

## 동압 계수의 불연속성을 이용한 내면파의 수치해석

신상묵<sup>†</sup>\*, 김동훈\*

국방과학연구소\*

Internal Wave Computations based on a Discontinuity in Dynamic Pressure

Sangmook Shin<sup>†</sup>\* and Dong Hun Kim\*

Agency for Defense Development\*

### Abstract

Internal waves are computed using a ghost fluid method on an unstructured grid. Discontinuities in density and dynamic pressure are captured in one cell without smearing or oscillations along a multimaterial interface. A time-accurate incompressible Navier-Stokes/Euler solver is developed based on a three-point backward difference formula for the physical time marching. Artificial compressibility is introduced with respect to pseudotime and an implicit method is used for the pseudotime iteration. To track evolution of an interface, a level set function is coupled with the governing equations. Roe's flux difference splitting method is used to calculate numerical fluxes of the coupled equations. To get higher order accuracy, dependent variables are reconstructed based on gradients which are calculated using Gauss theorem. For each edge crossing an interface, dynamic pressure is assigned for a ghost node to enforce the continuity of total pressure along the interface. Solitary internal waves are computed and the results are compared with other computational and experimental results.

※Keywords : Ghost fluid method, Unstructured grids (비정렬 격자), Level set, Incompressible multimaterial flow (비압축성 다상 유동), Solitary internal waves (고립 내면파)

### 1. 서론

밀도 차이가 있는 매질들에 대한 유동 해석은

원유와 해수가 층을 이룬 경우 혹은 지형에 의한 교란을 받는 성층화된 대기의 흐름과 같이 다양한 문제에서 요구된다. 그 중 한가지 예인 해양의 내면파는 밀도가 급변하는 밀도 약층에 의해 발생한다. 이러한 내면파는 매질간의 밀도 차가 작음으로 인해서 파장과 파고가 대단히 큰 특성을 갖는다. 그리고 밀도 약층은 해수면으로부터 깊지 않

접수일: 2004년 3월 3일, 승인일: 2004년 5월 19일

†주저자, E-mail: smshin@add.re.kr

Tel: 055-540-6127

은 곳에 존재한다. 이에 따라 근해에서는 고립 내면파가 자주 관측되게 된다. 이렇게 큰 파고의 내면파는 음파 전달 경로에 영향을 주어 수중 음향 탐지기의 작동에 지장을 초래한다. 또한 큰 파고의 내면파는 해수 표면의 미세파의 분포에 영향을 미침으로써 인공 위성을 통한 내면파의 관측이 가능하다. 이러한 인공 위성을 통한 관측 가능성으로 인해 내면파는 잠수함의 감시라는 측면에서도 활용 될 수 있다. 이에 따라 해양에서의 고립 내면파에 대한 관측과 해석은 계속해서 이루어지고 있다.

두 가지 매질에 대한 Navier-Stokes 해석은 여러 가지 방법을 통해 이루어져왔다. (박일룡 등 2004, 박일룡/전호환 2002, 1999 a, b) 그러나 기존의 이상 유동 연구들은 대부분  $\delta$ -함수법으로 분류될 수 있는 기법을 사용한다. 이러한 방법들에서는 경계 면에서의 밀도 등의 불연속에 기인하는 수치 해석상의 어려움을 피하기 위하여 경계면 주위로 일정한 두께를 가진 영역에서 물성치가 미분 가능하게 변화한다는 가정을 사용한다. 이 경우 물성치 변화는 정해진 격자 수의 영역에 걸쳐 일어난다고 가정된다. 이러한 수치 해석을 위한 물성치의 변화에 대한 가정은 종종 경계 면에서 종속 변수들의 비물리적인 확산을 초래하는 것으로 알려지고 있다. Fedkiw et al.(1999)은 수치적 확산과 불안정 거동이 없이 압축성 유동의 매질 경계 면을 처리할 수 있는 새로운 기법인 ghost fluid method 를 제안하였다. 이 방법에서는 경계면 주위의 절점에서 flux 를 계산하기 위해 요구되는 경계면 반대쪽 절점에서의 종속 변수를 물리적인 보존에 근거하여 재구성한다. Fedkiw et al.(1999)은 압력, 속도가 매질 경계 면에서 연속이고 엔트로피가 불연속인 경우에 대하여 엔트로피를 경계 면에서 재구성하였다. 이러한 ghost fluid method 는 이후 여러 연구자들에 의해 압축성 이상 유동 해석에 적용되었다.

비정렬 격자는 복잡한 형상에 적용이 용이하며, 유동 영역 내의 임의의 위치에서의 격자의 조밀도 조절이 용이하다. (강효길 등 2004, 김문찬/하동대 2002). 본 논문에서는 비정렬 격자계에서 밀도 차이가 있는 두 가지의 비압축성 매질의 유동에 대

하여 ghost fluid method 와 Euler 방정식을 사용하여 해석하였다. 비압축성 유동의 비정상 해석을 위하여 물리적 시간 전진에는 3 점의 후방 차분법을 이용하고 비압축성 조건을 만족시키기 위해서는 pseudotime 에 대한 의사 압축성 (artificial compressibility) 및 implicit 방법을 사용하였다. (Shin et al. 2004) 매질 경계면 추적을 위해서는 level set 방법을 사용하였다. (Shin/Kim 2004) 개발된 code 의 검증을 위하여 실험 결과 및 KdV 방정식 해석 결과와 비선형성이 완전히 고려된 두 가지 밀도의 포텐셜 유동 해석 결과가 있는 고립 내면파에 대한 해석이 수행되었다. 개발된 code 는 매질 경계 면의 위와 아래에서 움직이는 날개 단면 주위의 유동 해석에 적용되었다.

## 2. 수치 해석

### 2.1 의사 압축성 및 implicit 방법에 의한 비정상 비압축성 유동 해석

두 가지 매질 모두 지배 방정식은 비압축성 Navier-Stokes/Euler 방정식이다. 경계면 추적을 위해 지배 방정식에 level set 함수  $\phi$  가 연성되었다. Level set 함수에 대한 지배 방정식은 유체 입자를 따라  $\phi$  의 변화가 없어야 한다는 조건으로부터,  $\phi$  의 전 미분이 영이라는 방정식이 된다. 이와 같은 지배 방정식은 임의의 검사 체적에 대해 다음과 같은 적분 형태로 표현된다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega} F_{inv} dS - \oint_{\partial\Omega} F_{vis} dS = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix} \quad F_{inv} = \begin{bmatrix} \Theta \\ u\Theta + pn_x \\ v\Theta + pn_y \\ \phi\Theta \end{bmatrix} \quad F_{vis} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y \\ \tau_{yx}n_x + \tau_{yy}n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = un_x + vn_y, \quad (2)$$

여기서 압력  $p$  는 중력의 효과가 포함되지 않은 동압으로서, 두 매질 각각의 밀도들과 동일한 속력으로 무차원화 되었다.

지배 방정식을 이산화하기 위하여 유한 체적법

이 사용되었다. 모든 종속 변수들이 격자의 절점에 정의된 node-based method 가 사용되었으며, 각 절점에 중첩이 없는 검사 체적을 정의하기 위하여 dual mesh 가 사용되었다. 각 절점에 대한 검사 체적은 요소의 중점과 요소 경계의 중심을 연결하는 검사 표면의 조합으로 정의되었다. Fig. 1 은 유동 영역 내부 및 경계 면에 위치한 절점들에 대해 정의된 검사 체적을 보여준다.

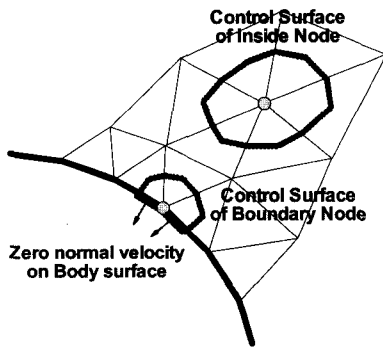


Fig. 1 Control volumes for inside and boundary nodes

시간에 대한 미분은 2 차의 후방 차분법을 이용하여 다음과 같이 이산화되었다.

$$\frac{\partial u^n}{\partial t} \approx \frac{3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}}{2\Delta t} \quad (3)$$

비압축성 조건을 만족하는 속도장을 구하기 위해 각각의 time step 에서 의사 압축성 (artificial compressibility) 방법이 사용되었다.

$$V_i \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \tilde{p}_i \\ \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ \tilde{\phi}_i \end{bmatrix} + \frac{1.5V_i}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ \tilde{\phi}_i \end{bmatrix} + \tilde{R}_i(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi}) \quad (4)$$

$$= \frac{V_i}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2u^{n-1} - 0.5u^{n-2} \\ 2v^{n-1} - 0.5v^{n-2} \\ 2\phi^{n-1} - 0.5\phi^{n-2} \end{bmatrix}$$

여기서  $V_i$  는  $i^{\text{th}}$  절점의 검사 체적 크기이며,  $\tilde{R}_i(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})$  는  $i^{\text{th}}$  절점에서의 잉여 항으로서, 비점성 flux 는 다음과 같이 의사 압축성 영향이 포함되었다.

$$\tilde{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \beta \tilde{\Theta} \\ \tilde{u} \tilde{\Theta} + \tilde{p} n_x \\ \tilde{v} \tilde{\Theta} + \tilde{p} n_y \\ \tilde{\phi} \tilde{\Theta} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Theta} = \tilde{u} n_x + \tilde{v} n_y \quad (5)$$

여기서  $\beta$  는 의사 압축성 계수이다. Pseudotime 에 대한 정상 상태의 해가 구해지면  $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})$  를  $(p^n, u^n, v^n, \phi^n)$  에 대입하여 비압축성 및 시간 미분 항이 고려된 운동량 보존을 만족시킨다. 식 (4) 에서 pseudotime 에 대한 정상 상태의 해를 구하기 위해서는 local time stepping 과 선형화된 Euler 후방 차분법에 의한 implicit method 가 사용되었다. 이 방법은 pseudotime 의 시간 간격에 무관하게 안정하다. 그러나 큰 pseudotime 간격은 Jacobian 행렬의 diagonal dominance 를 감소시켜 행렬 계산에 소요되는 시간을 증가시킬 수 있다. 따라서 전체 계산 시간은 특정한 pseudotime 간격에서 최소화 된다. 본 계산에서는 각 절점에서의 Courant 수가 200. 이 되도록 pseudotime 간격이 설정되었다. Jacobian 행렬을 저장하기 위한 memory 요구를 줄이기 위하여 compressed row storage 방법을 사용하여 영이 아닌 계수만 저장되었다.

2.2 Level set 이 연성된 지배 방정식의 flux 계산

Level set 함수가 연성된 Euler 방정식의 잉여 항을 계산하기 위하여, 각각의 edge 에 지정된 검사 표면의 요소를 통과하는 flux 는 Roe 의 flux difference splitting 방법에 의하여 계산되었다.

$$F_{inv} = \frac{1}{2} [F(Q_L) + F(Q_R)] - \frac{1}{2} |\hat{A}| (Q_R - Q_L) \quad (6)$$

$$|\hat{A}| = R|\Lambda|R^{-1}$$

$$|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|)$$

$$\lambda_1 = \Theta - c, \quad \lambda_2 = \Theta, \quad \lambda_3 = \Theta, \quad \lambda_4 = \Theta + c$$

$$c = \sqrt{\Theta^2 + \beta}$$

여기서  $R$  은 고유 벡터 행렬이며  $\lambda_i$  는 고유치 들이다. Flux Jacobian 행렬에는 중복되는 고유치가 존재하지만 그에 해당하는 선형 독립인 고유벡터들이 존재하므로 실수의 고유치 들로 대각화가 가능하다. 따라서 flux Jacobian 이 Roe 의 선형화된 Jacobian 이 되기 위해서는 아래의 jump 조건만 만족시키면 된다.

$$\hat{A}(Q_R - Q_L) = F(Q_R) - F(Q_L) \quad (7)$$

Level set 이 포함되지 않은 비압축성 Euler 방정식의 경우처럼, 위의 (7) 식은  $Q_R$  과  $Q_L$  의 산술평균으로 계산된 flux Jacobian 으로 만족됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$\hat{A}(Q_L, Q_R) = \frac{\partial F}{\partial Q} \Big|_{Q=\bar{Q}}, \quad \bar{Q} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) \quad (8)$$

고차의 정도를 얻기 위하여, 검사표면에서의 종속 변수  $Q_R$  과  $Q_L$  는 종속 변수의 gradient 를 이용하여 재구성되었다. Gradient 계산을 위해서는 Gauss 정리가 사용되었다.

$$\nabla Q \approx \frac{1}{Volume} \oint_{\Omega} Q \bar{n} dS \quad (9)$$

Implicit method 의 Jacobian 계산을 위한 선형화 과정에서는 Roe 의 행렬  $\hat{A}$  을 고정된 행렬로 가정하여 계산의 안정성을 향상 시켰으며, 종속변수의 재구성 효과를 무시함으로써 implicit 행렬의 영이 아닌 계수의 수를 크게 줄였다.

점성항 계산에 필요한 속도의 미분치 들도 식 (9)를 이용하여 계산되었다. 그러나 이 경우에는 요소에서의 gradient 가 아닌 검사 표면에서의 미분치 들이 필요하다. 따라서 위의 적분이 검사 표면이 아닌 요소의 경계를 따라 수행된다.

### 2.3 물체 표면에서의 경계 조건

물체 표면에서의 압력과 level set 함수 그리고 비점성 계산 경우의 속도는 물체 경계면 위에 위치한 절점에 정의된 검사 체적에서의 잉여 항을 이용하여 계산되었다. 점성 계산의 경우, 물체 표

면에서의 속도는 영이고 level set 함수의 전 미분이 영이므로 물체 표면에서의 level set 값은 고정되어 있다. 그러나 물체 경계 면에서 level set 함수 값이 고정된다는 조건은 수치 해석을 위한 경계 조건으로는 적절하지 않다. 이러한 사실은 다음과 같이 설명될 수 있다. 물체 표면에서의 level set 함수가 초기에 상수로 주어지지 않은 경우 위의 경계 조건은 물체 표면을 따른 level set 함수의 변화가 시간이 지나도 계속 그대로 유지될 것을 요구한다. 그러나 물체 경계로부터 아무리 가까운 유동 영역이라 할 지라도 유동이 지나감에 따라 level set 함수는 상류에서의 조건에 따라 결정된다. 이에 따라 유동이 진행되면 물체 표면 근처에서의 level set 함수의 변화는 계속 물체 표면 쪽으로 집중된다. 따라서 아무리 조밀한 격자를 사용한다고 해도 시간이 지나면 물체 경계면 근처에서의 level set 함수의 변화를 계산하기에 부족한 격자계가 될 것이다. 또한 물체 경계 면에서의 level set 함수의 분포에 대한 가정, 예를 들어 고차 미분치가 영이라는 조건 등도 부적절함을 알 수 있다. 본 방법에서처럼 경계면 위의 절점에 정의된 검사 체적에서의 잉여 항을 사용하는 경우, 부수적으로 초래되는 오차는 경계 절점이 검사체적의 중심이 아니라는 사실에만 기인한다. 검사 표면에서 종속 변수를 재구성한 후 flux 를 계산하는 MUSCL 방법의 특성으로 인하여, 그러한 절점과 요소 중심의 불일치의 효과는 고차의 정도를 위한 종속 변수 재구성 과정에만 국한된다.

### 2.4 Ghost fluid method 에 의한 매질 경계면 처리

Level set 함수의 시간에 따른 변화로부터, 각 순간 두 가지 매질의 경계 면을 추적할 수 있다. 각각의 edge 에 대하여 양단의 절점에서의 level set 함수 값으로부터, 그 edge 가 경계 면을 가로지르는지의 여부를 결정할 수 있다. Fig. 2 는 경계 면을 가로지르는 edge 들의 예를 보여준다. Edge 가 두 매질의 경계 면을 가로지르는 경우에는 그 edge 에 지정된 검사표면을 통과하는 flux 는 양단의 절점에 대해 따로 계산되었다. 즉 검사표면 요소의 양쪽에서 지정되는 종속변수  $Q_R$  과  $Q_L$  를 두

가지 매질의 경우 모두에 대해서 재구성 한 후 두 가지 매질에서의 flux 들을 계산한다. 그리고 두 절점의 매질에 따라 계산된 두 가지 flux 중 적합한 flux 를 사용한다. 이러한 ghost fluid method 에서 중요한 요소는 두 매질에 대해 종속변수  $Q_R$  과  $Q_L$  를 재구성하는 방법이다. 이를 위해서는 두 가지 매질의 경계 면에서 물리적으로 요구되는 조건 을 사용한다.

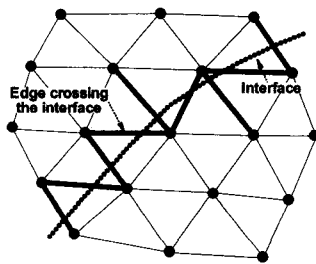


Fig. 2 An interface of two materials and edges crossing the interface

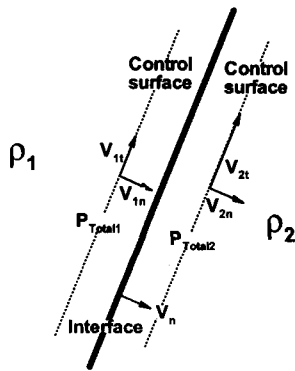


Fig. 3 A control surface along the interface

Fig. 3 과 같이 경계면 주위에서 경계 면과 같이 움직이는 검사 체적에 대하여 질량과 법선 방향 운동량의 보존을 고려하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$\rho_1(V_n - V_{1n}) = 0, \quad \rho_2(V_{2n} - V_n) = 0 \quad (10)$$

$$P_{T1} - P_{T2} = \rho_2 V_{2n}(V_{2n} - V_n) - \rho_1 V_{1n}(V_{1n} - V_n) \quad (11)$$

식 (10)과 (11)은 매질의 경계 면에서 법선 방향 속도 성분과 전체 압력의 연속을 의미한다. 기준 경계 면으로부터 중력 가속도의 반대 방향으로  $\eta$  올라간 지점에서 매질 1 과 매질 2 의 동압 계수가 각각  $C_{p1}$  과  $C_{p2}$  라면, 경계 면에서 전체 압력이 연속하기 위해서는 두 동압 계수 사이에 다음의 관계가 만족되어야 한다.

$$C_{p1} \frac{1}{2} \rho_1 V_\infty^2 - \rho_1 g \eta = C_{p2} \frac{1}{2} \rho_2 V_\infty^2 - \rho_2 g \eta \quad (12)$$

$$C_{p1} = C_{p2} \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}) \frac{g \eta}{V_\infty^2} \quad (13)$$

$$C_{p2} = C_{p1} \frac{\rho_1}{\rho_2} + 2(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}) \frac{g \eta}{V_\infty^2} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)는 한 매질에서의 무차원화 된 동압으로부터 그 위치에서의 다른 매질의 동압 (ghost fluid 의 동압)을 계산하기 위해 사용된다. 경계 면을 가로지르는 edge 에 지정된 검사표면을 통과하는 flux 를 계산하는 경우, 양쪽의 ghost node 에서의 무차원화 된 동압을 식 (13)과 (14) 에 의해 지정함으로써 경계 면에서의 전체압의 연속 조건을 만족시킬 수 있다. 또한 법선 방향의 연속 조건을 만족 시키기 위하여, ghost node 의 법선 방향 속도 성분은 다른 매질의 속도를 그대로 사용한다. 접선 방향 속도는 몇 가지 경우가 있을 수 있다. 만약 점성이 고려되는 계산이고 경계 면에서의 접선 속도차이에 의한 경계층이 제대로 해석 되는 경우 ghost node 에서의 접선 속도 도 다른 매질에서의 접선 속도를 그대로 사용해서 flux 를 계산해야 한다. 그러나 격자가 조밀하지 못 하거나 비점성 계산의 경우에는 ghost node 에서의 접선속도는 동일 매질의 인접한 절점에서의 값 으로 대체될 수 있다.

앞에서 설명된 비점성 flux 계산을 위한 종속 변수 재구성 외에도 종속 변수의 미분치 계산이나 local time step 계산 등에 있어서도 경계 면을 가로지르는 edge 의 영향이 고려되어야 한다. 그러한 계산들은 모두 edge 를 기저로 하기 때문에 앞서 설명된 방법을 그대로 사용할 수 있다. 그리고 ghost node 의 사용은 implicit 행렬에도 영향을

주게 된다. 비정상 flux 계산에서 ghost node 의 영향으로 수정이 있게 되면 Jacobian 도 같이 수정되도록 함으로써 이러한 영향을 고려할 수 있다.

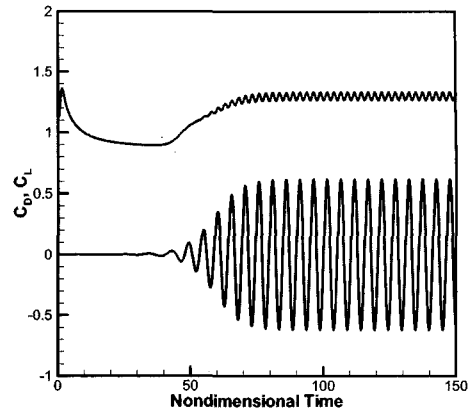
### 3. 계산 결과

3.1 비정상 해석 및 입자 추적에 대한 code 검증  
 개발된 code 에 대하여 비정상 상태의 입자 추적에 대한 검증을 위해, 원형 cylinder 뒤의 와류 박리가 계산되었다. 유동은 정지 상태에서부터 갑자기 가속되었다.  $Re=200$  에 대해서 계산된 저항 및 양력 계수 그리고 Strouhal 수가 다른 계산 (Kris/Kwak 2001, Farrant et al. 2000, Slaouti/Stansby 1992) 및 실험 결과 (Wille 1960, Kovaszny 1949) 들과 Table 1 에 비교되었다.

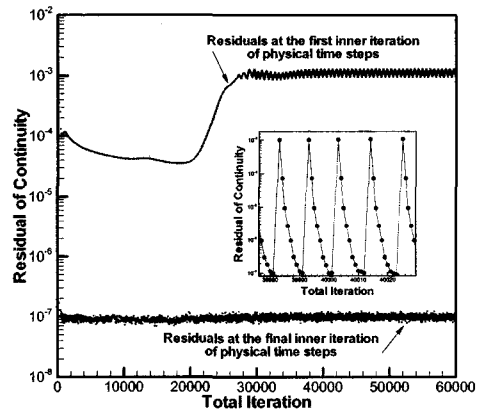
Table 1 Comparisons of drag and lift coefficients and Strouhal number for vortex shedding behind a circular cylinder at  $Re=200$

	$C_D$	$C_L$	$S_t$
Present	1.303 ( $\pm 0.0357$ )	$\pm 0.621$	0.194
Experiments			
Wille(1960)	1.30	-	-
Kovaszny(1949)	-	-	0.19
Numeric			
Kris(2001)	1.27 ( $\pm 0.04$ )	$\pm 0.67$	0.184
Farrant(2000)	1.36	$\pm 0.71$	0.196
Slaouti(1992)	-	$\pm 0.62$	0.196

Fig. 4(a) 는 계산된 저항과 양력의 시간에 따른 변화를 보여준다. 의사 압축성이 도입된 pseudotime 에 대한 iteration 을 포함한 전체 iteration 과정에서의 residual 의 변화를 Fig. 4(b) 에 나타내었다. Pseudotime 의 첫 번째 단계에서의 residual 은 저항의 시간 변화와 비슷한 양상을 보인다. 즉 두 개의 대칭적인 와류가 정진적으로 후류로 밀려나는 동안은 저항의 시간 변화도 작으며 첫 번째 단계에서의 residual 도 역시 작다. 이후 와류가 주기적으로 박리되면서 첫 번째



(a) Time history of drag and lift



(b) Behavior of residual

Fig. 4 Time history of drag and lift coefficients and behavior of residual with respect to iterations

단계에서의 residual 은 다소 증가한다. 그러나 pseudotime 에 대한 마지막 iteration 에서의 residual 은 거의 일정한 값으로 떨어지며 pseudotime 에 대한 iteration 단계 수의 증가도 거의 없다.

물리적인 시간 간격  $\Delta t$  에 따른 결과의 의존도를 확인하기 위하여 0.025~0.4 의 다양한 시간간격을 사용하였다.

$\Delta t = 0.025$  와  $\Delta t = 0.4$  의 경우는 계산된 주기

에 약 205 및 14 시간 간격이 포함된다. 두 경우 저항, 양력 및 Strouhal 수에 발생하는 최대 차이는 약 10.8% 정도이며,  $\Delta t = 0.025$  와  $\Delta t = 0.2$  에서는 최대 차이가 2.4% 정도로 감소하였다. Fig. 5 는 시간 간격의 변화에 따른 오차의 변화를 보여준다. 여기서 오차는 가장 작은 시간 간격인  $\Delta t = 0.025$  에서의 결과와의 차이로 간주되었다. Fig. 5 에는 1 차와 2 차의 정도를 가지는 기법들의 경우 예상되는 오차 변화의 기울기도 함께 보여준다. 오차 변화의 기울기로부터 물리적인 시간 간

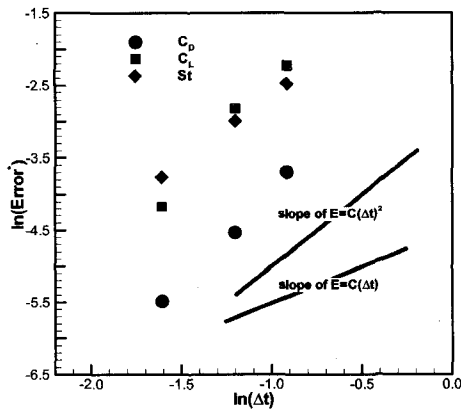


Fig. 5 Behavior of estimated errors with respect to physical time step size  $\Delta t$

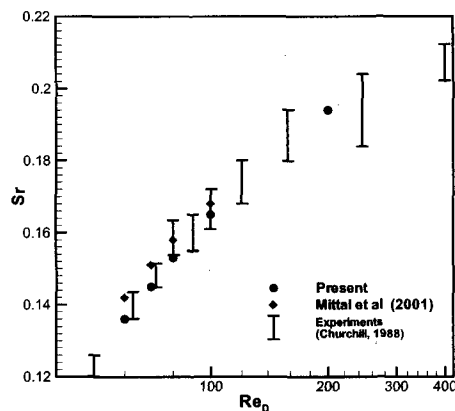


Fig. 6 Variations of Strouhal number with respect to Reynolds number

격에 대해 본 기법은 2 차의 정도를 가짐을 확인할 수 있다. Fig. 6 에서는  $R_e$  수에 따른 Strouhal 수의 변화가 계산되었고 그 결과는 다른 실험 (Churchill 1988) 및 수치 해석 결과 (Mittal/Raghuvanshi 2001) 와 비교되었다.

Level set 함수에 의한 입자 추적에 대한 검증을 위하여 와류 박리 유동에 대한 streakline 이 계산되었다. Fig. 7 은  $R_e=100$  의 경우에 대한 streakline 과 그 순간의 와류도 및 압력장을 보여준다. Streakline 은 level set 함수를 재초기화 (reinitialize) 과정 없이 지배 방정식에 근거하여 계속 계산 함으로서 구해졌다. 순간 와류 분포 및 압력장에서 보듯이 와류는 후류로 흘러감에 따라 강한 점성의 영향으로 그 세기가 점차 약해진다. 그러나 streakline 은 속도장의 비정상성이 입자의 경로를 따라 적분되어 나타남에 따라 후류로 감에 따라 진폭이 오히려 증가하게 된다. 그러나 streakline 의 이러한 경향은 와류의 실제 이동을 의미하지 않는다. 와류도와 압력장에서 보듯이 cylinder 의 주변을 제외하면 중심선으로부터 와류의 중심까지의 거리는 거의 변화가 없다. Streakline 의 변곡점을 또한 이러한 경향을 나타내며, 순간 와류도 및 압력장에서 추정한 와류의 중심이 streakline 의 변곡점과 일치함을 볼 수 있다.

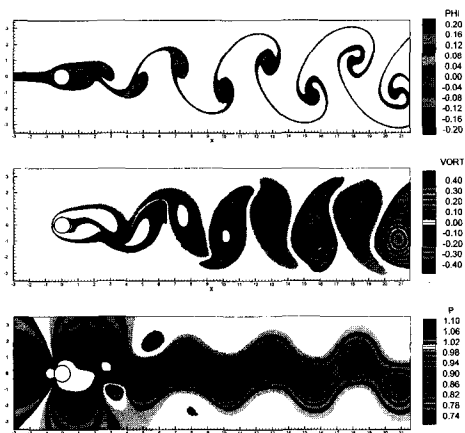


Fig. 7 Streaklines and instantaneous vorticity and pressure contours for vortex shedding at  $R_e=100$

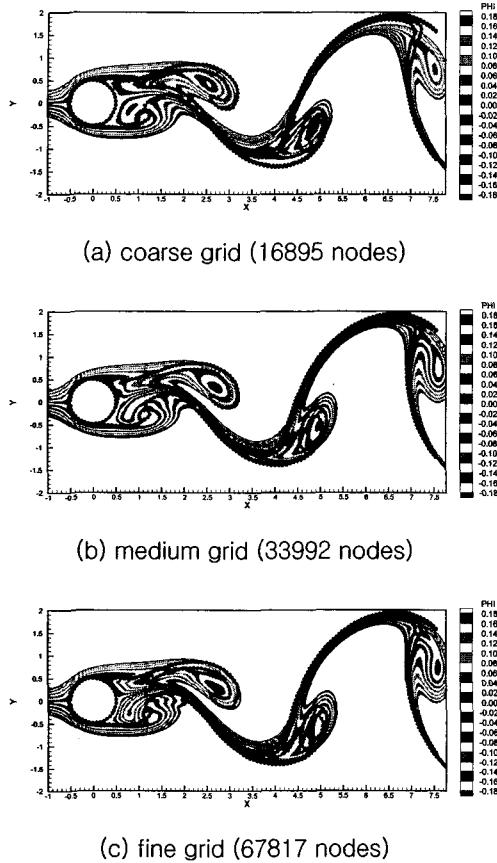


Fig. 8 Comparisons of calculated streaklines with flow visualization results (dotted lines)

Fig. 8에서는 계산된 level set 함수의 contour (streakline에 해당)와 유동 가시화 실험 결과 (Dalton et al. 2001)가 비교되었다. 유동 가시화 실험에서는 초기에 cylinder 앞에 놓여 있었던 형광 물질이 cylinder가 지나감에 따라 보이는 분포가 포착되었다. 계산된 streakline은 이러한 형광 물질이 연속적으로 사용된 경우에 해당한다. 이러한 차이가 streakline의 끝 부분에서의 차이를 유발한다. Fig. 8은 계산된 level set 함수의 격자의 준도를 검토하기 위하여 세 가지의 다른 격자계를 사용한 결과를 함께 보여준다. 각각의 격자는 16895, 33992 및 67817개의 절점이 포함된 격자계이다. Fig. 8에서 보듯이 가장 섬긴 격자계에서

는 streakline의 상하 방향의 진폭이 유동 가시화 결과와 비교하여 다소 작게 추정되었다. 그러나 중간 크기 및 조밀한 격자에서의 결과들은 거의 유사한 결과를 보인다. 조밀한 격자의 경우에는 중간 격자 경우에 비해 cylinder 위에서 좀 더 복잡한 형태의 streakline이 계산되었다.

### 3.2 고립 내면파의 계산 결과 비교를 통한 code 검증

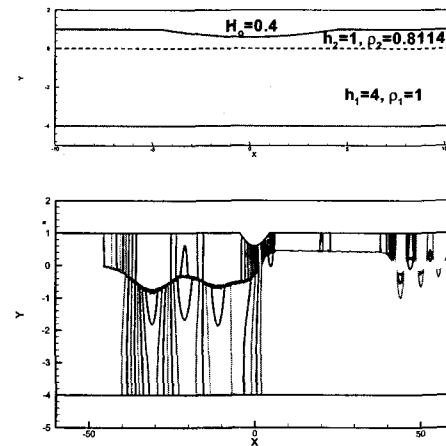


Fig. 9 A schematic drawing of the experiments and calculated pressure contours

내면파 계산에 대한 검증을 위하여 Melville/Helfrich (1987) 과 Grue et al. (1997) 에 의해 실험 및 계산이 수행된 경우에 대한 계산이 이루어졌다. Melville/Helfrich (1987)은 길이 15m, 폭 0.45m, 깊이 0.15m의 수조에 아래층에는 담수 ( $\rho_1 = 0.986g/cm^3$ )를 일부 채우고 그 위에 kerosene ( $\rho_2 = 0.8g/cm^3$ )를 채웠다. 실험에서는 두 매질의 높이는 여러 가지로 변화 되었으며, 본 계산에서는 그 중에서 kerosene 과 담수의 높이 비  $h_2:h_1$ 가 1:4인 경우에 대해 계산하였다. 내면파는 kerosene에 부분적으로 잠긴 물체를 예인함으로써 발생하였다. 예인에 사용된 물체는  $sech^2$ 의 형태로서 다음과 같다.

$$H = \tilde{H}_0 \operatorname{sech}^2 Kx \quad (15)$$

여기서  $\tilde{H}_0$ 는 5.1cm이며  $K$ 는  $0.039cm^{-1}$ 이다.



수조에 고정된 사진기를 이용하여 시간에 따른 경계 면의 높이 변화가 계측되었다. 계측 지점은 수조의 길이 방향으로 5m 추방에 위치한다. 또한 불균일 KdV (inhomogeneous Korteweg-de Vries) 방정식을 사용한 수치 해석도 이루어졌다. Grue et al.(1997) 은 위의 실험에 대하여 비선형성이 완전히 고려된 두 가지 매질의 포텐셜 유동을 해석하였다. 계산된 경우는 물체의 잠긴 부분의 깊이 ( $H_o$ )가 kerosene 두께  $h_2$ 의 40%인 경우이다. Grue 는  $K\tilde{H}_o = 0.1989$  이 되는  $\tilde{H}_o$ 의 물체가 완전히 잠긴 것으로 간주하였다. ( $H_o = \tilde{H}_o$ ) Grue 등에서는 kerosene 층의 두께가 3cm로 생각되었으므로  $\tilde{H}_o$ 는 1.2cm가 되며  $K$ 도 달라진다. 그러나 본 계산에서는 Melville/ Helfrich가 명시한 대로  $\tilde{H}_o = 5.1\text{cm}$ ,  $K = 0.039\text{cm}^{-1}$ 의 물체가  $H_o/h_o = 0.4$  ( $H_o = 1.2\text{cm}$ ) 잠겨있을 때의 물체 형상이 적용되었다. 이에 따라 물체의 출수는 같으나 수면하의 모양에는 작은 차이가 있다. 다른 계산들과 마찬가지로 kerosene 과 공기의 경계에서 발생하는 파의 효과는 무시되었으며, 본 계산에서는 물체 표면과 계산 영역의 아래 및 윗면은 비점성의 벽으로 처리되었다. 실험에서는 여러 가지 속도로 물체를 예인하여 특정한 속도 근처에서는 고립 내면파가 물체 전방으로 진행함을 관측하였다. 여기서  $v_{\infty}/\sqrt{gh_2} = 0.3962$ 의 경우에 대한 계산을 수행하였다. 이 속도는 Melville/ Helfrich의  $U/\tilde{c}_o$ 가 1.02와 Grue 등의  $U/c_o$ 가 0.94인 경우에 해당한다. Fig. 9의 윗 그림에서는 두 층의 높이 및 밀도 그리고 물체의 형상이 나타내어졌다. 그 아래에 어떤 순간의 무차원화 된 동압 분포가 보여진다. 압력 분포 그림에서는 전체적인 양상을 보여주기 위해 X 축은 압축되었다. 무차원화 된 동압의 불연속이 나타나는 매질의 경계면 형상으로부터 물체 전방에 있는 depression 형태의 고립 내면파와 물체 추방에 나타나는 변화된 수심이 일정하게 유지되는 부분 그리고 그 뒤에 원래의 기준면을 중심으로 위아래로 진동하며 진행되는 파형을 볼 수 있다.

물체 주위의 내면파의 시간에 따른 발달 과정이 Fig. 10에 보여진다. 시간이 지남에 따라 고립 내면파가 주기적으로 발생하여 물체의 전방으로 진

행함을 볼 수 있다. 물체 뒤의 경계 면이 상승한 부분은 시간이 지남에 따라 점차 길어지며 후류로 진행되는 파들도 계속 성장한다.

Fig. 11에서는 매질 경계면 근처에서의 동압 분포가 확대되어서 보여진다. 매질 경계 면을 따른 압력의 불연속이 한 개의 삼각형 요소에서 포착됨을 볼 수 있다. 이러한 특성은 ghost fluid method가 경계 면에서의 불연속성을 수치적인 확산이나 비물리적 진동 없이 계산할 수 있음을 보여준다.

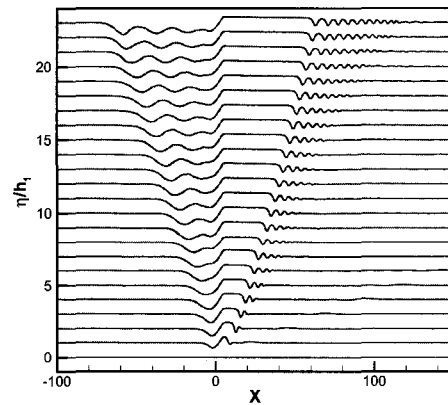


Fig. 10 Time evolution of the interfaces

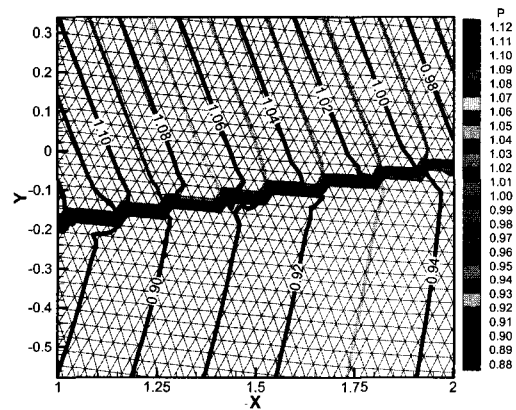
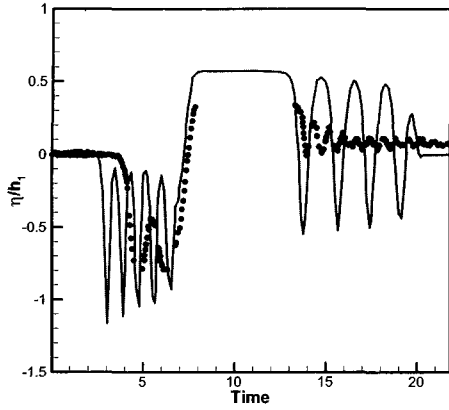
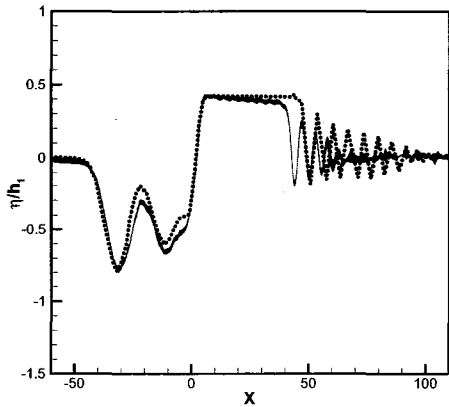


Fig. 11 A discontinuity in dynamic pressure along the interface and grid near the interface



(a) experiments (symbol) and results of KdV equation



(b) present results (solid line) and results of fully nonlinear potential calculations

Fig. 12 Comparisons between the calculated wave profiles and experimental results

Fig. 12 에서는  $V_{\infty} / \sqrt{gh_2} = 0.3962$  경우에 대한 실험 결과 ((a) 기호) 와 KdV 방정식을 이용한 해석 결과 ((a) 실선), 그리고 비선형성이 완전히 고려된 포텐셜 유동 해석 결과 ((b) 점선) 와 본 계산 결과가 ((b) 실선) 비교되었다. 이 경우에는 KdV 방정식을 이용한 해석은 고립 내면파나 물체 뒤의 수심 변화 그리고 후류로 진행되는 파 모두

에서 실험 결과와 많은 차이를 보이고 있다. 앞서 설명한 대로 실험에서는 한 순간의 경계면 형상이 계측된 것이 아니고 한 지정에서 시간에 따른 경계 면의 높이 변화가 계측되었다. 시간이 지남에 따라 파형이 변화하므로 실험 결과와 한 순간의 경계면 형상의 정확한 비교는 어려우나 Grue 등은  $t(g/h_2)^{1/2} = 450$  에서의 경계 면의 파형과 실험 결과를 비교하여 좋은 일치를 보인다고 보고하였다. 이 시간은  $V_{\infty}t/h_2 = 178.3$  에 해당한다.  $h_2$  가 3cm 이므로, 이 시간 동안 물체는 5.34m 이동한다. 계측 위치가 5m 라는 점으로부터 본 계산에서는  $V_{\infty}t/h_2 = 170$  에서 계산된 파형으로 비교하였다. 본 계산 결과와 비선형성이 완전히 고려된 포텐셜 유동 해석 결과는 KdV 방정식을 이용한 결과에 비해 실험 결과와 상당히 유사 함을 볼 수 있다.

KdV 방정식에 의한 결과에서 보듯이 후류로 전파되는 파는 파저가 뾰족하고 파고가 편평한 특성을 보인다. 본 계산 결과를 확대해서 나타낸 Fig. 13 에서도 같은 성향을 확인 할 수 있다. 이러한 특성은 kerosene 층의 두께가 얇기 때문에 발생하는 것으로 생각된다. 이러한 추정을 뒷받침하기 위하여 우선 일반적인 비선형 표면파가 보이는 특성에 대해 다음과 같이 검토되었다. 표면파의 경우 파의 표면에서의 압력이 일정하다. 따라서 파의 높이에 기인하는 정압과 동압이 항상 반대 부호의 같은 크기를 가져야 한다. 정현파 형태의 경계 면을 가진 정상 유동의 압력 분포를 생각하면, 정현파는 동압과 정압의 정확한 상쇄라는 요구조건을 엄밀하게 만족시킬 수 없음을 알 수 있다. 즉 정현파의 경우 곡률 반경의 분포는 기준면에 대해서 대칭이나 유속은 파저에서 빠르다. 따라서 파저 쪽에서 큰 가속이 필요하고 이는 압력의 기울기가 파저에서 커야 함을 의미한다. 실제로 정현파 형태의 경계면 아래의 유동에 대한 압력 분포가 Fig. 14 에 보여지고 있으며, 파저 쪽에서의 압력 변화가 더 큼을 알 수 있다. 따라서 정압과 동압의 정확한 상쇄를 위해서는 파저 쪽에서는 동압의 감소가 작아지는 쪽으로 (더욱 편평한 형태) 변화해야 하고 파고 쪽에서는 동압의 증가가 더욱 커지는 쪽으로 (더욱 뾰족한 형태) 변화해야 함을 알 수 있다.

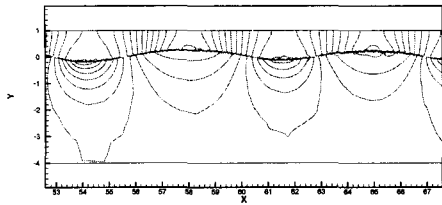


Fig. 13 Calculated downstream wave profile and dynamic pressure contours

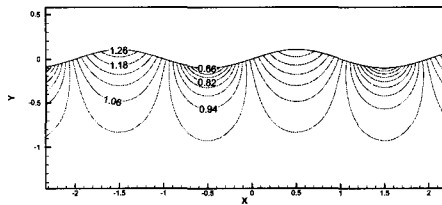


Fig. 14 Dynamic pressure contours near a sinusoidal boundary

내면파의 경우에는 주어진 경계 면의 변위에 대하여 밀도 차이에 의해 발생하는 정압의 차이가 동압의 차이로 상쇄되어야 한다. 내면파의 경우에도 아래 매질의 경우는 앞서 설명한 바와 같이 파저에서의 동압 변화가 더 커질 것이나 위의 매질에서는 그 반대가 된다. 따라서 무한 수심의 내면파의 경우 표면파의 비선형 특성인 편평한 파저와 뾰족한 파고라는 특성은 줄어들 것으로 예상할 수 있다. 그리고 본 계산처럼 천수파의 경우에는 벽면 효과에 의한 추가적인 효과가 발생한다. 이 경우에는 위층 (kerosene)의 두께가 작으므로 윗 쪽 벽면의 효과가 더욱 커진다. 벽면 효과는 경계면이 벽면 쪽으로 가까워짐에 따라 평균 유속의 증가를 초래한다. 이러한 유속의 증가는 같은 곡률 반경에 대해 더 큰 동압의 변화를 초래한다. 따라서 윗 쪽의 벽면이 가까운 경우에는 벽면 쪽으로 가까워지는 파고 쪽에서 동압의 변화가 심해지게 된다. 따라서 높이에 따라 균일하게 증가하는 정압 차를 상쇄하기 위해서는 파고 쪽에서의 동압 변화가 줄어들 수 있도록 더욱 편평해져야 할 것이다. Fig. 13 에서도 파고 쪽에서 곡률 반경이 큰데도 불구하고 벽면 효과로 인해 동압 변화

가 커짐을 알 수 있다.

### 3.3 매질 경계면 근처에서 움직이는 NACA 단면에 의한 내면파

경계면 근처에서 움직이는 NACA0012 단면에 의한 내면파가 계산되었다. 영각은  $5^\circ$  이며 선단은 기준 경계 면으로부터  $0.5c$  위 또는 아래에 위치한다.

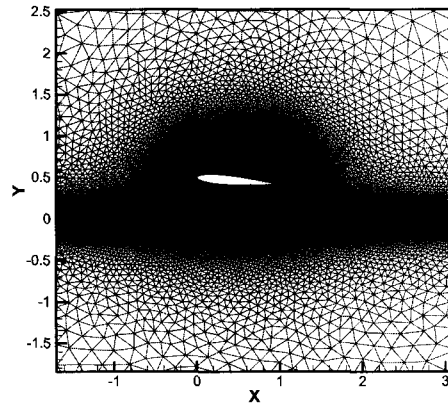


Fig. 15 An unstructured grid around NACA0012 near an interface

두 매질의 밀도 비는 0.8 이며,  $v_\infty/\sqrt{gc}$  는 0.3 이다. Fig. 15 에서 경계면 위에 NACA0012 단면이 위치한 경우에 대해 생성된 비정렬 격자가 나타나어졌다. 비정렬 격자의 유연성에 의하여 물체나 경계면 근처에서의 격자 크기의 조절이 대단히 용이하다.

Fig. 16 는 NACA 단면이 경계 면의 위나 아래에 위치 할 때 발생하는 내면파를 보여준다. 선단이 기준 경계 면으로부터 떨어진 거리는 같아도 두 가지 경우 발생하는 내면파의 파고들 사이에는 상당히 큰 차이가 있음을 볼 수 있다. 두 경우에 대해, 날개 단면에 작용하는 동압 분포가 Fig. 17 에 보여진다. 날개 단면이 경계면 아래쪽에 위치한 경우에는 경계면 위 쪽에 위치한 경우에 비해 양력이 크게 감소함을 볼 수 있다.

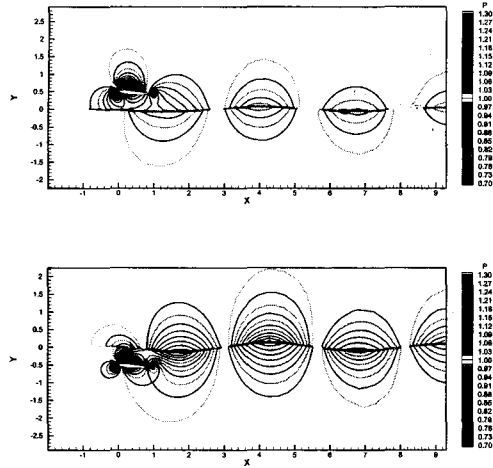


Fig. 16 Wave profiles and pressure contours around a NACA0012 section near an interface

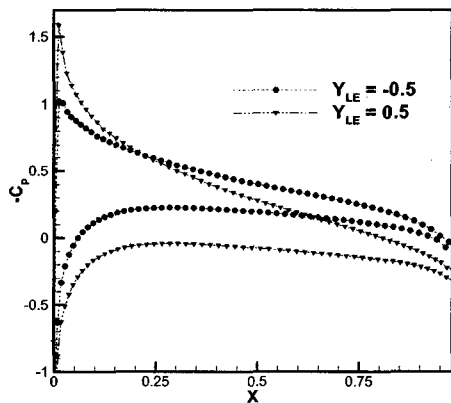


Fig. 17 Pressure distributions on a NACA0012 section near an interface

4. 결론

밀도 차이가 있는 두 가지의 비압축성 매질 경계 면에서 발생하는 내면파를 비정렬 격자계에서 ghost fluid method 를 사용하여 계산하였다. Ghost fluid method 는 매질 경계 면에서의 동압의 불연속을 한 개의 격자 요소 내에서 추정하였다.

비정상 비압축성 유동 계산을 위하여 물리적인

시간에 대해서는 3 점의 후방 차분법을 이용하고 의사 압축성을 도입한 pseudotime 에 대해서는 implicit method 를 이용하였다. 이 방법은 임의의 시간 간격들의 조합에 대해서도 안정성이 있고 물리적 시간 간격에 대해서 2 차의 정도를 가짐을 확인하였다. 지배 방정식에 연성된 level set 함수를 이용한 입자 추적 기법은 와류 박리 유동에 대한 유동 가시화 실험 결과와 비교 되어 검증되었다.

개발된 code 는 실험 결과와 KdV 방정식 해석 결과 및 비선형성이 완전히 고려된 포텐셜 해석 결과가 있는 내면파 문제에 적용되었다. KdV 해석 결과가 실험과 큰 차이를 보이는 경우에 대해서도 본 해석 결과는 실험 결과와 좋은 일치를 보임을 확인하였다. 본 경우에 있어서는 일반적인 표면파의 비선형 특성과는 반대의 편평한 파고와 뾰족한 파저의 형태가 관찰되었다. 그리고 이러한 현상에 대해 동압과 정압의 상쇄와 곡률 반경 및 유속에 따른 동압의 변화라는 관점에서 설명되었다. 밀도 차이가 있는 매질 들의 경계면 위와 아래에서 움직이는 NACA 단면에 대한 해석이 이루어 졌다. 날개 단면이 경계면 위와 아래에 위치한 경우의 내면파 및 날개 단면에서의 동압 분포가 비교되었다.

후 기

본 연구와 관련하여 도움을 주신 국방과학연구소의 김영규 박사님에게 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- 강효길, 김문찬, 전호환, 2004, “셀중심법에 의한 축대칭 극소 로봇의 압축팽창운동에 대한 수치적인 연구”, 대한조선학회 논문집, 제 41 권, 제 2 호, pp.90-97.
- 김문찬, 하동대, 2002, “비정규 격자를 이용한 극소 로봇의 추진 해석”, 대한조선학회 논문집, 제 39 권, 제 3 호, pp.1-7.
- 박일룡, 김진, 반석호, 2004, “Level-Set 법을 Journal of SNAK, Vol. 41, No. 4, August, 2004

이용한 일반상선의 저항성능 해석”, 대한조선학회 논문집, 제 41 권, 제 2 호, pp. 79-89.

- 박일룡, 전호환, 2002, “ 자유표면을 가지는 점성 유동장내의 기포거동에 관한 기초해석”, 대한조선학회 논문집, 제 39 권, 제 1 호, pp.16-27.
- 박일룡, 전호환, 1999a, “ 유한체적법에 의한 자유수면 유동해석에서 Level-Set 기법에 대한 연구”, 대한조선학회 논문집, 제 36 권, 제 2 호, pp. 40-48.
- 박일룡, 전호환, 1999b, “ 점수와 이수 문제에서의 강제주위 유동해석”, 대한조선학회 논문집, 제 36 권, 제 4 호, pp. 37-47.
- Churchill, S.W., 1988, *Viscous Flows-The Practical Use of Theory*, Butterworth, Massachusetts.
- Dalton, C., Xu, Y. and Owen, J.C., 2001, “ The Suppression of Lift on a Circular Cylinder Due to Vortex Shedding at Moderate Reynolds Numbers,” *J. Fluids and Structures*, Vol. 15, pp. 617-628.
- Farrant, T. Tan, M. and Price, W.G., 2000, “ A cell boundary element method applied to laminar vortex-shedding from arrays of cylinders in various arrangements,” *J. of Fluids and Structures*, Vol. 14, pp. 375-402.
- Fedkiw, R.P., Aslam, T., Merriman, B. and Osher, S., 1999, “ A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method),” *J. of Computational Physics*, Vol. 152, pp. 457-492.
- Grue, J., Friis, H.A., Palm, E. and Rusas, P.O., 1997, “ A method for computing unsteady fully nonlinear interface waves,” *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 351, pp. 223-252.
- Kiris, C. and Kwak, D.C., 2001, “ Numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations using a fractional-step approach,” *Computers & Fluids*, Vol. 30, pp. 829-851.
- Kovaszny, L.S.G., 1949, “ Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers,” *Proc. Of the Royal Society*, Vol. 198, pp. 174-190.
- Melville, W.K. and Helfrich, K.R., 1987, “ Transcritical two-layer flow over topography” *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 178, pp. 31-52.
- Mittal, S. and Raghuvanshi, A., 2001, “ Control of vortex shedding behind circular cylinder for flows at low Reynolds numbers,” *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 35, pp. 421-447.
- Shin, S. and Kim, C.K., 2004, “ Numerical simulation on streaklines of traveling vortices using a transport equation on an unstructured grid,” (submitted to *Computers & Fluids*).
- Shin, S., Kim, C.K. and Bai, K.J., 2004, “ Numerical simulation on an interaction of a vortex street with an elliptical leading edge using an unstructured grid,” *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 44, pp. 331-346.
- Slaouti, A. and Stansby, P.K., 1992, “ Flow around two circular cylinders by the random vortex method,” *J. of Fluids and Structures*, Vol. 6, pp. 641-670.
- Wille, R., 1960, “ Karman vortex streets,” *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 6, pp. 273-281.



< 신 상 목 >



< 김 동 훈 >