한국수학사학회지 제17권 제3호(2004년 8월), 23-32

유클리드의 원론에 나타난 대수적 개념에 대하여

건국대학교 수학교육과 홍진곤
dion@konkuk.ac.kr

서울대학교 대학원 수학교육과 권석일
steinein@dreamwiz.com

본 고에서는 유클리드의 원론에 나타난 대수적 개념들을 개괄하고, 현대적인 기호로 그 의미를 분석하였다. 유클리드의 원론에는 이차방정식, 곱셈공식, 비례식, 정수론, 무리수 등의 대수적 개념이 포함되어 있으나, 그 표현과 추론은 완전히 기하학적인 형태로 이루어져 있다. 이러한 내용을 분석하는 것은 대수학의 발생적 본질을 찾아 최초에 수학이 만들어지는 상황을 학생들에게 경험하게 함으로써 수학화를 구현하려는 교육적인 문제의식에도 일종의 시사를 제공하게 될 것이다.

주제어 : 유클리드, 원론, 대수적 개념, 발생

0. 들어가는 글

총 13권으로 이루어져 465개의 명제가 수록되어 있는 유클리드(Euclid)의 원론(Elements)은, 기하학뿐만 아니라 당시의 일반 수학 전체에 걸쳐 있는 내용을 다루고 있다. 잘 알려져 있는 중등 기하학의 내용은 주로 원론의 제I, III, IV, VI, XI, XII, XIII권의 내용으로부터 비롯된 것이라고 할 수 있지만, 모두 102개의 명제를 싣고 있는 제VII, VIII, IX권은 오늘날의 정수론에 해당하는 내용을 다루고 있으며, 제II권에는 현대적인 의미로 볼 때 이차방정식이나 곱셈 공식의 내용이, 제V권에는 비례식에 관한 내용, 제X권에는 무리수에 관한 내용이 각각 포함되어 있다.

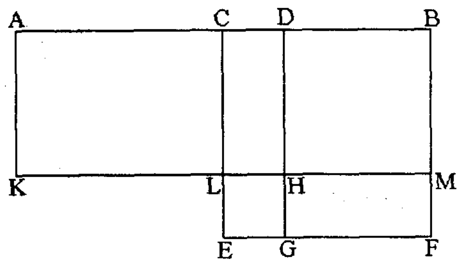
그러나 원론에 포함된 이러한 대수학적인 내용들은 전형적인 수학 교재로 사용되었던 기하학에 비하여 잘 알려져 있지 않은데, 그것은 원론에서의 대수적 추론이 완전히 기하학적인 형태를 띠고 있다는 데에 주로 기인한다. 예를 들면, A의 제곱근을 넓이가 A인 정사각형의 한 변의 길이로, A와 B의 곱 AB를 변의 길이가 A와 B인 직사각형의 넓이로 도입한다거나, 방정식 문제를 기하학적인 작도의 맥락에서 의미를 부여하고 해결하는 것 등이 원론에서 나타나는 대수적 개념의 표현이다. 대수학의 발달

에서 무엇보다 중요한 것은 기호주의의 발달이며, 기호를 사용함으로써 대수적인 문제를 일반적이고 형식적인 방법으로 취급하여 그 해법을 공식화할 수 있게 되었다고 할 수 있기 때문에 지금의 우리에게는 원론에서와 같이 기호가 없는 상태에서 대수적 사고를 진행시키는 것 자체가 매우 낯선 일일 것이다.

본 고에서는, 원론에 포함되어 있는 대수적 개념들을 개괄하고 그 중 대표적인 것들은 현대적인 기호와 용어로 그 의미를 분석해 보고자 한다. 이러한 작업은, 대수학의 발생에 관한 실증적이고 역사적인 통찰을 통하여 그 본질을 파악하는 것과 더불어, 수학이 최초에 만들어지는 상황을 학생들에게 경험하게 함으로써 수학화를 구현하려는 교육적인 문제 의식에도 일종의 시사를 제공하는 것을 가능하게 할 것이다.

1. 이차방정식과 곱셈 공식(원론 제II권)

원론 제II권의 명제 5는 "한 선분을 등분할하는 점과 부등분할하는 점을 잡고, 부등분할한 두 선분으로 만든 직사각형과 두 분할점 사이의 선분으로 만든 정사각형의 넓이를 더하면 이는 원래 선분의 절반으로 만든 정사각형의 넓이와 같다."1)이다[3].



[그림 1]

이 명제의 내용을 시각적으로 확인하기 위하여, 처음 주어진 선분 AB와 등분할점 C 및 부등분할점 D를 설정하고, [그림 1]에서와 같이 선분 BM을 선분 DB와 합동이 되도록, 또 선분 BF를 선분 CB와 합동이 되도록 그려 보자. 그러면 위 명제의 내용은 □ADHK+□LHGE=□CBFE임을 의미하는데, 유클리드는 □CDHL=□HMFG임을 이용하여 이를 기하학적으로 증명하고 있다.

이 내용을 대수적인 공식으로 표현하기 위하여 $AB=a$, $AD=x$라 두면 넓이들 사이의 관계식을 $x(a-x)+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 과 같이 표현할 수 있는데, 좌변을 대수적으로 정리하면 이 식은 간단히 증명할 수 있다.

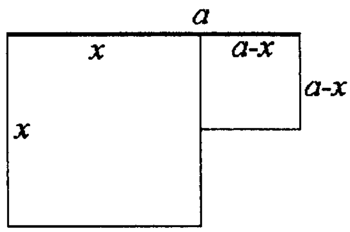
그런데 이 명제 5로부터 만들 수 있는 대수적 표현은 이것만 있는 것이 아니다. 유클리드의 증명 과정을 보면 □CBFE에서 □LHGE를 제외한 나머지 부분(gnomon, 경절형)이 □ADHK와 같음을 보이고 있는데, 히드(Heath)는 이 명제에 대한 코멘트에

1) If a straight line be cut into equal and unequal segments, the rectangle contained by the unequal segments of the whole together with the square on the straight line between the points of section is equal to the square on the half.

서 AB=a, DB=x라 하면 $(a-x)x$가 그 경절형과 같음을 의미하므로, 경절형의 크기 b^2과 a가 주어질 때 점 D를 찾는 문제2)가 바로 방정식 $(a-x)x=b^2$을 푸는 것이라고 설명하고 있다[1].

또한 AC=a, CD=b라 하면 명제 5의 내용은 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$과 같이 표현될 수 있을 것이며, 이 외에도 이 명제를 대수적으로 해석하는 방식은 다양하게 있을 수 있다. 보이어(Boyer, [2])가 지적하듯이, 이러한 대수적인 도구가 量 사이의 관계를 조작하는데 매우 효율적인 것은 분명하지만 한편으로 이러한 개념이 기하학적으로 숙달될 때 얻을 수 있는 시각적인 효과 등에 대해서는 현대의 우리가 원론으로부터 모종의 시사를 얻을 수 있음에 또한 주목할 필요가 있을 것이다.

명제 5 외에도 원론 제II권의 명제들은 대수적인 방정식이나 이차식의 곱셈 공식으로 이해될 수 있는 것들이다. 예컨대 명제 11은 "주어진 선분을 분할하되, 전체와 한 토막을 가지고 만든 직사각형이 다른 토막을 가지고 만든 정사각형과 넓이가 같도록 하라."는 문제인데, 이는 [그림 2]에서 볼 수 있듯이 방정식 $a(a-x)=x^2$을 만족시키는 x를 구하는 문제로 곧 주어진 선분을 '황금분할'하는 문제인 것이다.



[그림 2]

다음은 원론 제II권에 등장하는 처음 아홉 명제와 그에 대한 현대의 대수적 번역이다.

(1) 두 개의 선분이 주어질 때, 한 선분을 여러 토막으로 나누었다고 하자. 처음 두 선분으로 만든 직사각형의 넓이는 나누지 않은 선분과 나눈 선분의 각 토막으로 만든 직사각형들의 넓이의 합과 같다.

(2) 한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었다고 하자. 원래 선분과 그 토막들로 만든 두 직사각형의 넓이의 합은 원래 선분으로 만든 정사각형의 넓이와 같다.

(3) 한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었다고 하자. 그 중 한 토막과 전체 선분으로 만든 직사각형의 넓이는 그 한 토막으로 만든 정사각형과 두 토막으로 만든 직사각형의 넓이를 더한 것과 같다.

(4) 한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었다고 하자. 전체 선분으로 만든 정사각형의 넓이는 각 토막으로 만든 정사각형들의 넓이와 토막들로 만든 직사각형의 넓이의 두 배를 더한 것과 같다.

(5) 앞에서 설명한 것

(6) 한 선분을 등분할하고 거기에 다른 어떤 선분을 한 줄이 되도록 붙였다고 하자. 선분 전체와 붙인 선분으로 만든 직사각형에다 반토막으로 만든 정사각형을 더하

2) a와 b가 주어질 때 점 D를 작도하는 방법은 [1]에서 찾아볼 수 있다.

면, 그것은 반토막에다 선분을 붙인 것으로 만든 정사각형과 넓이가 같다.

(7) 한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었다고 하자. 선분 전체로 만든 정사각형에 한 토막으로 만든 정사각형을 더하면, 이는 선분 전체와 그 한 토막으로 만든 직사각형의 두 배에 다른 토막으로 만든 정사각형을 더한 것과 넓이가 같다.

(8) 한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었다고 하자. 선분 전체와 한 토막으로 만든 직사각형의 네 배에 다른 토막으로 만든 정사각형을 더하면, 그것은 선분 전체에 그 한 토막을 더한 선분으로 만든 정사각형과 넓이가 같다.

(9) 한 선분을 등분할한 것과 부등분할한 것이 있다고 하자. 부등분할의 두 토막으로 만든 두 정사각형을 더한 것의 넓이는, 전체 선분의 절반으로 만든 정사각형에 분할점 사이의 선분으로 만든 정사각형을 더한 것의 넓이의 두 배와 같다([3] 참고).

(1) $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$

(2) $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$

(3) $(a+b)a=a^2+ab$

(4) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

(6) $(2a+b)b+a^2=2(a+b)a+b^2$ 또는 $(x+y)(y-x)+x^2=y^2$

(7) $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$ 또는 $x^2+y^2=2xy+(x-y)^2$

(8) $4(a+b)a+b^2=\{(a+b)+a\}^2$ 또는 $4xy+(x-y)^2=(x+y)^2$

(9) $a^2+b^2=2\left[\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)-b\right\}^2\right]$ 또는

$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

2. 비례식(원론 제V권)

원론의 제V권에서는 비례식의 개념에 대한 독특한 전개를 살펴볼 수 있다. 우선, 제V권에서 제시되는 정의는 다음과 같다[4].

(1) 작은 양이 큰 양을 잴 때, 작은 양을 큰 양의 약(約)이라고 한다.

(2) 작은 양이 큰 양을 잴 때, 큰 양을 작은 양의 배(倍)라고 한다.

(3) 비란 같은 종류인 두 양 사이의 크기 관계이다.

(4) 두 양이 서로 어떤 비를 가진다는 말은, 하나를 배하여 다른 것보다 커지게 할 수 있다는 뜻이다.

(5) 네 개의 양이 있는데, 첫째와 둘째의 비, 셋째와 넷째의 비가 같다는 말은, 첫째와 셋째에 같은 배하고 둘째와 넷째를 같은 배를 하였을 때, 전자들이 후자들보다 동시에 커지거나, 동시에 같아지거나, 동시에 작아진다는 뜻이다.

(6) 같은 비를 가지는 양들을 비례한다고 한다.

(7) 네 개의 양이 있는데, 첫째와 셋째에 같은 배를 하고, 둘째와 넷째에 같은 배를 하였는데, 첫째의 배가 둘째의 배보다 크고 셋째의 배가 넷째의 배보다 크지 않다고 하자. 그러면 첫째와 둘째의 비가 셋째와 넷째의 비보다 크다고 한다.

이 정의들의 내용을, 소문자 a, b, c, …로 量을 표현하고 대문자 A, B, C, …로 정수를 표현하여 현대적으로 해석해 보면 다음과 같다.

(1) 量 a가 量 b의 約이라는 것은, 적당한 정수 N이 존재하여 $Na=b$인 것이다.

(2) 量 a가 量 b의 倍라는 것은, 적당한 정수 M이 존재하여 $a=Mb$인 것이다.

(4) 두 量 a와 b가 서로에게 比를 갖는다는 것은, $a<b$인 경우 적당한 N이 존재하여 $Na>b$인 것이다.

(5) 量의 比 $a:b$가 $c:d$와 같다는 것은, 임의의 정수 M과 N에 대해서 $Ma>Nb$라면 $Mc>Nd$, $Ma=Nb$라면 $Mc=Nd$, $Ma<Nb$라면 $Mc>Nd$가 성립한다는 것이다.

(7) 量의 比 $a:b$가 $c:d$보다 크다는 것은, 적당한 정수 M과 N에 대해서 $Ma>Nb$이고 $Mc \leq Nd$가 성립한다는 것이다.

원론에 나타난 이러한 비례식 이론에서 주목할 것은, 주어지는 두 量이 통약가능한가 통약불가능한가의 여부에 관계없이 이 개념을 적용할 수 있다는 것이다. 원론이 이와 같이 일반적인 모든 量에 대하여 성립하는 이론을 구축할 수 있었던 것은 부등식을 사용하여 간접적으로 비를 정의하였기 때문이다. 量의 比 $a:b$가 $c:d$와 같다는 것을 정의한 위의 정의 (5)를 다르게 표현해 보면, 결국 그것은 임의의 정수 M과 N에 대해서 다음이 성립함을 의미한다.

$$\frac{a}{b}>\frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d}>\frac{N}{M}, \qquad \frac{a}{b}=\frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{N}{M}, \qquad \frac{a}{b}<\frac{N}{M} \Rightarrow \frac{c}{d}<\frac{N}{M}$$

한편 이는 수 a/b와 c/d가 서로 같다는 개념을 각각의 수보다 '큰 유리수의 집합', '작은 유리수의 집합', '같은 유리수의 집합'이 서로 완전하게 일치한다는 사실을 이용하여 정의한 것으로, 현대적인 관점에서 보자면 '데데킨트의 절단(Dedekind cut)'을 이용한 실수의 정의와 본질적으로 같은 의미라고 할 수도 있다.

원론 제V권의 25개 명제는 모두 이렇게 정의된 비 개념과 관련된 것들인데, 대표적

인 몇 가지와 그것들에 대한 현대적 기호를 사용한 번역은 다음과 같다([4] 참조).

(명제 4) 첫째와 둘째의 비가 셋째와 넷째의 비와 같다고 하자. 어떤 수이든 같은 수를 첫째와 셋째에 곱하고 또 어떤 수이든 같은 수를 둘째와 넷째에 곱하여 배를 만들면, 첫째의 곱과 둘째의 곱의 비는 셋째의 곱과 넷째의 곱의 비와 같다.
($a:b=c:d \Rightarrow Ma:Nb=Mc:Nd$)

(명제 8) 크기가 다른 양들을 어떤 양과 비교하면, 큰 것은 작은 것보다 비가 더 크다.
($a>b \Rightarrow a:c>b:c$)

(명제 16) 네 개의 양이 서로 비례하면, 전자와 후자를 서로 바꾼 비례식이 성립한다.
($a:b=c:d \Rightarrow a:c=b:d$)

(명제 18) 어떤 양들에 대해서 뺀 비례식이 성립하면, 더한 비례식도 성립한다.
($a:b=c:d \Rightarrow (a+b):b=(c+d):d$)

3. 무리수(원론 제X권)

원론의 제X권은 통약불가능한 선분들, 다시 말하면 단위 길이(또는 넓이)에 대하여 무리수인 길이(또는 넓이)를 갖는 선분에 대한 내용을 다루고 있는 것으로, 현대적인 의미에서 보면 무리수에 관한 이론이라고 할 수 있다. 원론의 제X권에서 분류되고 있는 여러 종류의 무리수들은 이차방정식을 풀어서 얻어지는 것들이었으나, 방정식의 풀이 과정이나 그 근의 표현 방식이 모두 기하학적인 작도를 통해 얻어지거나 표현될 수밖에 없었던 것이기에 그 양들을 의미 있게 분류하는 것은 필요한 일이었음에도 매우 어려운 것이었다.

다음은 통약가능성(commensurability)에 대한 원론 제X권의 정의이다[5].

(1) 길이들이 통약가능하다는 것은 같은 단위로 잴 수 있음을 뜻하고, 통약불가능하다는 것은 모두를 잴 수 있는 공통 단위가 없음을 뜻한다.

(2) 선분들이 넓이에 대하여 통약가능하다는 것은 각 선분을 한 변으로 가지는 정사각형들이 같은 단위 넓이로 잴 수 있음을 뜻하고, 통약불가능하다는 것은 각 선분을 한 변으로 가지는 정사각형들의 공통 척도가 없음을 뜻한다.

(3) 이러한 가정 아래, 주어진 선분에 대해 길이에 대해서만 또는 길이와 넓이 모두에 대해 통약가능한 선분, 그리고 통약불가능한 선분이 각각 무수히 많음을 보일 수 있다. 이제 주어진 선분이 유리량(rational)이라고 하자. 그러면 주어진 선분과 길

이와 넓이 모두에 대해 통약가능하거나 또는 넓이에 대해서만 통약가능한 선분은 유리량(rational)이라 하고 통약불가능한 선분은 무리량(irrational)이라 한다.

이와 같이 원론에서 정의되는 무리수 개념은 현대적인 정의와 비교할 때 '상대적인' 것으로, 비교되는 양에 대한 통약가능성의 여부에 의해 정의되는 개념이다. 한편 주목할 것은, 유클리드의 정의에 따르면, α가 유리량이고 m과 n이 정수이며 m/n이 제곱이 아닌 기약분수인 경우에는 $(m/n)\alpha$뿐만 아니라 $\sqrt{(m/n)}\alpha$ 또한 유리량이 된다는 점이다. 즉, 1이 유리량이라면 $\sqrt{2}$도 유리량이라고 설명하는 것인데, 이것이 현대의 무리수 개념과 다른 것은 그 양을 기준이 되는 양으로 '표현할 수 있는가' 하는 것이 핵심적인 문제였기 때문인 것으로 보인다. 이는 유클리드 이전 시대와 비교하더라도 구별되는 점인데, 피타고라스와 플라톤의 경우에도 한 변의 길이가 5인 정사각형의 대각선, 즉 $\sqrt{50}$을 '5의 표현할 수 없는 지름'이라고 부른 반면 이 정사각형의 '표현할 수 있는 지름'으로 그 근사값인 $\sqrt{49}=7$을 사용했다고 한다[5]. 그러나 이를 유클리드의 개념으로 본다면, 길이가 $\sqrt{50}$인 선분으로 만든 정사각형의 넓이는 길이가 5인 선분으로 만든 정사각형의 넓이와 통약가능하다는 점에서 $\sqrt{50}$은 5로 표현할 수 있는 양, 즉 유리량인 것이다.

4. 정수론(원론 제VII~IX권)

원론의 제VII, VIII, IX권은 오늘날의 정수론에 해당하는 내용을 다루고 있으나, 대수적 기호가 전혀 사용되지 않은 채로 내용이 전개되고 있다는 점에서 '무기호적 수론(symbollos arithmetic)'이라 부를 수 있는 부분이다. 이렇듯 대수적인 기호의 사용 없이 정수론의 이론을 전개한다는 것은 여러 면에서 심각한 어려움을 수반할 수밖에 없음을 의미한다.[3] 그럼에도 그리스 수학의 초기에는 매우 발달된 수론이 존재하였고, 원론의 제VII~IX권은 이를 잘 보여주고 있다. 이 절에서는 그 개략적인 모습을 살펴보기로 한다([4] 참조).

제VII권에는 "단위라는 것은 그것에 의해, 존재하는 것의 각각이 1이라고 불리는 것이다(정의 1)," "수라는 것은 단위가 모인 것이다(정의 2)"부터 시작해서, 약수, 배수, 소수, 서로 소, 합성수, 두 수의 곱 등 22개의 정의가 있다. 그 중에서 특히 "첫 번째 수가 두 번째 수의, 세 번째 수가 네 번째 수의 동일한 배수이거나, 동일한 약수이거나, 동일한 약수합일 때, 그 수들은 비례한다(정의 21)"는 정의는 제 V권에 있는 비례의 정의보다도 이전의 형태에 속한다고 할 수 있다. 이를 기호로 표기하면, a, b, c, d

3) 예를 들면, 일반적인 자연수에 대하여 성립하는 명제의 경우에도 2, 3, 4 등의 특수한 경우에 대해 이루어진 증명을 일반화할 수밖에 없었는데, 제VII권의 명제 5, 6, 9, 10이 그런 예이다.

를 네 수라고 할 때, 적당한 정수 m과 n이 존재하고, $ma=b$라면 $mc=d$, $a=nb$라면 $c=nd$, $ma=nb$라면 $mc=nd$가 성립될 때, $a:b=c:d$라는 것이다. 이는 V권의 비에 대한 정의에 비해 단순한 것으로, 유리수 범위에서 비의 상등의 정리이며 통약불가능한 양, 즉 무리수의 비 개념은 포함하지 않는다.

제VII권에는 "두 수가 주어졌을 때 그 최대공약수를 구하기(명제 1, 2, 3)"[4]로부터 시작하는 39개의 정리가 있다. 명제 4~19는 수의 비례이론이며, 명제 20~22는 오늘날의 분수를 기약분수로 귀착시킨 것에 해당하는 정리, 명제 23~28은 서로 소인 두 수 사이의 관계, 명제 29~32는 소수의 성질, 명제 34~35는 최소공배수를 구하는 방법에 대한 서술이다.

제VIII권과 IX권의 전반부는 주로 등비수열과 이에 관련된 사항들이 서술되어 있다. 제VIII권의 중심 문제는 "두 개의 수 a와 b 사이에 하나 또는 여러 수를 넣어, 순차로 비례하게 할 수 있는 조건은 무엇인가"라는 것이고, 이는 명제 9와 10에서 해결되어 있다. 또한 36개의 명제로 이루어져 있는 제IX권의 처음 19개 명제까지는 제VIII권의 연속인, 순차로 비례하는 수열에 관련된 내용이다.

제IX권의 명제 20은 소수가 무한히 많다는 사실에 대한, 잘 알려진 유클리드의 소수 정리이며, 명제 21부터 34까지 14개의 명제는 전후와는 별다른 관계가 없는 짝수와 홀수에 관한 일련의 정리들로 이루어져 있다. 제IX권의 마지막 두 명제는 등비급수의 합에 관한 것으로, 이는 다음과 같다.

(명제 35) 임의 개수의 수가 순차로 비례하고, 두 번째 항과 마지막 항으로부터 각각 첫 번째 항과 같은 수를 뺀다면, 두 번째 항과 첫 번째 항의 차와 첫 번째 항의 비는 마지막 항과 첫 번째 항의 차와 마지막 항 앞의 모든 항의 합의 비와 같다.

이는 주어진 등비수열이 a, ar, ar^2, $\cdots$, ar^n이라 할 때, 가비의 정리로부터 다음이 성립함을 의미한다.

$$(ar-a):a=(ar^n-a):(a+ar+\cdots+ar^{n-1})$$

이는 우리가 상용하는 합의 공식 $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$과 같다.

(명제 36) 단위로부터 시작하여, 두 배씩 만들어 나간 임의의 개수의 수들의 총합이 소수이면, 그 총합에 마지막 수를 곱한 것은 완전수이다.

이는 $1+2+2^2+\cdots+2^n$이 소수라면 $(1+2+2^2+\cdots+2^n)\cdot 2^n$이 완전수라는 것으로, 이를 이용하면 $1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$이므로 $2(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^7(2^8-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$ 등이 완전수라는 사실을 알 수 있게 하

4) 이것은 '유클리드의 호제법'으로 우리에게 알려져 있는 최대공약수의 계산법이다.

는 정리이다.

5. 맺는 글

유클리드의 원론에 나타난 대수적 내용은 비록 현대와 같은 기호적인 대수학의 형태는 아니었지만 당시로서는 충분히 실용적인, 그리고 풍부한 맥락의 것이었음을 발견할 수 있다. 잘 발달된 대수학의 추상적인 기호가 量들 사이의 관계를 조작하는 데 매우 효율적인 도구라는 점은 의심할 수 없으며, 익숙해 있는 우리로서는 그것이 없는 대수적 사고의 전개를 상상하기조차 힘들 정도일 것이다. 그러나 원론에서와 같이 기하학적인 맥락 또는 무기호적인 대수학의 명제에 숙달되어 있는 고대 그리스의 수학자를 상상해 본다면, 그들은 분명히 우리에 비해 대수적인 명제에 대하여 생생한 시각적 이미지를 가지고 있었을 것이며 측량과 같은 실제 생활의 맥락에 그 명제들을 적용하는 것에 훨씬 숙달되어 있었을 것이다.

우리의 대수적 기호를 사용하면 매우 쉽게 계산할 수 있는, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$와 같은 명제도 원론에서는 "한 선분을 임의의 점을 잡아 둘로 나누었을 때 전체 선분으로 만든 정사각형의 넓이는 각 토막으로 만든 정사각형들의 넓이와 토막들로 만든 직사각형의 넓이의 두 배를 더한 것과 같다."는 장황한 표현으로 설명되며 그 증명은 한 페이지 반에 걸쳐서 이루어져야만 했다. 그러나 여기서 우리가 주목해야 할 것은, 현대의 대수적 기호가 갖는 강력한 효율성뿐만은 아니다. 추상적인 기호를 사용하기 이전에, 수학은 실제의 구체적인 맥락에서 이미 '발생'했으며 추상적인 기호 없이도 그 수학적 문제들을 해결할 수 있었다는 점에 주목해 보면, 기호를 사용한 계산의 알고리즘만이 수학적 사고의 본질이라고 생각하기는 어려워질 것이다. 이는 특히 우리 학교 수학의 교육적 상황에서 볼 때, 대수적 계산에는 아주 익숙한 학생들이 오히려 그 기호가 의미하는 현실의 상황적 또는 시각적 맥락을 전혀 파악하지 못하고 있는 많은 사례들을 반성하게 한다. 우리는 수학이 역사적으로 최초에 발생되었던 형태를 탐구하는 것을 통하여, 학생들이 수학을 바로 자신의 삶의 문제로 경험하고 학습하는 수학화를 가능하게 할 교육적 시사를 얻을 수 있을 것이고, 또 그래야 할 것이다. 그것은 바로 우리가 수학사를 연구하는 중요한 이유 중의 하나이다.

참고 문헌

1. Arcavi, A. · Bruckheimer, M., "Equations," *A Source-work Historical Collection for In-service and Pre-service Teacher Course*, The Weizmann Institute of

Science, 1985.

2. Boyer, C.B., *A History of Mathematics*, J. Wiley & Sons, 1968.
3. Heath, T.L., *The Thirteen Books of the Elements* 2nd ed., Vol. 1: Books I & II, New York: Dover, 1956.
4. Heath, T.L., *The Thirteen Books of the Elements* 2nd ed., Vol. 2: Books IIIIX, New York: Dover, 1956.
5. Heath, T.L., *The Thirteen Books of the Elements* 2nd ed., Vol. 3: Books XXIII, New York: Dover, 1956.

On the Algebraic Concepts in Euclid's *Elements*

Dept. of Math. Education, Konkuk University **Jin-Kon Hong**

Graduate School of Seoul National University **Seok-Il Kwon**

In this paper, we investigated algebraic concepts which are contained in Euclid's Elements. In the Books II, V, and VII~X of Elements, there are concepts of quadratic equation, ratio, irrational numbers, and so on. We also analyzed them for mathematical meaning with modern symbols and terms. From this, we can find the essence of the genesis of algebra, and the implications for students' mathematization through the experience of the situation where mathematics was made at first.

Key words: Euclid, *Elements*, algebraic concept, genesis

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03, ZDM Classification: A34