韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004. 5. 제 43권, 제 2호, 199-210.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2004, Vol. 43, No. 2, 199-210.

중등 예비교사의 함수 관계 상황 표현 능력에 대한 조사 연구[1)]

차 인 숙 (한양대학교 겸임교수)
한 정 순 (한양대학교)

I. 서 론

수학교육의 궁극적 목적은 경제·사회·문화·자연에 담긴 수학적 현상이나 원리를 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적으로 이해할 수 있는 수학적 안목을 키워주는 것이다(황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽, 2002). 이를 위해서는 우리의 생활과 자연세계에 담긴 수학적 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 어떤 법칙과 원리를 발견하여 구조화시키고 추상화시키는, 즉 내적·외적 상황을 '함수적'인 관점에서 파악 처리하는 함수적 사고의 함양이 필수적으로 요구된다(송순희·오정현, 1997). 함수적 사고의 중요성에 대해서는 독일의 수학교육 개혁운동의 착수자 클라인(F. Klein)이 1893년에 개최된 국제수학자협의회(International Congress of Mathematicians)에서 학교수학이 '함수적 사고'란 주도 관념 아래 형성되어야 하며 중등 수학교사들이 학생의 함수적 사고 함양에 관심을 가지는 것이 중요함을 주장하였다(Breslich, 1932; 우정호, 2000). 그 이후로 많은 학자들(Breslich, 1928, 1932; Day, 1995; Hamley, 1934; Hight, 1968; Lennes, 1932; Lloyd, 1996; Malik, 1980; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986; NCTM, 1989, 2000; Norman, 1992; Wilson, 1994; Wilson & Shealy, 1995)에 의해서 함수적 사고의 중요성이 언급되어 왔다. 이들이 공통적으로 주장하는 함수적 사고는 현실세계의 변화와 종속성에 주목하여 한 변수가 변화하면 다른 한 변수가 어떻게 변화하는지를 아는 것과 변수들 간에 형성되고 있는 관계의 특성을 파악하여 식이나 그래프로 표상화하고 이를 통해 현상을 해석하고 예측할 수 있는 능력을 말한다.

교사는 학생들의 함수적 사고의 함양을 위한 교수학습 상황을 구성할 수 있어야 한다. 이를 위해 교사는 (1) 학교수학에서 함수를 가르치고 배우는 이유를 알아야 하고 (2) 함수 관계를 나타내는 다양한 실세계 상황을 구성할 수 있어야 하고 (3) 이를 표상화하고 해석할 수 있어야 한다. 본 고에서는 함수의 중요성에 대한 예비교사의 인식과 함수 관계 상황 표현 능력을 조사하고자 한다. 본 연구의 중요성은 다음과 같다. 첫째, 교사의 수학적 지식은 학생이 배우게 되는 학습내용과 직접적인 관련(Ball, 1990; Brophy, 1991; Even, 1993; Fennema & Franke, 1992; Lampert, 1991; Leinhardt & Smith, 1985; Lloyd & Wilson, 1998; Marks, 1987; Shulman, 1986, 1987; Steinberg, Marks & Haymore, 1985; Thompson, 1984, 1992; Thompson, Philipp, Thompson & Boyd, 1994)이 있으므로 교사의 지식을 분석하여 부족한 점을 아는 것은 중요하다. 이는 예비교사를 위한 교육프로그램 개발에 중요한 자료가 될 것이다. 수학교사가 되면 교과서와 교사용 지도서를 보면서 수업준비를 하기 때문에 예비교사는 가르치는데 필요한 지식을 불완전하게 갖추고 있어도 괜찮다는 생각을 해서는 안 된다. 예비교사가 어떤 지식을 어떻게 가지고 있는지를 조사하여 부족하거나 잘못된 지식과 믿음을 찾아 변화할 수 있는 기회를 제공하여야 한다. 둘째, 함수개념과 관련한 교사의 지식에 대한 연구는 함수정의, 함수 개념 이미지, 함수 여부 판별에 대한 연구가 주를 이루었고(김원경·김용대, 2002; Cha, 1999; Even, 1993; Wilson, 1994), 함수의 중요성에 대한 교사의 인식과 함수 관계 상황 표현 능력에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다.

---

1) 본 논문은 2002년도 한양대학교 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

* 2004년 1월 투고, 2004년 5월 심사 완료.
* ZDM분류 : B59
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 예비교사교육, 교사지식, 함수적 사고.

Ⅱ. 조사 방법

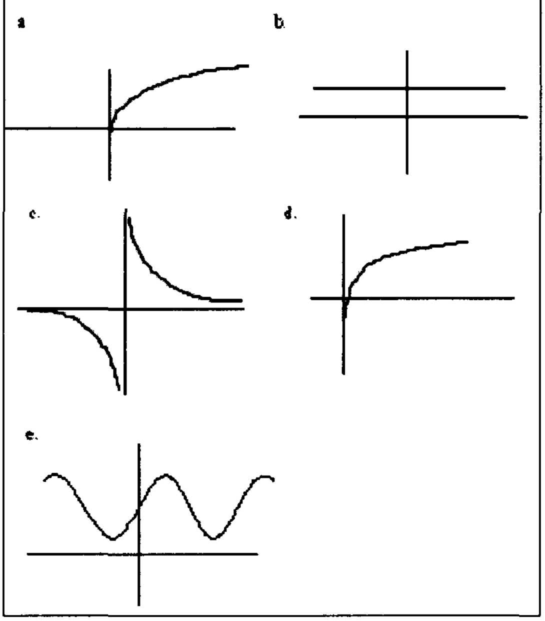
1. 조사 대상

조사대상은 서울에 위치한 H대학교와 K대학교의 교육대학원 학생 64명이다. 이들 중 현장 교사 9명은 본 연구에서 제외하였으므로 연구대상자는 예비교사 55명이다. 면담은 이들 중 3명을 선택하여 개인별로 실시하였으며 면담시간은 각각 40분 정도 소요되었다. 면담 내용은 검사도구에 기술한 응답 내용을 좀 더 상세히 설명하고 면담 중에 새로이 생각나는 내용을 말하도록 하였다. 면담내용과 검사도구에 적힌 내용을 비교 분석한 결과 새로이 추가되는 내용은 무시할 정도이었다. 즉, 검사도구에 적힌 응답내용에 해당하는 분석 범주에 새로운 범주가 추가되는 정도는 아니었다.

2. 검사 도구

2003년도 2학기 수학교과교재연구 및 지도법 수업 첫 날에 검사도구가 실행되었다. 검사문항(<부록> 참조)은 함수가 무엇인지를 묻는 문항, 함수를 가르치고 배우는 이유를 묻는 문항, 그래프 상황에서 실세계 상황을 만들어 보는 문항, 병원에서 환자와 의사와의 대화 내용과 경제학 수업시간에 광고비용이 판매량에 미치는 영향에 대해서 학생들이 토론하는 대화 내용 중에서 함수 관계를 찾아 그래프를 그리도록 하는 문항으로 구성되어 있다. 본 고는 검사도구 문항 중 2번과 3번의 a, b, c, d, e에 해당하는 분석결과를 토대로 기술되었다(<그림 1> 참조).

2. 함수를 왜 배우냐고 학생이 물으면 어떻게 대답하시겠습니까?
3. 다음은 함수관계를 나타내는 그래프입니다. 다음의 그래프로 표현될 수 있는 실세계 상황을 만들어 보십시오.



<그림 1> 본고에서 사용된 조사 문항

중등 예비교사의 함수의 중요성에 대한 인식을 조사하기 위해 2번 문항을 도입하였고 함수관계 상황 표현 능력을 조사하기 위해 3번의 a, b, c, d, e를 선택하였다. 그 이유는 다음과 같다. 첫째, 예비교사의 그래프 해석 능력과 그래프를 실세계 상황과 연결시킬 수 있는 능력을 보고자 하였다. 이종희 · 김부미(2003)는 그래프는 함수의 규칙을 파악하는 내용적인 측면보다 그래프를 그리는 기술적인 측면을 중심으로 지도되기 때문에, 학생들은 그래프의 역할과 필요성을 잘 이해하지 못한다고 언급하였다. 또한 송정화 · 권오남(2002)은 그래프 교육은 실생활의 친숙한 문맥과는 동떨어진 채 너무나도 형식적으로 이루어지고 있음을 지적하면서 그래프를 대수식에 연결시켜 엄밀하게 형식적 방법으로 접근하기보다는, 학생들의 일상생활과 관련된 친숙한 상황을 그래프로 개략적으로 그려보게 하거나, 이야기를 만들어 보거나 해석하게 하는 활동이 필요하다고 언급하였다. 따라서 교사의 그래프 해석 능력과 그래프를 실세계 상황과 연결시킬 수 있는 능력과 태도는 위의 문제점을 다소 해소할 수 있을 것이다. 둘째, 예비교사의 변수 선택 능력과 변수 사이의 관계성을 파악할 수 있는 능력을 보고자 하였다. Tall(1992)에 의하면, 함수의 가장 기본적인 개념은 변수 사이의 관계성이며, 만약 이것이 발달되지 않으면 방정식과 그래프와 같은 표현들은 그들의 의미를 상실하게 되고 서로를 분리된 것으로 인식한다는 것이다(김원경 · 김용대, 2002 재인용). 김남희(1997)는 학생들이 독립변수와 종속변수의 개념을 불완전하게 이해하고 있다

고 언급하였다. 따라서 학생들의 함수적 사고를 개발할 수 있는 교수학습 상황을 교사가 구성하기 위해서는 실세계의 역동적인 변화를 해석하고 예측하는데 필수적인 변수를 선택하고 변수들 간에 형성되고 있는 관계의 특성을 파악할 수 있는 능력이 요구된다.

3. 분석 방법

(1) 함수의 중요성에 대한 예비교사의 인식에 관한 분석 방법

함수의 중요성에 대한 예비 교사의 인식을 분석하기 위해서 수학 외적 실용성, 수학 내적 실용성, 흥미, 기타의 네 가지 범주를 사용하였다. 다음의 응답 내용들은 수학 외적 실용성 범주에 해당되는 예들이다:

· *함수는 실생활에서 이루어지는 경제나 사회의 분야를 분석하면서 얻어낼 수 있으며 예측의 가능성을 보여줄 수 있는 부분이다[예비교사 31].*

· *살아가면서 좀 더 논리적이기 위해[예비교사 35].*

· *네가 장사를 한다면 얼마를 투자해서 어느 정도 벌지를 예측해야 돈을 얼마만큼 투자할 것인지를 결정할 수 있겠지? 함수를 배우면 네가 할 장사에 관한 몇 개의 데이터를 가지고만 있다면 그러한 예측이 가능해지거든, 그런 걸 위해서 배우는 거야[예비교사 36].*

· *우리가 살아가고 있는 현실 세계의 모든 것들은 함수로 표현될 수 있다. 즉, 수학에서 배운 함수는 추상적인 것으로서 사회, 경제, 현상 모든 것들을 함수로 나타낸다면 앞으로의 많은 현상들을 추론할 수 있다[예비교사 41].*

· *일상생활 안에 함수관계는 찾아보면 정말 많습니다. 예를 들면, 투입과 산출의 과정이랄지 혹은 시간에 비례하여 변화하는 거리의 변동, 혹은 경제상황에서 인플레이션과 디플레이션 현상(물질이 많으면 가격이 내려가고, 물질이 적으면 가격이 오르는)등도 함수관계라 할 수 있습니다[예비교사 52].*

· *우리 일상생활에서 일어나고 있는 모든 일들을 잘 관찰해 보면 개별적으로 독립하여 일어나는 경우가 드물다는 것을 보게 됩니다. 즉, 두 가지 이상의 요인(변인)들로 서로에게 영향을 줌으로써 현상들이 일어나는데 이를 보다 효율적이고 객관적으로 관찰하기 위해 함수를 이용하면 됩니다. 더불어 함수개념을 이용하여 앞으로의 변화를 미리 예측까지 할 수가 있죠[예비교사 55].*

다음의 응답 내용들은 수학 내적 실용성 범주에 해당되는 예들이다:

· *함수는 수학을 배우는데 있어서 수학의 모든 분야를 설명하기 위해서 배운다고 하겠다[예비교사 1].*

· *미지수가 일정한 관계식에 대한 결과 값을 일일이 계산하지 않고 쉽게 하기 위해[예비교사 5].*

· *그래프의 표현을 알기 위해서이다. 방정식, 부등식 등의 풀이에서도 함수의 표현으로써 간단한 해법이 나올 수 있다[예비교사 48].*

· *함수는 점·선·면 등의 도형을 좌표평면 위에 그리는 방법을 표현하는 방법이기도 하고, 어떤 두 집합 사이의 대응관계를 나타내주기도 하므로 수학을 공부하는데 다양하게 쓰임을 알립니다[예비교사 49].*

다음의 응답은 흥미 범주에 해당되는 예이다:

· *재미있으니까![예비교사 53].*

기타는 무응답의 경우와 다음의 응답 내용을 포함 한다:

· *규칙을 배우기 위해서[예비교사 10].*

· *넌 학교 왜 다니냐고 한 번 물어보고 싶다[예비교사 11].*

· *이 문제에 대해서는 생각해 본적이 없다. 교과서에 나오니까 당연히...[예비교사 24].*

(2) 함수 관계 상황 표현 능력에 대한 분석방법

예비교사들의 함수 관계 상황 표현 능력을 조사하기 위해 *함수 관계 상황 표현, 함수 관계 변수 선택 여부, 올바른 함수적 해석*, 그리고 *기타* 범주로 분석하였다.

그래프 a로 표현될 수 있는 실세계 상황을 '지평선 위의 섬', '평면 위의 물방울', '바닥에 있는 고운 흙을 바람으로 날려 버릴 때'라고 적은 예비교사의 응답은 *기타* 범주에 해당한다. '물을 끓일 때 온도 증가량'이라고 응답한 예비교사는 *함수관계 상황 표현*의 범주에만 해당된다. 그 이유는 함수관계가 될 수 있는 실세계 상황은 제시하였지만 종속변수와 독립변수가 문장에 나타나 있지 않으며 또한 변수들 간에 형성되고 있는 관계에 대한 설명이 드러나 있지 않기 때문이다. '일정한 질량을 가진 물체의 운동 에너지의 증가에 따른 속력의 변화'라고 응답한 예비교사의 경우 *함수관계 상황 표현, 함수 관계 변수 선택, 올바른 함수적 해석*의 세 범주에 모두 해당한다. 그

이유는 함수 관계가 형성될 수 있는 상황 표현이 되어 있고, 함수 관계를 나타내는 독립변수(x축 : 운동에너지)와 종속변수(y축 : 속력)가 문장에 드러나 있으며 올바른 함수적 해석이 되어 있다. 여기서 올바른 함수적 해석이란 '일정한 질량을 가진 물체의 운동에너지의 증가에 따른 속력의 변화'를 나타내는 그래프 개형[3]이 그래프 a의 모양과 일치하는 것을 말한다.

각각의 그래프 문항에 대한 응답자의 평균 정답률을 조사하기 위해 100점 만점에 *함수관계 상황 표현*만 되어 있는 경우 33점이 주어지고, *함수관계 상황 표현*과 *함수관계 변수선택*이 되어 있는 경우 66점이 주어지고, *함수관계 상황 표현, 함수관계 변수선택, 그리고 올바른 함수적 해석*이 되어 있는 응답은 100점이 주어지게 된다. 기타와 무응답자의 경우 0점이 주어지게 된다.

예를 들어, 그래프 b상황에서 '밥상 위의 젓가락', '철로', '연인끼리 사랑하는 마음', '전동차', '전기줄'이라고 적은 응답은 기타범주에 해당된다. 이러한 응답을 한 예비교사의 경우 그래프 b상황에 대한 점수는 0점을 받게 된다. '속도가 일정하게 유지되고 있는 자동차'라고 응답한 예비교사의 경우 점수는 33점을 받게 된다. 그 이유는 함수관계가 형성될 수 있는 실세계 상황만을 제시하고 변수 선택이 되어 있지 않기 때문이다. '태양에서 매일 방출하는 빛에너지는 일정하다'라고 응답한 예비교사의 경우 *함수관계 상황 표현*과 *함수 관계 변수 선택*이 되어 있다고 분석하였다. 이 경우 점수는 66점을 받게 된다. 이 응답의 경우 *올바른 함수적 해석*을 하지 못한 경우이다. 그 이유는 매일 방출하는 빛에너지는 정확히 같은 게 아니라 일정한 기간동안 방출한 빛 에너지의 평균치가 비슷한 정도이다. 이 상황은 다음과 같은 그래프 개형을 갖게 된다(<그림 2> 참조). 따라서 수학적으로 정확히 빛 에너지는 일정하지 않으므로 그래프 b와 일치하지 않는다. '같은 속도로 움직이고 있는 시계 초침의 속도(시간대별)'이라고 적은 응답의 경우 점수는 100점을 받게 된다. 그 이유는 함수 관계가 형성될 수 있는 실세계 상황을 제시하였으며 변수(시간 vs. 시계 초침의 속도)가 나타나 있고, 그리고 이들 변수 간에 형성되고 있는 함수 관계는 상수함수 그래프와 일치한다.

<그림 2> 매일 방출하는 빛 에너지를 나타내는 그래프 개형.

검사문항에 대한 분석결과의 정확성을 높이기 위해 수학자, 물리학자, 화학자, 수학교육학자가 분석에 참여하였다. 먼저 개별적으로 분석한 후에 일치하지 않는 부분에 대해 토론을 거쳐 합의하였다.

III. 결과 및 분석

1. 함수의 중요성에 대한 예비 교사의 인식

<표 1> 함수의 중요성에 대한 범주별 예비교사 수

함수의 중요성	예비교사 수 n(%)
수학 외적 실용성	29(52.7)
수학 내적 실용성	8(14.5)
흥미	1(1.8)
수학 외적 · 내적 실용성	3(5.5)
기타	14(25.5)
합계	55(100.0)

함수의 중요성에 대하여 수학 외적 실용성과 수학 내적 실용성 모두를 제시한 예비교사는 3명(5.5%)에 불과하였다. 수학 외적 실용성에 답한 응답자의 수도 29명(52.7%)으로 절반 정도에 머물렀다. 그리고 25.5%의 예비교사가 함수의 중요성에 대해서 아무 대답을 하지 못하거나 '생각해 본적이 없다' 혹은 '교과서에 나오니까'로 응답하였다.

3) E(물체의 운동에너지) = $\frac{1}{2}$×m(질량)×v^2(속력의 제곱)으로 정의된다. 따라서 $v = \sqrt{2E/m}$ 이므로 운동에너지 E의 증가에 따른 속력 v의 변화를 나타내는 그래프의 개형은 그래프 a의 모양과 일치하게 된다.

2. 함수 관계 상황 표현 능력

<표 2> 함수 관계 상황 표현에 대한 범주별 응답자 수

응답자수 / 범주	a n (%)	b n (%)	c n (%)	d n (%)	e n (%)
함수관계 상황표현	9 (16.4)	10 (18.2)	7 (12.7)	7 (12.7)	16 (29.1)
함수관계 상황표현 &함수관계 변수선택	12 (21.8)	4 (7.3)	1 (1.8)	4 (7.3)	1 (1.8)
함수관계 상황표현, 함수관계 변수선택 & 올바른 함수적 해석	3 (5.5)	7 (12.7)	1 (1.8)	0 (0.0)	5 (9.1)
기타	9 (16.4)	14 (25.5)	4 (7.3)	7 (12.7)	4 (7.3)
무응답	22 (40.0)	20 (36.4)	42 (76.4)	37 (67.3)	29 (52.7)
합계	55 (100)	55 (100)	55 (100)	55 (100)	55 (100)

각각의 그래프에 적합한 실세계 상황을 제시할 수 있는 예비교사는 극소수였다. 그래프 b의 경우 7명(12.7%)만이 올바른 실세계 상황을 표현하여 가장 높은 비율을 보이고 있으며(<표 2> 참조) 그래프 d의 경우 0명(0.0%)으로 가장 낮은 비율을 보였다. 많은 수의 예비교사들이 무응답 하였다. 그래프 c의 경우 42명(76.4%)의 예비교사가, 그래프 d의 경우 37명(67.3%)이, 그래프 e의 경우에 29명(52.7%)이 무응답 하였다.

각 문항에 대한 응답자의 평균정답률은 그래프 c가 100점 만점에 7.2의 평균점으로 가장 낮았다(<표 3> 참조). 가장 높은 평균점을 보이는 그래프 a도 25.3점에 불과하다. 따라서 예비교사들에게 그래프를 해석하여 이에 적합한 실세계 상황을 만드는 일은 매우 어려운 과제임이 드러났다. 이는 과거 학생 시절에 경험한 수학 교수·학습에서의 그래프 지도의 문제점(송정화 · 권오남, 2002)과 함수 개념 지도의 문제점(김윤수· 정성현 · 강덕심, 1998; 김연식 · 박교식, 1992)으로 인한 예비교사의 함수 영역에 대한 수학적 지식의 부족함(김원경 · 김용대, 2002; Cha, 1999; Even, 1993)때문일 수도 있으나, 예비교사의 실세계 상황에 대한 과학적 지식의 부족으로 인하여 각각의 그래프에 적합한 올바른 함수적 상황을 제시하지 못한 것으로 보여 진다. 예를 들어, 그래프 d를 나타내는 함수관계의 실세계 상황으로 예비교사 12는 '섭씨온도와 화씨온도 사이의 관계'라고 기술하였다. 이는 섭씨온도와 화씨온도에 대한 과학적 지식[4]의 부족으로 인하여 그래프 d와 일치하지 않는 상황을 제시한 예이다.

<표 3> 함수 관계 상황 표현에 대한 평균 정답률

그래프	최소	최대	평균	표준편차
a	0.0	100.0	25.3	32.5
b	0.0	100.0	23.5	35.5
c	0.0	100.0	7.2	18.8
d	0.0	66.0	9.0	19.5
e	0.0	100.0	19.9	30.4

3. 사례 : 수미

수미는 25살이며 학부에서 수학을 전공하였다. 현재 사교육 기관에서 중등부 수학강사로 재직하면서 교사가 되기 위해 교육대학원에 재학 중이다. 차분하면서도 성실한 학습 태도를 갖추고 있다.

(1) 수미가 생각하는 함수의 중요성

수미는 일상생활에서 일어나는 많은 문제들을 해결하는 과정에서 우리가 예측하여 선택 및 결정을 하는 데 함수가 유용하게 사용되기 때문에 수학에서 다른 단원들보다 함수가 더 중요하다고 생각하고 있다. 검사도구에서 '함수를 왜 배우냐고 학생이 물으면 어떻게 대답하시겠습니까? 라는 질문에 다음과 같이 수미는 기술하였다:

여러 가지 실생활에서 함수를 통해 예측, 통제 등이 가능하므로 배워야 한다. 일상생활에서 두 가지 변수로 관련지어 지는 많은 문제를 해결하는데 함수가 유용하게 사용되어 질 수 있다.

면담 중에 수미는 수학에서 다른 단원들보다 함수단원의 중요성을 더 부각시키는 이유를 다음과 같이 부연설명하였다:

함수가 수학교육과정에서 나머지 내용들도 다 중요성을 가지고 있지만 함수에 중요성을 많이 부

4) C(섭씨온도) = 5/9 × F(화씨온도) - 32˚

각시키는 이유가 제가 생각했을 때는 우리가 앞으로 살아가면서 현재를 사는 게 아니라 내가 한 행동에 대해서 그런 것들에 어떤 규칙 같은 것을 찾아보면 그것을 예측도 할 수 있고 또 통제도 가능하다고 보기 때문에 함수를 배우는데, 예를 들자면 자동차를 대여하고자 할 때 빌리는 대여시간에 따라서 가격이 올라가는데 내가 적절한 수준에 있는 돈을 가지고서는 어느 정도 빌릴 수 있겠는가? 이런 예는 아주 단순한 예이긴 하지만, 실생활에서 일어나는 여러 가지 문제에 있어서 함수를 이용하면 인간생활에 어떤 예측을 하게 되면 자기 행동을 어떻게 해야 된다는 것이 가능하기 때문에 함수가 중요하고 또 학생들이 배워야 되는 영역이라고 생각합니다.

(2) 수미의 함수 관계 상황 표현 능력

수미의 전체적인 함수 관계 상황 표현 능력은 100점 만점에 46.2점으로 전체 55명의 응답자 중에서 5번째로 높은 평균 점수를 받았다(<표 4> 참조). 수미보다 평균 점수가 높은 4명의 응답자는 한 가지 혹은 두 가지 그래프 상황에 대해서 올바른 함수 관계 실세계 상황을 제시하였다. 그러나 수미는 각각의 그래프에 대하여 실세계와 관련된 상황을 표현하였으나 올바른 함수적 해석 단계에는 이르지 못하였다.

<표 4> 수미의 함수 관계 상황 표현의 정답률

	그래프					총점	평균
	a	b	c	d	e	총점	평균
예비교사 29	0	66	100	66	100	332	66.4
예비교사 12	100	100	0	33	0	233	46.6
예비교사 36	100	0	0	33	100	233	46.6
예비교사 47	100	33	66	0	33	232	46.4
예비교사 26 (수미)	66	33	33	66	33	231	46.2

그래프 a에서 수미는 x축을 시간으로 y축을 학습량이라고 놓고 다음과 같이 기술하였다:

학습동기를 가지고 처음 공부를 시작하면 학습량이 늘어나지만 공부할 수 있는 학습량은 어느 정도의 한계가 있다.

수미는 면담 중에 그래프 a는 무리함수이며 $y = \sqrt{x}$ 라고 언급하면서 다음과 같이 설명하였다:

x축의 값이 계속 늘어남에 따라서 처음에는 완전히 제로 상태에서 시작하지만 그래서 계속 늘어나긴 하지만 어떤 한계가 있어 가지고 그 한계보다는 작게 되는데, 이것도 실생활에서 찾아보면 많이 있을 것 같긴 한데, 시간을 x축에 두고 y를 학습량에 둔다든지 그렇게 보면은 시간이 계속 늘어남에 따라서 사람이 할 수 있는 학습량은 계속 늘어나긴 하지만 어느 수준에 가면은 일정한 수준에서는 더 이상 늘어날 수 없는 점근선 같은 게 생길 것 같아요.

수미는 일상의 생활, 즉 현재 자신과 가장 가까이 관련된 공부라는 소재를 사용해 시간과 학습량이라는 두 변수를 선택하였다. 그리고 두 변수의 관계를 과학적이고 이치에 맞는지를 다양한 관점에서 생각하려 하지 않고 일부의 조건(예: 학습동기)만을 제시하여 주어진 그래프와 일치하도록 연관시키려 하고 있다.

그래프 b에서 수미는 x축에 시간을 y축에 일정거리라고 두고 다음과 같이 기술하였다 :

시간이 지남에 따라 일정한 거리를 유지하면서 걸으면 (같은 간격을 유지하여) 일정 속도가 유지된다.

면담에서 수미는 다음과 같이 부연 설명하고 있다 :

이것은 등가속도 운동의 관점에서 보면 시간에 따라서 거리가 계속 똑같이 가면 기울기가 계속 같기 때문에 등가속도 운동이 될 것 같은데 그래서 일정한 속도가 유지되기 때문에 시간이 아무리 변해도 x축을 시간으로 두고 y축을 거리라고 두면 만약 똑같은 간격 보폭으로 계속 걷게 되면 그 기울기 자체가 일정하게 되는 x축에 평행한 이런 함수가 생길 것 같아요

수미는 과거 중등학교 과학시간에 배웠던 등가속도 운동, 시간, 속도, 거리에 대한 상황을 어렴풋이 기억하는 상태에서 변수를 선택하고 그 관계를 설명한다. 그러나

희미한 과학적 지식으로 인해 올바른 변수선택을 하지 못한다.

그래프 c에서 수미는 x축에 높이를 y축에 온도를 두고 다음과 같이 기술하였다 :

산으로 높이 올라갈수록 온도가 낮아진다.

면담에서 수미는 다음과 같이 부연 설명하였다 :

실생활에서 보면 x축을 높이라고 보고 y축을 온도라고 보면 높이가 계속 올라가면 온도가 낮아지는 것을 예를 들어서 반비례 관계로 설명을 할 수 있을 것 같아요. 아니면 쉽게 교과서 같은 데서 나오는 것을 봐도 넓이는 일정하게 되어 있는데 가로축을 x라고 두고 세로축을 y라고 두면은 넓이가 항상 12로 만약 고정되어 있다면 x가 늘어나면 그 만큼 y값이 줄어들어야 하기 때문에 반비례는 쉽게 가져올 수 있을 것 같아요.

수미는 그래프를 보고 먼저 두 변수 x, y 관계가 반비례 관계의 함수인 $y=1/x$를 생각했으며 반비례 관계의 상황 표현을 찾으려고 일단 노력하였다. 수미는 산을 높이 오를수록 온도가 낮아진다는 지식만을 가지고 두 변수를 선택하였다. 수미는 그래프에서 처음 시작 온도가 무한대의 온도에서 시작해서 높이가 무한대로 가도 거의 온도가 0도에 머물게 된다는 것을 주의 깊게 살피지 못하고 그래프의 두 변수가 반비례 관계라는 조건만을 생각하여 산에서의 높이와 온도에 대한 상황을 제시하게 된다. 그리고 수미는 교과서에서 쉽게 찾아볼 수 있는 예라고 언급하면서 넓이가 일정할 때, 세로의 길이와 가로의 길이에 대한 관계를 예로 제시하였다.

그래프 d에서 수미는 x축에 시간을 y축에 끓는점을 두고 다음과 같이 기술하였다 :

찬물을 끓이기 시작하면 처음에는 음의 값을 가진 물이 끓기 시작하면서 온도가 급격히 오르다가 일정한 온도를 유지한다.

면담에서 수미는 다음과 같이 부연 설명하고 있다 :

물 같은 것도 온도가 처음에 찬물이면 온도가 낮은데 시간이 지남에 따라서 만약에 물을 끓인다던가 그렇게 하게 되면 물의 온도가 급속도로 올라가다가 그래도 물의 끓는점이 100도가 그것을 더 이상은 넘어가지 않기 때문에 100도 선상에서 아마 점근선이 생기는 실생활 함수를 찾을 수 있을 것 같아요.

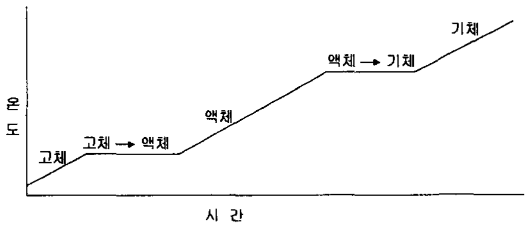
수미는 y축에 온도라는 변수 대신에 끓는점이라는 변수를 선택하였고 찬물이 영하의 온도를 가진다고 잘못 생각하고 있다[5]. 수미는 그래프에 적합한 함수 관계 상황을 만드는 과정에서 본인의 불완전한 과학적 지식을 의식하지 못한 채 즉흥적으로 사용하는 경향을 보이고 있다.

그래프 e에 적합한 함수 관계 실세계 상황으로 형광등의 깜박거림이나 컴퓨터 모니터의 움직임을 측정한다면 일정한 간격을 두고 반복하는 주기함수 형태가 나타날 것이라고 기술하였다. 면담에서 수미는 다음과 같이 부연 설명하고 있다 :

아마 대표적인 주기함수가 될 수 있을 것 같은데 그 형광등 같은 경우에 깜박거림이 우리 눈에는 인식이 안되지만 컴퓨터 모니터 움직임 이라던지 TV 라던지 이런 게 전부 다 주기적으로 계속 일정한 간격으로 반복되는 형태가 나타나는 것으로 알고 있거든요. 그래서 주기함수가 아마 예를 찾기가 쉬울 것 같아요. 그래서 그 교과과정에서도 보면 함수 중에서 주기 함수를 따로 떼어 가지고 가르치는 게 아마 나름대로 중요한 부분이라서 그런 것 같아요.

---

5) 물을 끓일 때 물의 온도는 일정한 속도로 증가한다. 물의 상태변화(고체→액체, 액체→기체)가 일어나는 동안 가열하여도 온도가 변하지 않는데 상태가 완전히 변화될 때까지 일정하게 머문다. 상태가 변하는 동안 물질에 가해진 모든 열을 잠열 또는 숨겨진 열이라고 한다. 즉 온도가 변화하는 대신에 물질의 상태가 달라지는 것이다.



수미는 주어진 그래프가 주기함수라고 생각하고 주위에서 들어보았던 형광등의 깜박거림, 컴퓨터 · TV 모니터의 움직임에 대한 현상을 도입하였으나 그 현상들에 대한 지식의 부족으로 구체적인 변수 선택을 한 상황 표현까지는 도달하지 못했다. 수미는 교과과정에서 주기함수를 중요하게 다루는 이유를 그에 대한 예가 실생활에 많이 존재하기 때문으로 보았다. 그리고 자신이 스스로 주기함수의 중요성을 느낀 것이 아니라 교과과정에서 주기함수를 따로 배우는 것으로 보아서 중요할 것이라고 생각하고 있다.

수미는 그래프를 실세계 상황과 연결시키는 과정에서 많은 예가 존재한다고 종종 언급하였으나 제한된 소재만을 사용하였다. 현재 자신과 가장 가까이 관련된 일상의 소재, 과거 중등학교 과학시간에 배웠던 소재, 수학 교과서에서 많이 보아왔던 소재, 주위에서 들어보았던 소재를 택해 변수들 간의 관계를 과학적이고 이치에 맞는지를 다양한 관점에서 생각하지 못하고 일부의 조건만을 생각하여 주어진 그래프와 일치하도록 연관시키려는 성향을 보이고 있다.

IV. 결론 및 제언

학생들의 함수적 사고의 함양을 위한 교수학습 상황을 구성할 수 있기 위해서 교사는 (1) 학교 수학에서 함수를 가르치고 배우는 이유를 알아야 하고 (2) 함수 관계를 나타내는 다양한 실세계 상황을 구성할 수 있어야 하고 (3) 이를 표상화하고 해석할 수 있어야 한다. 본 고에서는 함수의 중요성에 대한 예비교사의 인식과 함수 관계 상황 표현 능력을 조사하였다.

함수의 중요성에 대하여 수학 외적 실용성과 수학 내적 실용성 모두를 제시한 예비교사는 3명(5.5%)에 불과하였다. 수학 외적 실용성에 답한 응답자의 수도 29명(52.7%)으로 절반 정도에 머물렀다. 그리고 25.5%의 예비교사가 함수의 중요성에 대해서 아무 대답을 하지 못하거나 '생각해 본적이 없다' 혹은 '교과서에 나오니까'로 응답하였다. Grossman(1989)의 연구에 의하면 학습 단원이나 학습 주제를 배우고 가르치는 이유에 대해 교사가 어떤 생각을 가지고 있는가에 따라서 교실에서 이루어지는 수업 내용이 달라진다고 하였다. 즉, 교사가 선택하게 되는 교과서, 교수-학습자료, 학습목표, 과제내용, 학습평가 등의 선택에 직접적인 영향을 미친다는 것이다. 따라서 예비교사는 타교과 내용과 학생의 일상생활에서 함수가 어떻게 사용되고 있는지를 알아야 하고 함수 단원이 다른 수학 단원과 어떻게 연결되어 있으며 함수를 공부함으로써 다른 수학적 지식을 이해하는데 있어서 수학적 사고력을 함양하는데 있어서 어떤 유익점이 있는지를 알아야 한다.

모든 예비교사들이 함수 관계 상황 표현 능력의 부족함을 보이고 있다. 첫째, 변수들 간의 관계를 과학적이고 이치에 맞는지를 다양한 관점에서 생각하려 하지 않고 일부의 조건만을 생각하여 주어진 그래프와 일치하도록 연관시키려는 성향을 보이고 있다. 따라서 예비교사는 실세계 상황을 분석하는 데 있어 변수들 간의 관계를 다양한 관점에서 해석하고 중요한 변수를 선택할 수 있는 연습을 해야 한다.

둘째, 실세계와 관련된 상황을 제시하는데 있어서 다양성이 결여되어 있다. 예를 들어 중고등학교 때 많이 다루었던 시간, 속도, 거리나 자유낙하 문제의 예에 많이 치중되어 있었다. 따라서 다양한 예를 접할 수 있는 기회제공의 교육이 필요하다.

셋째, 실세계 상황을 도입해서 함수를 설명하려면 그러한 상황에 대한 지식이 있어야 하는데 지식의 부족으로 인해 변수 선택이 바르지 못하고 변수들 간에 형성되고 있는 관계의 해석이 바르지 못하였다. 현상에 대한 과학적 지식의 부족으로 대략적으로 생각한 예를 학생들에게 제시하게 될 경우 자칫 학생들에게 오개념을 형성하게 할 수도 있다. 따라서 예비교사는 그들이 어렴풋이 알고 있는 현상들에 대해서 분명한 이해와 지식을 가질 수 있는 기회를 가져야 한다.

참 고 문 헌

김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김원경 · 김용대 (2002). 교사의 수학적 지식에 대한 연구 : 함수개념과 관련하여, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, pp.101-107, 서울: 한국수학교육학회.

김윤수 · 정성현 · 강덕심 (1998). 학교수학에서의 함수 개

념 지도 방법에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 8(1), pp.381-403, 서울: 대한수학교육학회.

김연식 · 박교식 (1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근, 대한수학교육학회 논문집 2(1), pp.1-15, 서울: 대한수학교육학회.

송정화 · 권오남 (2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안, 대한수학교육학회지 학교수학 4(2), pp.161-191, 서울: 대한수학교육학회.

송순희 · 오정현 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(1), pp.11-22, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이종희 · 김부미 (2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과분석, 대한수학교육학회지 학교수학 5(1), pp. 115-133.

조원주 · 권오남 (2002). 중학교 함수영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가기준안 개발, 한국수학교육학회지 수학교육논문집 14, pp. 349-370.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽 (2002). 수학교육학신론, 문음사.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division, *Journal for Research in Mathematics Education* 21, pp.132-144.

Breslich, E. R. (1928). Developing functional thinking in secondary school mathematics, *The Third Yearbook* pp.42-56, National Council of Teachers of Mathematics. New York: Teachers College, Columbia University.

Breslich, E. R. (1932). Measuring the development of functional thinking in algebra. In W. D. Reeve and V. Sanford (Eds.), *The Teaching of Algebra* pp.93-118, National Council of Teachers of Mathematics, New York: Teachers College, Columbia University.

Brophy, J. (Ed.). (1991). *Advances in research on teaching: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice* 2, Greenwich, CT: JAI.

Cha, I. S. (1999). *Prospective secondary mathematics teachers' conceptions of function: mathematical and pedagogical understandings. Unpublished doctoral dissertation.* University of Michigan. Ann Arbor, MI. USA.

Day, R. P. (1995). Using functions to make mathematical connections. In P. A. House and A. F. Coxford (Eds.). *Connecting mathematics across the curriculum* pp.54-64, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: Author.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept, *Journal for Research in Mathematics Education* 24(2), pp.94-116.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Grossman, P. L. (1989). A study in contrast: sources of pedagogical content knowledge for secondary English, *Journal of Teacher Education* 40(5), pp.24-31.

Hamley, H. R. (1934). *Functional Thinking,* National Council of Teachers of Mathematics, NY: Teachers College, Columbia University.

Hight, D. W. (1968). Functions: dependent variables to fickle pickers, *Mathematics Teache,* 61(6), pp.575-579.

Lampert, M. (1991). Connecting mathematical teaching and learning. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* pp.121-152, Albany, NY : SUNY Press.

Lennes, N. J. (1932). The function concept in elementary algebra. In W. D. Reeve and V. Sanford (Eds.), *The Teaching of Algebra* pp.52-73, National Council of Teachers of Mathematics. NY: Teachers

College, Columbia University.

Leinhardt, G. & Smith, D. (1985). Expertise in mathematics : Subject matter knowledge, *Journal of Educational Psychology* 77, pp.247-271.

Lloyd, G. M. (1996). *Transforming instruction about functions: one veteran teachers' experience with an innovative secondary mathematics curriculum.* Unpublished doctoral dissertation. University of Michigan, Ann Arbor, MI. USA.

Lloyd & Wilson (1998). Supporting Innovation : The Impact of a Teachers' Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform Curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education* **29(3)**, pp.248-274.

Marks, R. (1987). *Those who appreciate: A case study of Joe, a beginning mathematics teacher.* Palo Alto, CA: Stanford University, School of Education.

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* **11**, pp.489-492.

Markovits, Z.; Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics* **6(2)**, pp.18-24.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia: NCTM.

Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes **25**, pp.215-232, Mathematical Association of America.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15(2)**, pp.4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform, *Harvard Educational Review* **57(1)**, pp.1-22.

Steinberg, R.; Marks, R. & Haymore, J. (1985). *Teachers' knowledge and structuring in mathematics*, Palo Alto, CA: Stanford University, School of Education.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice, *Educational Studies in Mathematics* **15**, pp. 105-127.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions : A synthesis of research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.127-146, New York: Macmillan.

Thompson, A. G.; Philipp, R. A.; Thompson, P. W. & Boyd, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In A. Coxford (Ed.), *Professional Development for Teachers of Mathematics*, 1994 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 79-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: the impact of a course integrating mathematical content and pedagogy, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(4)**, pp.346-370.

Wilson, M. R. & Shealy, B. E. (1995). Experiencing functional relationships with a viewing tube. In P. A. House & A. Coxford (Eds.), *Connecting Mathematics Curriculum*, 1995 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 219-224). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Preservice Secondary Mathematics Teachers' Situational Understanding of Functional Relationship

Cha, Insook

Department of Mathematics, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul, Korea
E-mail : Chais314@hanyang.ac.kr

Han, Jeongsoon

Department of Applied Mathematics, Hanyang University, 1271 Sa-1 dong, Sangnok-gu, Ansan, Kyeonggi-do, Korea
E-mail : Han@hanyang.ac.kr

This study investigates 55 preservice secondary mathematics teachers' situational understanding of functional relationship. Functional thinking is fundamental and useful because it develops students' quantitative thinking about the world and analytical thinking about complex situations through examination of the relations between interdependent factors. Functional thinking is indispensable for understanding natural phenomena, for investigation by science, and for the technological inventions in engineering and navigation. Therefore, it goes without saying that teachers should be able to represent and communicate about various functional situations in the course of teaching and learning functional relationships to develop students' functional thinking. The result of this study illustrates that many preservice teachers were not able to appropriately represent and communicate about various functional situations. Additionally, it shows that most preservice teachers have limited understanding of the value of teaching function.

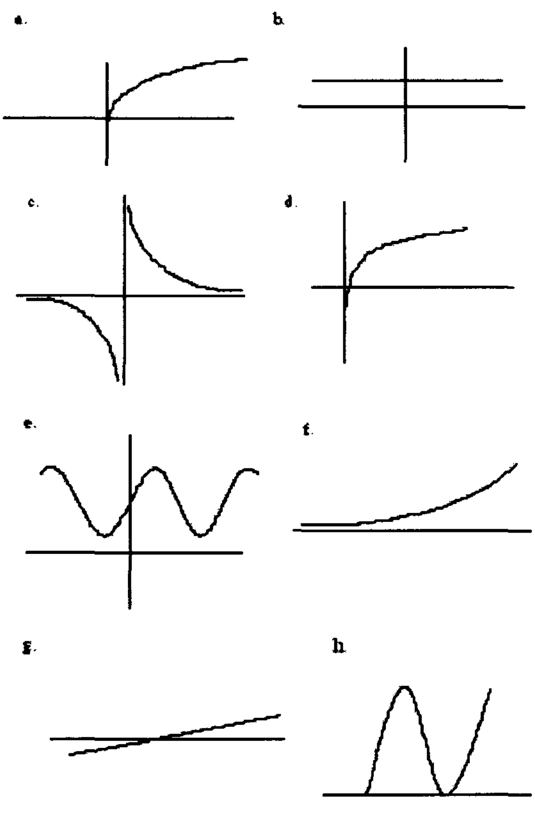
* ZDM classification : B59
* 2000 Mathematics Classification : 97B50
* key words : Preservice teacher education, Teachers' knowledge, Functional thinking.

<부록> 검 사 도 구

1. 함수가 무엇이냐고 학생이 물으면 어떻게 대답하시겠습니까?

2. 함수를 왜 배우냐고 학생이 물으면 어떻게 대답하시겠습니까?

3. 다음은 함수관계를 나타내는 그래프입니다. 다음의 그래프로 표현될 수 있는 실세계 상황을 만들어 보십시오.



4. 다음의 두 대화를 읽고 각각의 대화 내용 중에 함수 관계를 찾아 그 관계를 나타내는 그래프를 그려보십시오.

[대화 1]

장동건은 정기 검진을 위해 병원을 찾았습니다. 최근에 들어 잦은 회식으로 그의 콜레스테롤 수치가 높아갔습니다. 다음은 의사와의 대화 내용입니다.

장동건 : 콜레스테롤 수치의 위험성에 대해서 많이 들어왔습니다. 지난번에 제 수치가 250이었는데 높은 수치라고 들었습니다. 콜레스테롤 수치가 어느 정도로 심장병과 관련되어 있나요?

의사 : 일반적으로 수치가 낮을수록 좋겠지요. 콜레스테롤 수치가 200보다 낮아야 안심할 수 있습니다.

장동건 : 그러면 제 수치가 너무 높군요. 이거 정말 걱정되는데요.

의사 : 심장병은 다른 요인들도 있지만 가장 큰 요인은 콜레스테롤 수치입니다. 콜레스테롤의 안전 수치는 없습니다만, 콜레스테롤 수치가 높을수록 심장 마비 발병률이 높습니다. 그래서 장동건씨 콜레스테롤 수치는 주의를 기울여야 하겠습니다.

[대화 2]

경제학 수업시간에 광고비용이 판매량에 미치는 영향에 대해서 학생들이 토론하고 있습니다.

미숙 : 광고비에 투자를 많이 할수록 판매량도 그 만큼 늘어나는 것은 분명하다고 봐.

숙희 : 글쎄, 어느 지점까지는 그럴 수 있다고 봐. 하지만 회사가 광고에 돈을 계속 쓴다고 해서 계속적으로 판매량이 늘어날 수는 없다고 생각해. 광고비가 더 이상 판매량에 영향을 줄 수 없는 어떤 지점이 있을 것 같아.

동훈 : 나는 그러한 한계점이 있다고 생각하지 않아. 광고비에 돈을 쓰면 쓸수록 판매량은 계속 늘어난다고 봐, 단지 판매량 증가 속도가 조금 느릴 수는 있겠지.

정훈 : 나는 광고비와 판매량은 전혀 관계가 없다고 본다. 회사는 상품에 대해 사람들이 알 수 있도록 약간의 광고는 해야 한다고 봐, 하지만 사람들이 그 상품을 좋아하느냐 혹은 필요로 하느냐는 또 다른 문제지. 만약 사람들이 그 상품을 좋아한다면 광고비에 돈을 많이 투자하던 투자하지 않던 판매량에 영향을 미치지는 못한다고 봐. 또 만약에 사람들이 그 상품을 싫어한다면 광고비에 돈을 아무리 많이 투자해도 판매량을 늘릴 수는 없을 거야.