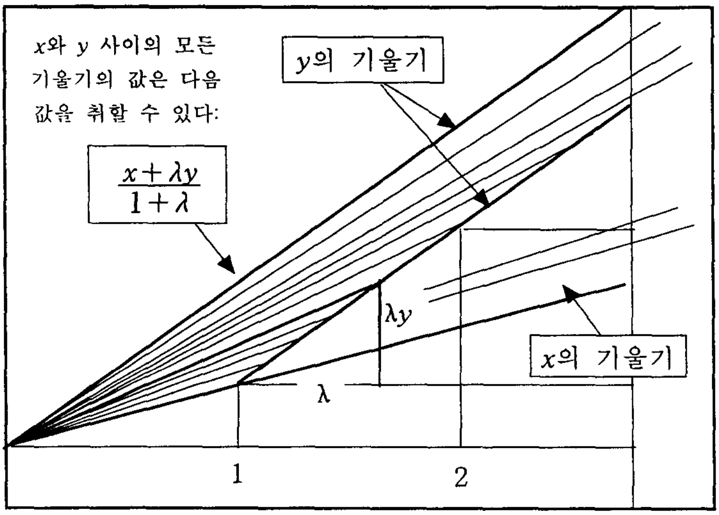
<그림 2>

이제 <그림 3>에서 λ를 0에서 ∞까지 변화시키면서 평균기울기를 구하면 평균기울기의 값은 다음과 같이 둘 수 있다.

$$M(x, y) = \frac{x}{1} \oplus \frac{\lambda y}{\lambda}$$

이때, $\lambda = \frac{m-x}{y-m}$, $m := M(x, y)$이다. 따라서 다음을 평균함수로 정의할 수 있다.[16]

$$M(x, y) := \frac{x+\lambda y}{1+\lambda} \left(= \frac{x}{1} \oplus \frac{\lambda y}{\lambda} \right)$$



<그림 3>

그런데 길이의 관계로서 $\frac{m-x}{y-m}$은 약 2500년전 피타고라스 학파가 이미 사용하였다. 즉 평균값에 관한 이론을 최초로 세운 것은 바로 피타고라스 학파였던 것이다.

인류문화사를 살펴보면 평균값에 관한 기본적인 직관은 아주 기본적이라 할 수 있을 만큼 다양한 흔적으로 남아 있다. 예컨대 지금으로부터 4,500년 전 바빌로니아 수학에서 제곱근의 근사치를 구하고 표를 만드는 과정에서 이미 '평균'의 개념이 사용되었으며, 2,500년 전에는 (구) 피타고라스 학파가 세운 '비례론'에서 평균값에 관한 연구가 수행되었다는 기록이 전해져 온다. 또한 기원전 3세기경에 (신) 피타고라스 학파는 등차, 등비수열을 연구하면서 평균값의 개념을 사용했다고 한다. 그 후 근대 해석학의 발달 과정에서도 변화율, 미적분에서의 중간값 정리 등에서 '평균값'에 관한 개념이 형성되고 있는 것을 볼 수 있으며, 통계학에서도 빈도, 중간값, 분산, 편차 등이 평균값을 포괄된다고 하겠다. 이밖에 기하학에서도 중점, 수직이등분선, 각의 이등분, 선분의 이등분 등의 '평균값'이 존재한다. 이로써 '평균'은 수학의 전 영역을 관통하는 개념(idea)이며, 수학의 역사적 발달 과정에서 다양한 형태로 형성되어 왔음을 알 수 있다. 또한 개념의 형성 과정에서 부분적이나마 수학의 본질이 무엇이지를 암시해 주는 바가 적지 않다. 즉 추측, 형식화, 증명, 반론, 논증, 일반화, 체계화, 이론 구성 등이 평균값 형성 과정에서 드러난다. 한편 수학 외적인 일상생활에서 '평균'이라는 개념에 관한 사고의 원형이 나타난다. 이로써 '기본개념'이 갖추어야 할 조건 중 기술적 측면에 대한 확인은 되었다고 할 수 있다. 그렇지만 평균값 개념이 규범적 측면으로 제기된 내용으로서 교수·학습과정을 체계적으로 구성하기 위한 보조 수단이며, 수학 수업을 역동적이고 이해하기 쉽게 하는 토대임을 입증하는 것이 여전히 요구된다고 할 수 있다. 이는 실제 구성한 수업 방안을 현장의 수업에 적용하고 그에 대한 성과를 확인하는 작업과 더불어 확인할 내용이지만 여기서는 그 모형의 대강을 제시하는 것으로 대신한다.

6. 수업에 적용하는 예 : 피타고라스의 평균

'피타고라스의 평균'에 관한 다음의 수업 구성은 현행 교육과정에 따르면 제곱근의 뜻과 성질을 도입하고 난 후인 9단계 이후로 적용이 가능한 내용이다.[14]

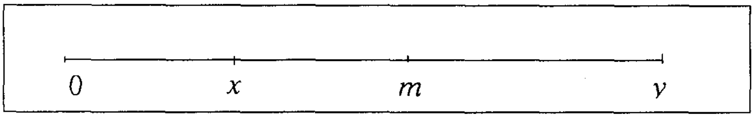
1) 도입 : 바빌로니아 시대의 유물인 쐐기문자판에 관한 자료 사진을 사용하여 $\sqrt{2}$의 근사치를 다음과 같이 구했음을 설명한다

14) 이 모형은 내용이나 수업방식에서 기존의 그것과의 차별성을 드러내기보다는 기본개념으로서 평균값에 관한 수학적 지식을 구성하도록 하는 것이 목표임을 밝혀둔다.

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}(=1.414212)$$

2) 문제 제기와 설명: '어떻게 바빌로니아인들은 이처럼 참값에 근접한 값을 구했을까?'라는 문제를 제기해 볼 수 있다. 이에 대해 자료로 남은 역사적인 설명은 없지만 피타고라스(Pythagoras, 기원전 530~350)가 메소포타미아에 머물면서 평균값에 대한 지식, 즉 바빌로니아에서는 보편화되어 있던 산술평균, 기하평균, 조화평균에 대한 계산법-을 터득했음을 설명한다.

3) 문제 제기와 설명: '그렇다면 피타고라스는 평균값을 어떻게 설명했나?'라는 문제를 제기하고 그에 대한 역사적 사실을 설명한다.



<그림 4>

피타고라스는 양의 실수 x와 y 사이에 있는 제3의 수 m을 '평균'으로 놓고, 앞서 슈케평균과 관련하여 언급한 $\frac{m-x}{y-m}$와 길이의 비와의 관계를 연구하였다. 그 결과 오늘날 널리 쓰이는 중요한 내용은 다음과 같다.

m은 x, y의 산술평균	$\Leftrightarrow$	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{x}\ (m=:A(x,y))$
m은 x, y의 기하평균	$\Leftrightarrow$	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{m}\ (m=:G(x,y))$
m은 x, y의 조화평균	$\Leftrightarrow$	$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{y}\ (m=:H(x,y))$

즉 $A(x,y)=\frac{x+y}{2}$, $G(x,y)=\sqrt{xy}$, $H(x,y)=\frac{2xy}{x+y}$이지만 실제로 피타고라스 학파는 이밖에 다음과 같은 7개의 평균을 더 산출하였다. 즉, 다음 관계식을 이용했다.

$$\frac{m-x}{y-m}=\frac{y}{x},\quad \frac{m-x}{y-m}=\frac{m}{x},\quad \frac{m-x}{y-m}=\frac{y}{m},\quad \frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{m},$$

$$\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{y},\quad \frac{y-x}{y-m}=\frac{y}{x},\quad \frac{y-x}{y-m}=\frac{m}{x}$$

이 관계식으로부터 다음을 유도해 내었다.

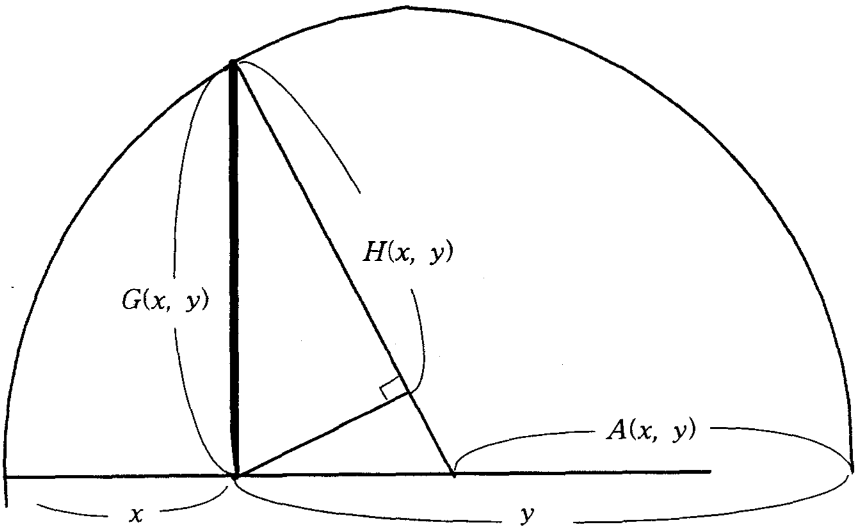
$$\frac{x^2+y^2}{x+y},\quad \frac{y-x}{2}+\sqrt{\frac{(y-x)^2}{4}+x^2},\quad -\frac{y-x}{2}+\sqrt{\frac{(y-x)^2}{4}+y^2},$$

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4xy-3x^2},\quad y-\frac{(y-x)^2}{y},\quad x+\frac{(y-x)^2}{y},\quad \max\{y-x,\ x\}$$

4) 설명 : 이후에 파포스(Pappus, 약 4세기 전반) 역시 산술, 기하평균의 관계를 탐구했음을 설명한다. 이를 통해 기하학과의 연계성도 추구할 수 있다.

그리고 아래의 관계가 성립함을 확인토록 한다:

$$x<y \Rightarrow x< H(x,y)<G(x,y)<A(x,y)<y \ (*)$$



<그림 5>

5) 산술평균, 기하평균, 조화평균의 명칭의 역사성을 보이고 다음과 같은 평균함수의 특성을 발견토록 한다.

$$G(A(x,y),H(x,y))=G(x,y)$$

이로써 위의 (*)부등식과 함께 바빌로니아 알고리즘(Babilonian Algorithm)을 유도할 수 있다. 즉 $A(x,y)-x=\frac{1}{2}(y-x)>0$, $H(x,y)<A(x,y)$, $x<H(x,y)$이므로, 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$0<A(x,y)-H(x,y)<\frac{1}{2}(y-x)\ (**)$$

이를 이용하면 제곱근 근사값을 구하는 알고리즘을 다음 <그림 6>의 구조도로 나타낼 수 있음을 보인다.

<table>
<tr><td colspan="2">r 입력 (r>0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ε 입력 (ε>0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">x, y 입력
(x, y>0, xy & xy=r)</td></tr>
<tr><td>y−x<ε일
때까지 반복</td><td>z:=H(x, y)
y:=A(x, y)
x:=z</td></tr>
<tr><td colspan="2">근사값 출력
approx(√r, ε):= A(x, y)</td></tr>
</table>

<그림 6>

7. 결

수학사 도입의 가장 일반적인 근거로 운위되는 이른바 '발생원리'는 20세기 초반에 클라인이 제기한 이래 퇴플리츠 등이 그에 대한 지지 입장을 강력하게 역설해 왔고 프로이덴탈, 비트만 등이 그를 뒷받침하는 여러 가지 논의를 교수학적 측면에서 제공해 주었다.

본 논문은 수학사 활용의 교수학적 근거를 마련하고자 진행되어 온 논의를 교육학 전반에서 큰 흐름을 형성해온 브루너의 이론에 바탕을 둔 '기본개념'에 관한 논의와 연결시켜 정리한 것이라 할 수 있다. 흥미로운 것은 역사적으로 뿌리를 달리하는 두 방향이 이러한 시도에서 하나로 합쳐졌다는 사실이다. 부르바키(Bourbaki)의 영향 하에 계획되고 실행에 옮겨진 '새 수학'의 핵심은 일반적인 개념을 가급적 일찍 도입하여 수학적 '모구조'(mother sturcture)에 대한 인식을 할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 이는 개념의 상대화 또는 변화를 애초부터 불가능하게 함으로써 수학을 정적이고도 역사와 무관한 학문으로 보게 한다는 비판이 제기되면서 '새 수학'에 대항하는 움직임으로서 수학에 대한 역사적 고찰을 해야 하고 수학사적 측면을 학습에 도입하여야 한다는 각성이 일어난 것이다. 그런데 여기서 주목할 사실은 부르바키와 브루너의 기본 관점이 상당히 유사하여 실제로 1970년대까지는 서로 영향을 미쳤다는 것이다. 물론 진보, 보수를 가르는 정치적 입장처럼 실천적 방침까지 확연히 구분하도록 하는 이론은 아니지만 동일한 뿌리에서 서로 다른 교수학적 지침이 나올 수 있다는 사실은 자못 시사하는 바가 크다고 하겠다.

참고 문헌

1. 김응태 · 박한식 · 우정호, 수학교육학개론, 서울대학교 출판부, 1995.
2. Atiyah, M.F., "Trends in Pure Mathematics," in: *Proc. Third ICME* (ed. by H. Athen and H.Kunle), Organising Committee of 3rd ICME 1977.
3. Bender, P. · Schreiber, A., *Operative Genese der Geometrie*, Wien-Stuttgart, 1985.
4. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1968.
5. Bruner, J.S., *Der Prozess der Erziehung*, Düsseldorf und Berlin: Schwann Verl., 1976.
6. Cantor, Moritz, *Geschichte der Mathematik* Band 2, Leibzig: Teubner, 1900.
7. Dankwerts, R., "Linearität als curriculare Leitidee," *Beiträge zum MU*, 1989, 124-126.
8. Fischer, R., "Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen," *ZDM* 8(1976), 185-192.
9. Fischer, R., "Unterricht als Prozess der Befreiung vom Gegenstand - Visionen eines neuen Mathematikunterrichts," *JDM. Jg.* 5(1984) Heft 1/2, 51-85.
10. Freudenthal, H., "Didaktische Phaenomenologie mathematischer Grundbegrffe," *MU.* 23/3(1977), 46-73
11. Halmos, P., "Does Mathematics Have Elements?," *The Mathematical Intelligencer,* 3(1981), 147-153.
12. Heitele, D., "An epistemological view on fundamental stochastic ideas," *Educ. Stud. Math.* 6 (1975), 187-205.
13. Hischer, Horst, "Historische Verankerung als methodische Variante im Mathematikunterricht," *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1981, 43.
14. Hischer, Horst, "Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassischer Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix- ein Beispiel fuer den Sekundarbereich II," *Mathematik in der Schule*, 32(1994) 5.
15. Hischer, H. · Scheid, H., *Grundbegriff der Analysis*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
16. Hischer, H., "Fundamentale Ideen und Historische Verankerung dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung," *Mathematica didactica*, 21(1998) 1, 3-21
17. Jung, W., "Zum Begriff einer mathematischen Bildung," Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidatik. *Math. did.* 1(1978), 161-176.

18. Kronfellner, M., "Das Prinzip der Linearisierung," *Math. didactica* 2(1979), 1-32.
20. Kronfellner, M., *Historische Aspekte im Mathematikunterricht: eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen*, Wien: Verlag Hoelder-Pichler-Tempsky, 1988.
21. Kuetting, H., "Stochastisches Denken in der ASchule- Grundlegene Ideen und Methoden," *MU* 31(4)(1985), 87-106.
22. Picker, B.(Hrsg.), "Mathematikunterricht als Vermittlung von grundlegegenden Ideen," *MU* 41(4)(1985), 6-9.
23. Schreiber, A., "Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsge-genstand der Fachdidaktik," *Math. did.* 2(1979), 165-171.
24. Schreiber, A., "Bemerkungen zur Rolle universelle Ideen im mathmatischen Denken," *Math. didactica* 6 (1983), 65-76.
25. Schupp, H. "Optimieren als Leitlinie im Mathematikunterricht," *Math.Semesterberichte* 31(1984), 59-76.
26. Schweiger, Fritz, "Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik," *Journal für Mathematikdidaktik* 13(1992), 2/3, 199-214.
27. Tietze, U.P. · Klika, M. · Wolpers, H., *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*, Vieweg, 1981.
28. Toeplitz, O., "Das Problem dr Universitaesvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihrer Abgenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren Schulen," *Jahresbericht der DMV* 36(1927), 90-100.
29. Vollrath, Hans-Jahaim, "Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht," *Der Mathematikunterricht* 22(1976) 5, 7-24.
30. Wittmann, E., *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1980(6).

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 17 No. 3 (Aug. 2004), 73-92

Fundamental ideas in Mathematics Education and Using History of Mathematics

The Korean Society for History of Mathematics **Kyeong-hye Han**

The paper surveys various attempts to use the concept of 'fundamental ideas' -Bruner's concept- as a tool for organizing mathematics teaching and research in mathematics education. One of the characteristics of fundamental ideas in mathematics is their correspondence to the history of mathematics; therefore in forming out contents and methods in mathematics education, the history of mathematics may be serve as an interesting aspect. It is demonstrated by the example of mean values.

Key words: fundamental ideas, mean value, Didactics of Mathematics, genetic principle, universal ideas, ratio theory

2000 Mathematics Subject Classification : 01A99

ZDM Classification : A30