

미시역학을 이용한 사질토의 이방적 탄성 변형 특성의 해석

Micromechanical Analysis on Anisotropic Elastic Deformation of Granular Soils

정 충 기¹ Chung, Choong-Ki

정 영 훈² Jung, Young-Hoon

Abstract

Anisotropic characteristics of deformation are important to understand the particular behavior in the pre-failure state of soils. Recent experiments show that cross-anisotropic moduli of granular soils can be expressed by functions of normal stresses in the corresponding directions, which is closely linked to micromechanical characteristics of particles. Granular soils are composed of a number of particles so that the force-displacement relationship at each contact point governs the macroscopic stress-strain relationship. Therefore, the micromechanical approach in which the deformation of granular soils is regarded as a mutual interaction between particle contacts is one of the best ways to investigate the anisotropic elastic deformation of soils. In this study, a numerical program based on the theory of micromechanics is developed. Generalized contact model for the irregular contact surface of soil particles is adopted to represent the force-displacement relationship in each contact point for the realistic prediction of anisotropic moduli. To evaluate the model parameters, a set of analytical solutions of anisotropic elastic moduli is derived in the isotropic stress condition. A detailed procedure to determine the model parameters is proposed with emphasis on the practical applicability of micromechanical program to analyze the elastic behavior of the granular soils.

요 지

흙의 이방적 변형 특성은 파괴 이전 상태의 변형 거동을 정확히 이해하기 위한 중요한 특성 중 하나이다. 최근 활발히 이루어지고 있는 실험적 연구 결과는 사질토에서 나타나는 이방적 탄성계수가 직교 이방 탄성이론으로 표현될 수 있으며, 또한 각 방향의 수직 탄성계수가 해당 방향의 수직 응력에 의한 지수 함수로 표현될 수 있음을 보여준다. 이러한 사질토의 탄성계수 이방성은 입자의 미시역학적 특성과 밀접한 관계가 있다. 사질토는 수많은 입자에 의해 구성된 입상체이므로 각 입자 간의 접촉면에서 나타나는 힘-변위 관계가 거시적인 입상체의 응력-변형률 관계를 지배한다. 따라서 사질토의 변형을 입자 간 상호 작용으로 해석하는 미시역학적 접근 방법은 흙의 이방적 변형 특성을 연구하는 가장 좋은 방법 중 하나이다. 본 연구에서는 미시역학 이론을 토대로 흙의 이방적 탄성 변형 특성을 예측하는 수치해석 프로그램을 개발하였다. 실제 토립자의 불규칙한 접촉면 상태를 간략하게 모사할 수 있는 접촉 모델을 제시하였다. 삼축 시험 등의 일반적인 역학 시험으로부터 얻을 수 있는 거시적 탄성 응력-변형률 관계로부터, 미시역학 모델에 필요한 변수를 결정할 수 있는 해석해를 유도하였다. 실내 시험을 통해 구할 수 있는 거시적 탄성계수와 해석해를 이용하여 모델 변수를 구하는 방법을 구체적으로 제시하였다.

Keywords : Anisotropy, Elasticity, Granular soils, Micromechanics

1 정희원, 서울대학교 공과대학 지구환경시스템 공학부 부교수 (Member, Associate Prof., School of Civil, Urban & Geosystem Engrg., Seoul Natl. Univ.)

2 정희원, 서울대학교 공과대학 지구환경시스템 공학부 박사과정 (Member, Graduate Student, School of Civil, Urban & Geosystem Engrg., Seoul Natl. Univ., kiekiea2@snu.ac.kr)

1. 서론

파괴 이전 상태에서 흙의 변형 특성을 이해하기 위해서는 재료의 이방적 특성을 파악하는 것이 매우 중요하다. 이방성을 갖는 사질토의 수직방향 또는 전단 방향의 탄성계수는 해당 방향 수직 응력의 지수 함수 형태로 나타나며, 이러한 특징은 토립자 간 접촉의 물리적 특성과 밀접하게 연관되어 있다. 흙, 특히 사질토는 입자에 의해 구성된 물체이므로, 입자 간 접촉에서 나타나는 힘-변위 관계가 연속체 관점의 거시적 응력-변형률 관계를 지배한다. 따라서 입자 수준에서의 물리적 특성을 고려하는 미시역학(micromechanics) 또는 개별 요소법(discrete element method)이 사질토의 변형 거동을 분석하기에 매우 적절하다고 할 수 있다. 미시역학은 거시적인 관점에서의 응력-변형률 관계를 예측하기 위해 개별 입자의 접촉면에서 발생하는 접촉력과 변위의 관계, 접촉면의 공간적 분포 그리고 입자 접촉면의 방향성 등을 통계적으로 모델링하는 기법이다. 하지만 미시역학 모델에 포함된 변수들을 일반적인 토질 시험으로 구하기 어렵기 때문에, 이 기법은 거시적 특성에 대한 정성적 비교 및 분석에 국한되고 있으며, 지반공학적인 관점에서 실용적 활용은 극히 미비하다.

본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 미시역학적으로 흙의 탄성적 변형 거동을 예측할 수 있는 해석 프로그램을 개발하였다. 토립자 접촉면의 불균질성을 고려하여 접촉면에서 발생하는 힘-변위 관계를 규정하기 위해 간단한 형태의 접촉 모델을 제시하고 해석 프로그램에 이용하였다. 개발 모델에 포함된 변수를 정량적으로 평가하고 미시역학적 해석 기법을 실용적으로 이용하기 위해, 등방 압력 하에서의 직교 이방적 탄성계수를 미시역학 이론으로부터 해석적으로 유도하였고 실내 시험 결과를 이용한 모델 변수 산정 방법을 구체적으로 제시하였다.

2. 미시역학 모델의 개발

본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 새로운 미시역학 모델을 개발하였다. 모델에 포함된 특징 및 가정을 간단히 정리하면 다음과 같다.

(1) 간극비의 변화에 따른 입자 간 접촉 개수의 변화를 고려할 수 있다.

- (2) 입자 접촉면에서 접선 방향 접촉력이 항복치에 도달할 경우 미끄러짐이 발생한다.
- (3) 입자 접촉면에서 인장력이 발생할 경우, 입자는 서로 분리되어 접촉력을 받지 못한다.
- (4) 응력비에 따른 조직 이방성의 변화를 고려할 수 있다.
- (5) 접선 하중에 의한 입자의 회전은 발생하지 않는다.
- (6) 접촉면에서 저항 모멘트는 발생하지 않는다.
- (7) 대상 입자 집합은 동일한 직경의 구형 입자로 이루어졌다.
- (8) 각 입자는 탄성체이며 그 물리적 성질은 동일하다.
- (9) 응력상태의 변화가 발생하더라도 조직(fabric)은 직교 이방적 성질을 유지한다.

2.1 미시적 관점에서의 접촉 모델(microscopic contact model)

입자의 두 입자에서 접평면의 수직 방향에 대한 접촉력과 변위를 각각 f_n 과 d_n 이라 하고, 접선 방향에 대한 두 개의 접촉력(변위)을 $f_s(d_s)$ 와 $f_t(d_t)$ 이라고 하자. 수직 방향 접촉력과 접선 방향 변위가 서로 독립적이고, 접선 방향의 접촉 강성은 접선 방향 접촉력의 방향과 무관하다고 가정한다면, 접촉력과 변위의 관계를 다음의 강성 행렬로 표현할 수 있다.

$$\delta f_i = K_{ij} \delta d_j, \text{ 또는 } \begin{Bmatrix} \delta f_n \\ \delta f_s \\ \delta f_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \\ 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta d_n \\ \delta d_s \\ \delta d_t \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 δf 와 δd 는 각각 접촉력 증분과 변위 증분이다. k_n 은 접평면의 수직 방향에 대한 접촉 강성이며, k_r 은 접선 방향에 대한 접촉 강성이다. k_r 과 관련된 접선 방향 접촉력은 두 개의 접촉력(즉 δf_s 와 δf_t)의 합력 $\delta f_r = \sqrt{\delta f_s^2 + \delta f_t^2}$ 으로 간주하였다.

접평면의 수직 방향에 대한 접촉 강성 k_n 은 접면의 기하학적 조건에 따라 접촉력 f_n 의 지수함수 형태로 표현할 수 있다. 입자를 완전 구체로 가정하고 접촉면의 마찰을 무시한 가장 이상적인 조건에 대해서 Hertz (1882)는 k_n 을 다음과 같이 유도하였다.

$$k_n = \left[\frac{3r_c G_m^2}{(1 - \nu_m)^2} \right]^{1/3} (f_n)^{1/3} \quad (2)$$

여기서 r_c 는 접촉면의 반경을 의미하며, G_m 과 ν_m 은

입자의 전단 탄성 계수와 포아송비이다. 식 (2)에서 알 수 있듯이, k_n 은 이상적인 조건에서 f_n 의 지수함수 형태로 표현되며 그 지수값은 1/3이다. 하지만 일반적인 토립자의 경우 그 접촉면은 매우 불규칙적인 형태이며 입자의 날카로운 모서리(blunt edge)가 서로 접촉한다고 보아야 할 것이다. 이 경우 식 (2)와 달리 보다 복잡한 형태의 식으로 접촉 강성을 표현해야 한다. 본 연구에서는 식 (3)과 같이 일반적인 형태로 표현된 접촉면의 수직 방향에 대한 접촉 강성을 이용하였다.

$$k_n = C_n(f_n)^{\alpha_n} \quad (3)$$

불규칙적인 접촉면을 하나의 선형 모서리로 형상화 하였을 경우 식 (3)의 지수값 α_n 은 0.5이며(Goddard 1990; Johnson 1985), 접촉면이 수많은 불규칙적인 모서리로 이루어졌다고 가정할 경우 지수값은 약 0.7이다(Yimsiri and Soga 2000). 불규칙적인 접촉면에 대해서 C_n 의 값은 입자의 전단 탄성계수, 포아송비, 접촉각 등과 연관되어 있지만, 실제로 이러한 값을 정확히 측정하는 것은 불가능하며 토립자의 불균질성을 고려할 때 단일 입자에 대해 측정된 값을 각 위치에서의 접촉 특성을 충분히 반영하는 값으로 간주하기 힘들다. 따라서 본 연구에서는 C_n 과 α_n 의 값을 특정 접촉 상태에 대해서 규정짓지 않았으며, 이후 설명할 모델 변수 추정 방법에 의해 거시적 탄성계수와 연관지어 결정하였다.

접평면의 접선 방향 접촉 강성 k_r 은 k_n 과 f_r 에 모두 연관되어 있다. 마찰을 무시한 완전 구체의 접촉에서 접선 방향 접촉력 f_r 은 그 크기에 관계없이 항상 접촉면에서 국부적인 미끄러짐을 유발시키며 Mindlin(1949)는 k_r 을 다음과 같이 유도하였다.

$$k_r = \frac{2(1-\nu_m)}{2-\nu_m} k_n^{Hertz} \left(1 - \frac{f_r}{f_n \tan \phi_m}\right)^{1/3} \quad (4)$$

여기서 k_n^{Hertz} 는 식 (2)를 의미하며, ϕ_m 은 입자 간 내부 마찰각이다. 식 (4)에서 알 수 있듯이 접촉 강성 k_r 은 f_r 에 의해 비선형적으로 감소하며 접촉력에 의한 에너지 소산을 야기시킨다. 따라서 식 (4)는 순수한 탄성 변형과 함께 미끄러짐에 의한 소성 변형에 의한 접촉 강성의 변화를 포함한다. 본 연구에서는 접선 방향 접촉력에 의해 발생한 탄성 변형만이 접촉면에서 발생하는 탄성적 힘-변위 관계와 연관되어 있다고 가정하였고, 따라서 접촉 강성 k_r 을 다음의 식으로 표현하였다.

$$k_r = C_r k_n \quad (5)$$

식 (5)에서 k_n 은 식 (3)의 일반적인 형태의 수직 방향 접촉 강성이며, C_r 은 상수이다. C_r 의 값은 Mindlin의 해에 근거하여 입자의 포아송비만의 함수로 가정하였으며 따라서 $C_r = 2(1-\nu_m)/(2-\nu_m)$ 이다. 이 경우 k_r 은 접촉력 f_r 에 의해 발생한 입자의 탄성 체적 뒤틀림(bulk elastic distorsion)과 연관되며 국부적인 미끄러짐은 탄성적 접촉 거동과 무관하다고 가정하였다. 토립자의 경우 입자의 포아송비는 대개 0.2 ~ 0.4의 값을 가지며 사질토 입자는 대부분 석영(quartz; $\nu_m = 0.31$)으로 이루어지므로 C_r 은 대략 0.817로 결정할 수 있다. 이 경우 k_r 은 접선 방향 접촉력 f_r 에는 무관한 값이 된다.

2.2 접점 밀도

접점 밀도는 입상체 내부 단위 체적 당 접점수를 의미하며, 입상체의 간극비와 연관되어 있다. 체적 V 를 가지는 입상체에서 입자의 총 개수를 M 이라 하고, 내부에 발생한 접점수의 두 배를 N 이라 하면, 단위 체적 당 평균 접점수, 즉 접점 밀도 n_v 는 N/V 로 정의된다. 접점 밀도는 입자 당 평균 접점수(coordinate number, $c_n = N/M$)와 입자의 등가 반경 r_m , 그리고 간극비 e 를 이용하여 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$n_v = \frac{3c_n}{4\pi r_m^3(1+e)} \quad (6)$$

식 (6)에서 c_n 의 값은 간극비의 함수로 표현될 수 있으며 불규칙 구성(random packing)의 경우 Chang 등 (1991)은 다음과 같은 식을 제시하였다.

$$c_n = 13.28 - 8e \quad (7)$$

본 연구에서는 각 재하 하중 단계에서 발생한 체적 변형률의 변화로부터 간극비의 변화를 추정하고, 이를 다시 식 (7)에 대입하여 재하 중 접점 밀도의 변화를 고려하였다.

2.3 접점 방향성 - 조직 텐서(fabric tensor)

토체를 구성하는 입자와 이와 연관된 간극의 공간적 분포를 조직(fabric)이라 한다(Oda and Nakayama 1988). 조직은 앞서 기술한 접점 밀도와 함께 접점 방향성으로

규정할 수 있다. 접점 방향성은 접촉면의 방향성을 나타내는 단위 벡터(contact normal)의 공간적인 분포를 통해 표현할 수 있다.

본 연구에서는 식 (8)에 제시한 바와 같이 입상체의 조직을 정의하기 위해 Oda와 Nakayama(1988)가 제시한 조직 텐서 F_{ij} 를 사용하였고, 이 때 접점 단위 벡터의 공간적 확률 분포 $E(\tilde{n})$ 는 Chang 등(1989)이 제시한 2차 퓨리에 급수식을 이용하였다. 식 (9)에서 알 수 있듯이 접점의 공간 분포는 하나의 변수, 즉 조직 이방성 정도(degree of fabric anisotropy, a)에 의해 기술할 수 있다. 흙이 퇴적 및 성형 과정에 의해 직교 이방적(cross-anisotropic) 특성을 띠다고 가정한다면, 수평면에 대해서 조직 방향성은 등방이 되어야 한다. 따라서 식 (9)에서 $E(\tilde{n})$ 는 수평면에서의 각도 β 에 대해서 독립적이며 연직 축에 대한 각도 γ 만의 함수로 표현할 수 있다. 그림 1은 공간에서 접점 위치와 a 의 변화에 따라 접점의 공간 분포가 어떻게 변화하는 지 보여준다.

$$F_{ij} = \int_{\Omega} n_i n_j E(\tilde{n}) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} n_i n_j E(\gamma, \beta) \sin \gamma d\gamma d\beta \quad (8)$$

$$E(\tilde{n}) = E(\gamma) = 3(1 + a \cos 2\gamma) / 4\pi(3 - a) \quad (9)$$

식 (9)에서 a 는 -1.0에서 1.0 사이의 값을 가지며, 연직 방향과 수평 방향의 접점 발생 확률을 변화시킨다. 즉 $a=0$ 이면 토립자 구조가 등방 상태를 의미하며, $a>0$ 이면 연직 방향으로 접점이 집중됨을 의미한다. 반대로 $a<0$ 이면 수평 방향으로 접점이 집중함을 의미한다. 따라서 $a>0$ 의 경우 거시적인 수직 방향 강성, 즉 직교 이방성에서의 E_v 또는 G_{vh} 가 E_h 또는 G_{hh} 보다 큰 값을 가지게 되며, $a<0$ 이면 반대의 상태를 의미한다.

조직 텐서로 표현된 접점 방향성은 외부 하중 상태에 의해 영향을 받으며 계속적으로 변한다. 즉 식 (8)과 (9)에서 조직 이방성 정도 a 는 외부 재하 하중 상태에 따라 계속적으로 변해야 한다. 하지만 입자 수준에서 특정 응력 상태에 대한 접점 분포를 실측하는 것은 매우 힘든 일이다. Rothenburg와 Bathurst(1989)는 개별 요소법을 이용하여 2축 압축 조건에서 접점 방향성을 규정하는 a 가 주응력비에 대해 선형적인 관계가 나타남을 보였다. 본 연구에서는 이들의 연구 결과를 토대로 조직 이방성 정도 a 를 주응력비 $\eta = q/p'$ 에 대한 다음의 선형 식으로 정식화하였다.

$$a = a_0 + a_1(q/p') \quad (10)$$

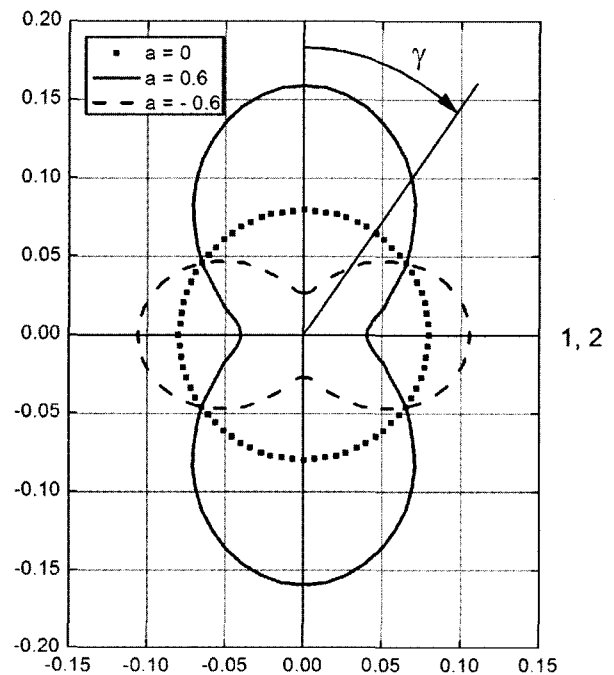
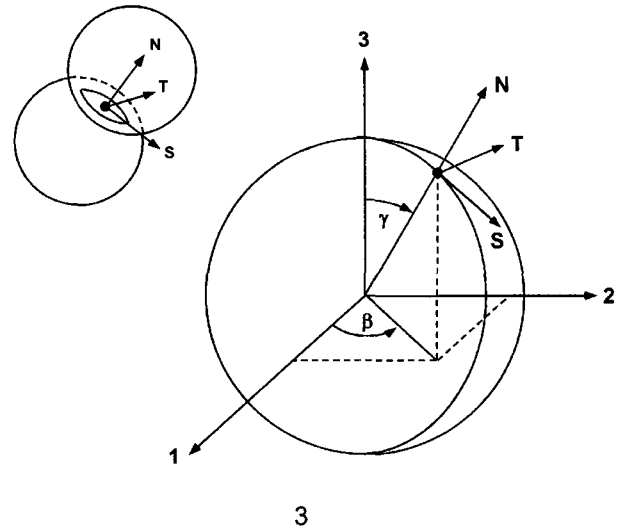


그림 1. 공간에서 접점 위치 및 a 의 변화에 따른 접점의 공간적 분포

여기서 a_0 는 초기 조직 이방성을 나타내며, a_1 는 주응력비 증가에 따른 a 의 증가비이다. p' 은 평균 유효 주응력(mean normal effective stress)이며, q 는 축차응력이다. 초기 조직 이방성은 외적 하중 상태가 등방압일 때 정의된다고 가정하였고, 등방압 상태가 유지될 때 조직 이방성의 변화가 없다고 보았다. 즉 재하 중 응력 유도 이방성은 축차 응력의 변화에 의해 발생한다고 가정하였다.

2.4 거시적 관점에서의 응력-변형을 관계

거시적 관점에서의 응력과 변형을 미시적 접촉면에서의 힘 또는 변위와 연관시키는 방법은 정적 가설

(static hypothesis)와 동적 가설(kinematic hypothesis)이 있다(Chang and Liao 1994). 본 연구에서는 정적 가설을 통해 거시적 응력과 미시적 접촉력을 서로 연관시켰으며 그 관계는 식 (11)과 같이 정의된다.

$$\delta f_i = \frac{1}{2r_m n_v} \delta \sigma_{ij} \bar{F}_{jk} n_k \quad (11)$$

여기서 r_m 은 입자의 평균 반경이며, n_v 는 단위 체적당 평균 접촉수 또는 점점 밀도이다. $\bar{F}_{jk} = F_{jk}^{-1}$ 이다. n_k 는 임의 접촉면의 수직 방향을 나타내는 단위 벡터이며 $\tilde{n} = [\sin \gamma \cos \beta, \sin \gamma \sin \beta, \cos \gamma]$ 이다. 식 (11)에 의해 정의된 거시적 응력 성분과 미시적 접촉력의 관계와 미시적 접촉 모델, 그리고 에너지 보존 법칙을 이용하여 거시적 응력-변형률 관계를 규정하는 킴플라이언스 행렬(macroscopic compliance matrix)을 식 (12)와 같이 유도할 수 있다. 그림 2는 정적 가설에 의한 거시적 응력-변형률 관계와 미시적 접촉력-변위 관계가 어떻게 연관되는 지 보여준다.

$$\delta \epsilon_{on} = C_{onij} \delta \sigma_{ij}$$

$$C_{onij} = \frac{1}{4r_m^2 n_v} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\bar{F}_{on} n_o)(T_{ni} K_{ii} T_{ij})(F_{ij} n_j) E(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\beta \quad (12)$$

식 (12)에서 T_{ij} 는 전체-국부 좌표계 간의 변환 행렬이며, 식 (13)과 같이 정의된다. 또한 $\bar{T}_{ij} = T_{ij}^{-1} = T_{ji}^T$ 이다.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta & -\sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.5 미시역학 해석 프로그램의 개발

본 연구에서는 앞서 설명한 여러 미시역학적 이론으

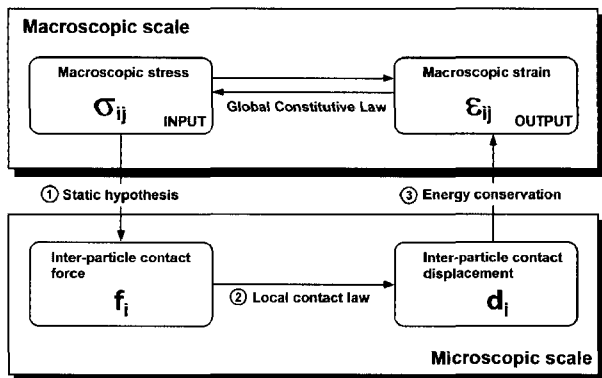


그림 2. 정적 가설을 이용한 해석 과정

로부터 주어진 거시적 응력 상태에서 입상체의 변형을 예측할 수 있는 해석 프로그램을 개발하였다. 그림 3은 개발 프로그램의 순서도를 보여준다. 해석 프로그램에서는 해당 응력 조건에 대해서 입상체가 가지는 직교 이방적 킴플라이언스 행렬을 구성하고 이를 이용하여 응력 증분에 대한 변형률 증분의 크기를 결정한다. 킴플라이언스 행렬의 구성은 식 (12)를 mid-point method를 이용한 수치 적분으로 구하였다. 이때 수치 적분 시 각도 증분은 1도로 정하였다. 미시역학 해석 프로그램에 필요한 모델 변수는 표 1에 정리하였다.

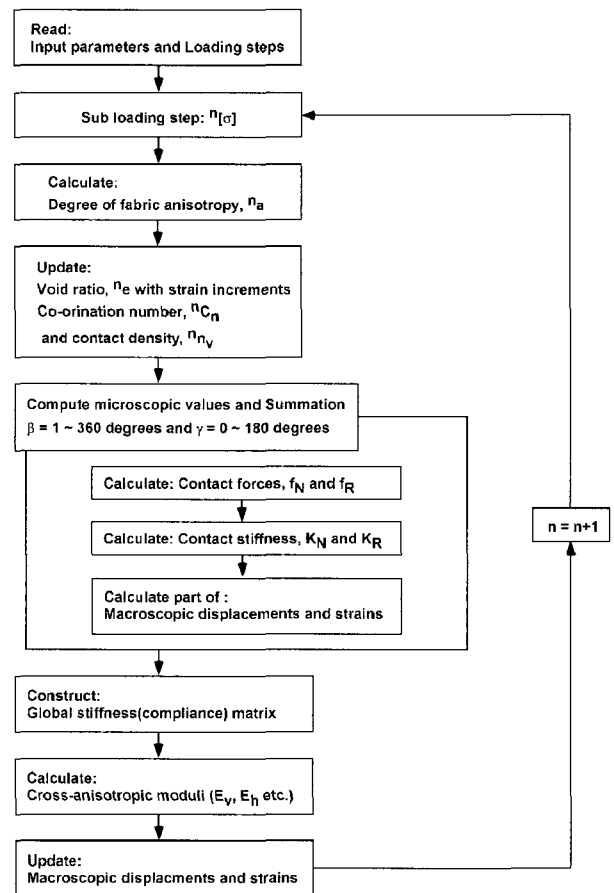


그림 3. 개발 프로그램의 순서도

표 1. 미시역학 해석 프로그램의 입력 변수

범주	입력 변수	
접촉 모델	C_n	접촉 강성 k_n 에 필요한 변수
	a_n	
점점 밀도	C_r	접촉 강성 k_r 에 필요한 변수
	e_0	
점점 방향성	r_m	입상체 초기 조직 이방성 정도
	a_0	
	a_1	주응력비에 따른 a 의 증가비

3. 미시역학적 변수로 표현된 이방적 강성에 대한 해석식

서론에서 언급한 바와 같이 미시역학적 해석 방법이 사질토의 변형 특성을 해석하고 이해하는 데 매우 유용한 방법임에도 불구하고 미시역학 모델에 포함된 변수들, 특히 개별 입자의 접촉에 관련된 변수의 값을 결정하는 것은 일반적인 토질 시험으로는 구하기 어렵다. 따라서 미시역학적 해석 방법은 현재 사질토의 거시적 특성에 대한 정성적 비교 및 분석에 국한되고 있으며 (Chang 등 1991; Yimsiri and Soga 2000), 실용적 활용은 극히 미비하다. 현재의 미시역학 모델이 토질역학 해석에 능동적으로 사용되지 못하는 이유는 접촉 모델에 관련된 다음의 사항 때문이다. 첫 번째로 기존의 접촉 모델이 일반적으로 금속 재료의 매우 이상화된 조건에 대해 유도된 식이므로, 불균질성이 심한 토립자의 특성을 고려할 때 기존의 접촉 모델을 그대로 이용하기에는 무리가 있다. 두 번째로 기존의 접촉 모델을 이용하더라도 포함된 변수를 실측하기 매우 어려우며, 특정 개별 토립자에 대한 실험을 통해 그 변수를 얻더라도 토립자의 불균질성 때문에 그 값이 입상체 내부의 수많은 접촉 거동을 대표할 수 있는 값이라고 보장할 수 없다.

본 연구에서는 먼저 첫 번째 제한 사항, 즉 접촉 모델 자체의 문제점을 해결하기 위해서 식 (3)과 (5)와 같이 특정한 접촉면 및 입자의 기하학적인 특징에 국한되지 않는 일반적인 형태의 접촉 모델을 도입하였다. 두 번째로 사질토의 거시적 특성으로부터 미시역학 모델 변수를 간편하게 추정할 수 있는 방법을 제안하였다. 유도된 해석해를 실험적으로 구한 거시적인 탄성계수와 직접 비교하여 미시역학 모델의 변수를 추정할 수 있다.

일반적으로 미시역학을 통해 거시적 탄성계수에 대한 해석식을 구하는 것은 매우 어렵다. 이는 접촉 강성 k_n 과 k_r 이 접촉력의 함수이고 또한 접촉력은 해당 접촉면의 방향과 조직 상태에 따라 다른 값을 가지기 때문이다. 따라서 해석식은 매우 제한된 조건에 대해서만 유도할 수 있다. 본 연구에서는 이방성 정도가 크지 않은 등방압 조건에서 직교 이방적 탄성계수의 해석해를 다음과 같이 유도하였다.

등방압 σ_c 가 가해지는 조건에서 임의의 접점에서 발생하는 접촉력은 정적 가설과 좌표 변환을 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2r_m n_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 n_1 + \overline{F}_{22} n_2 n_2 + \overline{F}_{33} n_3 n_3] \\ f_s &= \frac{1}{2r_m n_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 s_1 + \overline{F}_{22} n_2 s_2 + \overline{F}_{33} n_3 s_3] \\ f_t &= \frac{1}{2r_m n_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 t_1 + \overline{F}_{22} n_2 t_2 + \overline{F}_{33} n_3 t_3] \end{aligned} \quad (14)$$

위의 식에서 \overline{F}_{ij} 는 직교 이방적 조직 텐서 F_{ij} 의 역행렬이다. 식 (8)을 적분하고 적절히 분리하면 \overline{F}_{ij} 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{F}_{ij} &= \frac{5(3-a_0)}{5-3a_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-3a_0}{5+3a_0} \end{bmatrix} \\ &= \overline{F}_a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \overline{F}_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\overline{F}_a = 5(3-a_0)/(5-3a_0)$ 이며, $\overline{F}_b = -20a_0(3-a_0)/(5+a_0)(5-3a_0)$ 이다. 이때 초기 등방압 상태에서 입상체의 조직은 a_0 의 값으로 표현할 수 있다고 가정하였다. 식 (15)를 식 (14)에 대입하고 그 결과를 식 (3)과 (5)에 대입하면, 접촉 강성 k_n 과 k_r 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} k_n &= C_n (\overline{F}_a / 2r_m n_v)^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \left[1 + \frac{\overline{F}_b}{\overline{F}_a} \cos^2 \gamma \right]^{\alpha_n} \\ &\approx C_n (\overline{F}_a / 2r_m n_v)^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \\ k_r &= C_r C_n (\overline{F}_a / 2r_m n_v)^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \left[1 + \frac{\overline{F}_b}{\overline{F}_a} \cos^2 \gamma \right]^{\alpha_n} \\ &\approx C_r C_n (\overline{F}_a / 2r_m n_v)^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서 초기 등방압 상태에서 조직 이방성의 정도가 크지 않아서 $\overline{F}_b / \overline{F}_a$ 의 값이 무시할 정도로 작은 값이라고 가정한다면, 식 (16)의 우측항과 같이 각도 γ 에 무관한 식으로 접촉 강성을 표현할 수 있다. 이때의 접촉 강성을 식 (12)에 대입하고 적분을 실시한 후 정리하면, 등방압 상태에서 직교 이방성 탄성계수에 대한 해석식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_v &= C_n C_r \left[\frac{28r_m^2 n_v (5+a_0)^2}{5(3-a_0)[14-2a_0+C_r(21+9a_0)]} \right] \\ &\quad \left[\frac{5(3-a_0)}{2r_m n_v (5-3a_0)} \right]^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \\ E_n &= C_n C_r \left[\frac{28r_m^2 n_v (5-3a_0)^2}{5(3-a_0)[14-6a_0+C_r(21-15a_0)]} \right] \\ &\quad \left[\frac{5(3-a_0)}{2r_m n_v (5-3a_0)} \right]^{\alpha_n} (\sigma_c)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

$$G_{vh} = C_n C_r \left[\frac{14r_m^2 n_v (5-3a_0)^2 (5+a_0)^2}{5(5-a_0)(3-a_0)[105-46a_0-23a_0^2 + C_r(70-24a_0+2a_0^2)]} \right] \left[\frac{5(3-a_0)}{2r_m n_v (5-3a_0)} \right]^{a_n} (\sigma_c)^{a_n}$$

$$G_{hh} = C_n C_r \left[\frac{14r_m^2 n_h (5-3a_0)^2}{5(3-a_0)[21-11a_0 + C_r(14-10a_0)]} \right] \left[\frac{5(3-a_0)}{2r_m n_h (5-3a_0)} \right]^{a_n} (\sigma_c)^{a_n} \quad (17)$$

식 (17)에서 조직 이방성은 초기값 a_0 로 표시하였는데, 이는 앞서 기술한 바와 같이 등방압 조건에서의 조직 이방성을 초기 상태로 간주하였기 때문이다. 식 (17)을 살펴보면 각 탄성계수의 해석해는 $(\sigma_c)^{a_n}$ 의 함수이며, 이는 실험적으로 구한 이방적 탄성계수에 대한 경험식의 형태 (Roesler 1979; Yu and Richard 1984; Bellotti 등, 1996; Kuwano와 Jardine 2002)와 일치한다. Kohata 등 (1997)은 점착성이 없는 다양한 사질토에 대한 실험 결과를 종합하여 이방적 탄성계수가 구속압의 지수함수 형태로 나타나며 재료의 입경에 관계없이 지수값이 약 0.5임을 보였다. 따라서 식 (17)에서 a_n 의 값은 약 0.5로 보는 것이 타당하다. 이는 2.1절에서 언급한 바와 같이 사질토의 입자 접촉이 날카로운 모서리를 가진 불규칙적 접촉면으로 이루어짐을 의미한다.

식 (17)의 해석해는 유도 과정 중 \bar{F}_b / \bar{F}_a 의 값을 무시하기 때문에 오차를 내포하게 된다. 식 (16)을 살펴보면 k_n 이 내포한 오차는 $[1 + (\bar{F}_b / \bar{F}_a) \cos^2 \gamma]^{a_n}$ 에 의해 발생한다. 적분 과정 중 γ 는 소거되며 a_n 은 0.5에 가까운 값을 가지므로, 해석해가 내포하는 오차는 \bar{F}_b / \bar{F}_a 의 크기에 의해 결정되며, 즉 a_0 의 값에 의해 오차의 크기가 결정된다. 2절에서 언급한 개발 프로그램에서 충분히 작은 각도에 대해 적분을 수행하여 탄성계수를 구하면 해석식의 유도 과정에서 포함한 가정 조건에 의해 발생하는 오차를 배제할 수 있다. 따라서 특정 응력 조건에서 해석 프로그램을 통해 구한 탄성계수와 해석해로 구한 탄성계수를 서로 비교하면 a 의 변화에 따른 해석해 오차의 크기를 파악할 수 있다.

그림 4는 $a_n = 0.5$ 그리고 $C_r = 0.817$ 인 경우 해석해로 구한 탄성계수와 개발 프로그램을 통해 구한 탄성계수를 서로 비교한 결과를 보여준다. 그림 4를 살펴보면 a 가 -0.6에서 0.3의 범위에 있을 때 해석해로 구한 탄성계수는 해석 프로그램으로 구한 정해의 $\pm 10\%$ 이내의 오차를 내포한 값이 계산된다. $a = -0.6 \sim 0.3$ 의 범위는 일반적으로 등방압 하에서 사질토에서 나타나는 이방성의 범위(Yimsiri and Soga 2002)에 포함되며, 또한 \pm

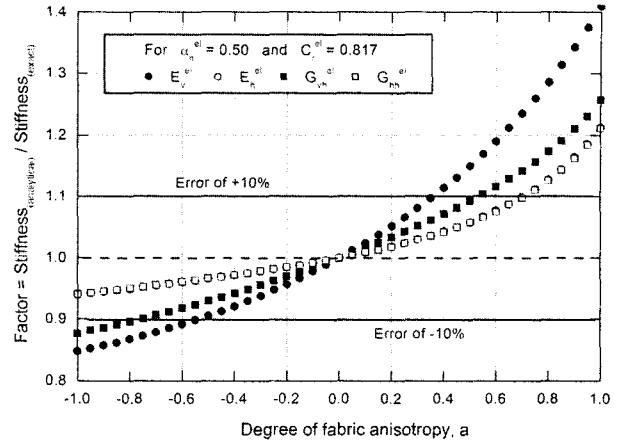


그림 4. a 의 변화에 따른 해석해의 발생 오차

10%의 오차 역시 실험 결과에서도 나타날 수 있는 오차 범위이다(Kuwano and Jardine 2002). 따라서 해석해를 통해 구한 직교 이방적 탄성계수는 여러 상황을 고려해 볼 때 충분히 정확한 값이라고 볼 수 있다.

4. 모델 변수의 산정

미시역학 해석 프로그램에 포함된 여러 변수들은 앞서 기술한 해석해와 실험을 통해 구한 탄성계수를 비교하여 산정할 수 있다. 실험을 통해 사질토의 이방적 탄성계수를 평가하면 아래의 경험적 관계식으로 응력과 탄성계수의 관계를 산정할 수 있다. 식 (18)에서는 등방압 상태에서의 경험적 관계식을 같이 정리하였다.

$$E_v = C_v f(e) (\sigma_v / p_r)^{a_v} = C_v f(e) (\sigma_c / p_r)^{a_v}$$

$$E_h = C_h f(e) (\sigma_h / p_r)^{b_h} = C_h f(e) (\sigma_c / p_r)^{b_h}$$

$$G_{vh} = C_{vh} f(e) (\sigma_v / p_r)^{a_{vh}} (\sigma_h / p_r)^{b_{vh}} = C_{vh} f(e) (\sigma_c / p_r)^{a_{vh} + b_{vh}}$$

$$G_{hh} = C_{hh} f(e) (\sigma_v / p_r)^{a_{hh}} (\sigma_h / p_r)^{b_{hh}} = C_{hh} f(e) (\sigma_c / p_r)^{a_{hh} + b_{hh}} \quad (18)$$

여기서 C_v , C_h , C_{vh} , C_{hh} 는 재료 상수이며, 지수값 a_v , b_h , $a_{vh} + b_{vh}$, $a_{hh} + b_{hh}$ 는 대개 거의 0.5 근처의 동일한 값으로 나타난다(Kuwano and Jardine 2002). p_r 은 대기압(101.3kPa)이다. $f(e)$ 는 간극비의 변화를 고려하기 위한 함수이며 Hardin과 Richart(1963)는 $f(e) = (2.17 - e)^2 / (1 + e)$ 로 정의하였다. 표 1에 정리한 모델 변수의 추정 방법은 다음과 같다.

- (1) 기본적인 재료 물성치를 이용한 변수 e_0 , r_m , C_r 의 평가

점점 밀도에 관련된 변수, 즉 초기 간극비 e_0 와 등가

입자 반경 r_m 은 일반적인 기본 물성치 시험을 통해 구할 수 있다. 등가 입자 반경 r_m 은 $D_{50}/2$ 의 값으로 정한다. C_r 의 값은 입자의 포아송비로 구할 수 있으며 석영 입자의 경우 대략 0.817의 값을 가진다.

(2) α_n 의 평가

앞서 기술한 바와 같이 등방압 조건에서 이방적 탄성계수의 경험식과 해석식은 동일한 형태, 즉 구속압의 지수함수 형태로 표현된다. 이때 구속압의 지수값을 서로 비교하면 α_n 의 값을 산정할 수 있다. 식 (18)의 경험식에서 4가지 지수값($a_v, b_h, a_{vh} + b_{vh}, a_{hh} + b_{hh}$)의 차이는 실험적 오차로 간주하며 그 평균값을 α_n 의 값으로 취한다.

(3) a_0 의 평가

재료가 등방압 상태에서 초기 조직이 구성된다면, 실험을 통해 구한 탄성계수비와 해석해를 통해 구한 탄성계수비를 직접 비교하여 a_0 의 값을 구할 수 있다. 식 (17)의 해석해로부터 탄성계수비를 구하면 다음의 식과 같다.

$$n = E_h/E_v = \frac{(5-3a_0)^2}{(5+a_0)^2} \left[\frac{14-2a_0+C_r(21+9a_0)}{14-6a_0+C_r(21-15a_0)} \right]$$

$$m = G_{hh}/G_{vh}$$

$$= \frac{(5-a_0)}{(5+a_0)} \left[\frac{105-46a_0-23a_0^2+C_r(70-24a_0+2a_0^2)}{21-11a_0+C_r(14-10a_0)} \right] \quad (19)$$

식 (19)에서 각 탄성계수비는 C_r 과 a_0 만의 함수이며 C_r 의 값은 앞서 평가하였으므로, 등방압 조건에서 탄성계수비(즉 n 또는 m)를 실험적으로 측정하면 초기 조직 이방성 정도 a_0 의 값을 쉽게 구할 수 있다.

(4) C_n 의 평가

앞서 α_n 과 C_n , 그리고 a_0 의 값을 추정하였으므로, 식 (17)의 해석해와 식 (18)의 경험식을 서로 비교하여 C_n 의 값을 산정할 수 있다. 이 경우 각각의 탄성계수에 대한 식으로부터 4가지 C_n 의 값이 산정되는데, 이상적인 경우 그 값은 모두 동일하여야 한다. 4개의 값이 서로 다른 경우, 값의 차이는 실험적 오차로 간주하며 평균값을 취한다.

(5) a_1 의 평가

주응력비의 증가에 따른 a 의 변화를 고려하기 위해서는 a_1 의 값이 정해져야 한다. 이 값의 경우 축차 응력이 발생한 경우에 대해서 산정해야 하므로 다른 변수와 달리 초기 등방압 조건에 대한 해석식을 통해 구할 수 없다. a_1 의 값을 평가하기 위해서는 초기 등방압 조건에서 축차 응력 변화에 의한 전단 중 탄성계수 변화의 측정치가 필요하다. a_1 의 값은 축차 응력이 변하는 재하 조건에서 실측한 탄성계수의 변화에 대해 parametric study를 실시하여 그 값을 결정한다.

5. 결론

본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 토립자 간 접촉면에서 발생하는 미시적 힘-변위 관계와 토립자로 이루어진 입상체의 거시적 응력-변형률 관계를 유도하였다. 이를 이용하여 미시적 관점에서 토체의 응력-변형률 관계와 직교 이방적 탄성계수를 구할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 토립자 접촉면에서 발생하는 힘-변위 관계를 규정짓기 위해 특정한 접촉면 및 입자의 기하학적인 특성에 국한되지 않는 일반적인 형태의 접촉 모델을 제안하고 해석 프로그램에 이용하였다. 또한 개발 프로그램에서는 재하 중 발생하는 간극비 변화에 따른 연속적인 점점 밀도의 변화 및 주응력비 변화에 따른 조직 이방성의 변화를 고려하였다.

기존의 미시역학 모델의 문제점 중 하나인 변수 추정의 어려움을 해결하기 위해, 초기 등방압 조건에 대한 해석해를 미시역학적 변수들을 이용하여 유도하였다. 유도된 해석해는 실험을 통해 측정된 탄성계수 값과 직접적으로 비교하여 모델 변수를 추정하기 위해 이용하였다. 해석해와 실험치를 이용하여 구체적으로 모델 변수를 산정할 수 있는 방법을 제시하였고, 사질토의 이방적 탄성 거동을 파악하기 위해 미시역학 해석 기법을 실용적으로 사용할 수 있도록 하였다.

향후 실내 실험 결과로부터 본 연구에서 제시한 변수 추정 방법을 통해 미시역학적 변수들을 결정하고, 해석 프로그램을 이용하여 사질토의 이방적 탄성 변형 특성에 대한 미시역학적 분석을 수행할 필요가 있다. 또한 탄성적 거동 이외에 비선형 이방적인 탄소성 거동의 해석을 위해 접촉 모델을 확장할 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. Bellotti, R., Jamiolkowski, M., Lo Presti, D.C.F. and O'Neill, D.A. (1996), Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand, *Geotechnique*, Vol.46, No.1, pp.115-131.
2. Chang, C.S. and Liao, C.L. (1994), Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules, *App. Mech. Rev.*, Vol.47, No.1, pp.197-206.
3. Chang, C.S., Misra, A. and Sundaram, S.S. (1991), Properties of granular packings under low amplitude cyclic loading, *Soil Dynamics and Earthquake Eng.*, Vol.10, No.4, pp.201-211.
4. Chang, C.S., Sundaram, S.S. and Misra, A. (1989), Initial moduli of particulated mass with frictional contacts. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* Vol.13, pp.629-644.
5. Goddarad, J.D. (1990), Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media, *Proc. Royal Society of London*, Vol.430, pp.105-131.
6. Hardin, B.O. and Richart, F.E. (1963), Elastic wave velocities in granular soils, *J. of Soil Mech.*, ASCE, Vol.89, No.1, pp.33-65.
7. Hertz, H. (1882), On the contact of elastic solids, *J. reine and angewandte Mathematik*, Vol.92, pp.156-171.
8. Johnson, K.L. (1985), *Contact mechnis*, Cambridge, Cambridge University Press.
9. Kohata, Y., Tatsuoka, F., Wang, L., Jiang, G.L., Hoque, E. and Kodaka, T. (1997), Modelling of non-linear deformation properties of stiff geomaterials, *Geotechnique*, Vol.47, No.3, pp.563-580.
10. Kuwano, R. and Jardine, R.J. (2002), On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains, *Geotechnique*, Vol.52, No.10, pp.727-749.
11. Mindlin, R.D. (1949), Compliance of elastic bodies in contact, *Trans. ASME, Series E, J. Appl. Mech.*, ASME, Vol.16, pp. 259-265.
12. Oda, M. and Nakayama, H. (1988), Introduction of inherent anisotropy of soils in the yield function, *Micromechanics of granular materials*, Amsterdam, pp.81-90.
13. Roesler, S.K. (1979), Anisotropic shear modulus due to stress anisotropy, *J. Geotech. Engng*, ASCE, Vol.105, No.GT7, pp. 871-880.
14. Rothenburg, L. and Bathurst, R.J. (1989), Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, *Geotechnique*, Vol.39, No.4, pp.601-614.
15. Yimsiri, S. and Soga, K. (2000), Micromechanics-based stress-strain behaviour of soils at small strains, *Geotechnique*, Vol.50, No.5, pp.559-571.
16. Yimsiri, S. and Soga, K. (2002), Application of micromechanics model to study anisotropy of soils at small strains, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.15-26.
17. Yu, P. and Richart, F.E. Jr. (1984), Stress ratio effects on shear modulus of dry sands, *J. Geotech. Engng.*, ASCE, Vol.110, No.3, pp.331-345.

(접수일자 2004. 5. 31, 심사완료일 2004. 7. 5)