韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004. 5. 제 43권, 제 2호, 177-186.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2004, Vol. 43, No. 2, 177-186.

DGS 동적 기하에서의 새로운 함수적 관점의 정의

김 화 경 (서울대학교 대학원)
조 한 혁 (서울대학교)

1. 도 입

정보화 사회의 도래와 함께 컴퓨터 등의 기술공학적 도구를 수학교육에 도입하려는 여러 노력이 있어왔다. 대체로 기존에는 수학교육용 멀티미디어 자료를 만들고 보여주는 도구로 컴퓨터를 사용하였으나, 최근에는 GSP, Cabri, JavaMAL 등의 동적 기하 시스템(DGS: Dynamic Geometry System)의 등장과 함께 컴퓨터를 통해 구성주의 수학교육관을 실현시키려는 시도가 널리 진행되고 있다. 예를 들어, King et al.(1997)은 DGS의 강력한 힘을 보여주며, 류희찬외(2000)는 DGS를 이용한 기하 학습내용 구성에 관한 연구를 진행하였고, 황우형외(2002)는 해석 기하에서 탐구형 소프트웨어(DGS)에 대한 연구를 진행하였다. 이들 연구의 특징은 DGS의 끌기(drag)라는 강력한 기능을 이용하여 다양한 문제 상황과 예를 제시해 주고, 이를 통하여 학생의 문제 해결 및 개념 형성을 유도한다는 것이다.

이에 반하여 DGS를 통한 몇몇 수학교육 연구는 학습자의 학습보다는 교사의 수업을 위해 DGS 환경을 이용하며 DGS 소프트웨어 기능을 무비판적으로 수용하고 있다. 그러나 학생 스스로의 구성을 강조하는 입장에서 도형을 구성, 탐구하는 학습을 유도하기 위해 DGS의 설계까지도 수학교육의 입장에서 연구되어야 한다는 주장도 있다. 컴퓨터 환경의 설계는 수학교육적 고려와 병행하여 수학적 구조를 가지는 설계가 이루어져야 한다는 주장이다. 예를 들어, Sherin(2002)은 LOGO를 비롯한 마이크로월드(MicroWorld)에서 강조하는 원시적 명령어를 바탕으로 하는 만들어보기(to make) 철학이 기존의 DGS에서도 필요하다고 주장한다. 이는 fd와 rt 등의 원시적 명령어로부터 대상을 만들어가는 LOGO 마이크로월드의 철학에 DGS의 장점인 동적 기능을 첨가하려는 시도에서 비롯되었다. 위의 시도는 학생의 기하적인 활동의 바탕이 되는 생성자를 찾고, 생성자로부터 도형을 구성하고, 또한 함수적 언어를 사용하여 절차를 간소화하는 방식이다. 이는 활동적 표현에서 상징적 표현으로 나아가는 브루너의 EIS 이론에 근거하여 교수(instruction)보다는 구성(construction)을 강조하려는 마이크로월드의 절차적 특성을 DGS의 근간으로 삼으려는 시도로 의미가 있다. 인공지능(AI) 연구에서 시작한 수학적 마이크로월드는 실세계의 단순화된 모형으로, 학생들은 자기 수준에 맞춰 대상을 만들고 조작하고 탐구하여 그들에게 의미 있는 개념과 원리들을 이끌어내게 된다. 수학적 마이크로월드가 제공하는 교수-학습 환경에는 수학적 대상물들 사이에 수학적 조작의 법칙이 있고, 여기서 학생 스스로가 조작과 반영적 추상화를 통해 수학을 구성하도록 하는 것이 마이크로월드의 핵심이다(조한혁, 2003; Abelson et al., 1980; Edwards, 1995; Noss et al., 1996; Willensky, 1993). 자바말(JavaMAL) 마이크로월드는 위의 이론을 기반으로 LOGO 마이크로월드에 DGS의 동적 기능을 더해 설계되었다.

이 논문에서는 현대수학이 집합과 함수 등의 기본개념을 바탕으로 새롭게 표현되어 발전하였듯이, 학교기하의 도형도 DGS 환경의 함수적 표현 양식을 통해 새롭게 구성될 가능성을 보이고자 한다. 구체적으로 점과 점의 사이의 관계를 통해 JavaMAL 마이크로월드에서 사용할 수 있는 원시 생성자를 찾아보고, 이를 이용하여 학생들이 수업시간에 도형을 만들고, 정의하고 기존 지식과 연결하는 일련의 과정에 대하여 고찰해 보도록 하

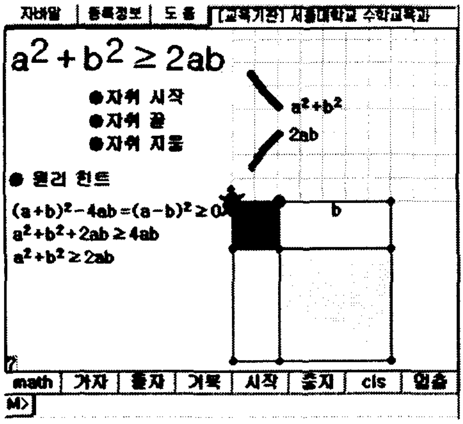
* 2003년 6월 투고, 2004년 4월 심사 완료.
* ZDM분류 : C74
* MSC2000분류 : 97U80
* 주제어 : 평가, 수학적 연계성, 개별화 학습, 지식구조, 수학의 이해.

겠다. 이 논문은 새로운 DGS 환경에 맞는 새로운 정의의 필요성과 학생 스스로 정의를 만들어갈 기회 제공을 주장한다.

2. 수학 명제와 도형에 대한 함수적 이해

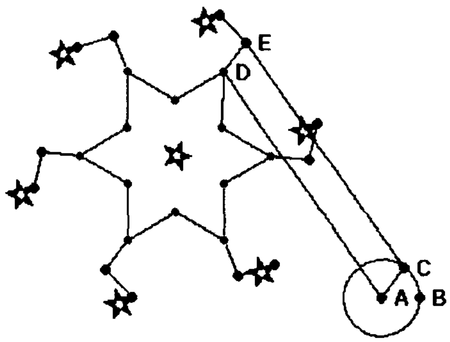
'자연수 n 에 대해, $1+\cdots+n=n(n+1)/2$'라는 명제는 변수를 n으로 갖는 명제함수 $P(n)$이며, '삼각형의 내각의 합은 180도이다'라는 명제나 '$a^2+b^2\geq 2ab$'라는 부등식도 모든 삼각형과 수에서 성립하는 넓은 의미의 명제함수이다. 학교수학에서 다루는 많은 문제나 정리들은 정적(static)으로 표현되지만, 이와 같이 동적(dynamic)인 변수를 갖는 함수로 재해석되어 제시될 수 있다.

이를 바탕으로 Cuoco et al.(1998)은 기하학적 탐구 명제를 도형공간에서 정의되는 함수로 이해하였다. 더 나아가 Parzysz(1988)는 도형공간에서 각각의 그림은 하나의 점으로 간주되며, 도형 공간은 합동 등의 어떤 성질을 공유하는 점들이 동일시 될 수 있는 위상적 공간이라 말하였다. 이러한 입장에서 학교 대수의 수와 식 그리고 기하 도형을 점으로 간주하여 동적인 DGS 환경에 나타낼 수 있다. 예를 들어, <그림 1>은 부등식 $a^2+b^2\geq 2ab$를 DGS 환경에서 대수와 기하적 표현으로 구현한 것이다.



<그림 1> $a^2+b^2\geq 2ab$

학생들은 마우스로 오른쪽 아래 부분의 큰 점을 끌면서 a^2에 대응되는 정사각형과 b^2에 대응되는 정사각형의 변화에 따른 관계를 함수의 그래프로 관찰할 수 있다. 여기서 끌게 되는 큰 점은 a^2에 대응되는 정사각형의 꼭지점이며, 또한 넓은 의미에서 b^2에 대응되는 정사각형의 꼭지점으로 볼 수 있다. 이제 <그림 2>와 같은 DGS 환경에서의 애니메이션 화면을 생각해 보자. <그림 2>에서 점 C는 중심이 A이고 반지름이 선분 AB의 길이인 원 위에서만 존재할 수 있는 점이고, 점 E는 점 A, C, D 가 주어졌을 때 도형 ACED가 평행사변형이 되는 위치에만 존재하는 점이다.



<그림 2>

이 때, 마우스로 점 C를 끈다면, 도형 ACED가 평행사변형이 되도록 선분 DE가 선분 AC와 평행을 유지하며 동시에 움직이게 된다. 즉, 평행사변형 ACED를 독립변수 A, C, D에 대응하는 종속변수 E의 함수관계로 파악하여 함수로 이해할 때, 위의 애니메이션을 초급기하를 이용하여 만들 수 있다. 이와 같이 DGS 환경에서는 독립점을 가지고 종속점이 들어 있는 도형을 구성하여 보는 새로운 이해의 방식이 필요하게 된다.

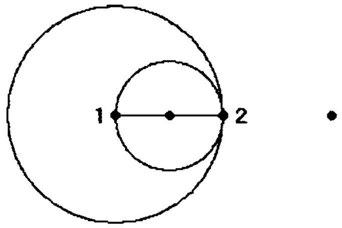
학교수학의 명제와 문제 등이 역동적인 함수 관점에서 재해석되어 DGS 환경에서 탐구될 때, 문제에 대한 시각적인 이해뿐만 아니라 동적인 탐구를 통한 해결의 실마리를 찾거나 해를 추측하도록 유도할 수 있을 것이다. 예를 들어, '만약 이곳을 변화시키면 어떻게 될까?'라는 What if? 라는 질문을 통해 탐구활동을 계속적으로 자극할 수 있는데, Goldenberg et al.(1998)에 의하면 이러한 재해석은 마이크로월드를 통한 수학적 탐구활동의 필수요건이 된다.

3. 점과 점들의 관계

DGS 환경의 도형에서 중요한 것은 점들의 연결성과 함수적 관계성이다. 단순히 연결된 점들이 이루는 길이와 각도 그리고 비율은 점을 마우스로 끌면 변하지만, 함수적 관계로 결합된 상태에서 독립점을 마우스로 끌면 종속되는 점들도 같이 움직이는 관계 보존성이 있다. 즉, DGS환경에서 가장 기본이 되는 것은 점이며, 점들의 적절한 함수적 관계를 통해 선분과 수직이등분선, 대칭점 등의 여러 기학적 관계는 나타나게 된다. 우리는 자유로이 움직이는 점을 독립점, 독립점들에 의하여 규정되는 점을 종속점이라 하겠다.

이제 독립점들의 개수에 따른 함수적 관계를 알아보도록 하자. 우선 도형을 구성하는 처음 단계인 점이 하나만 있는 경우를 생각하자. 위치가 주어져 있지만 이 위치는 끌기를 통하여 언제든 다른 곳으로 움직일 수 있으므로 고정적인 것이 아니다. 우선 이 단계에서 마우스 끌기는 친숙한 것이 되어야 하며, 언제나 사용가능한 것으로 자동화되어야 한다. 너무 빠른 끌기는 그 의미를 알기도 전에 스쳐 지나가므로 의미가 없는 것과 같고, 제대로 끌기를 할 수 없다면 DGS를 이용할 수 없다. Healy et al.(1994)은 명령어와 친숙해지는 동시에 동적 기하의 장점을 제대로 보여줄 수 있는 좋은 예를 보여준다. 끌기를 통하여 흐트러지지 않는 그림을 직접 구성해 보고 끌기 해보는 과정이 동적 기하의 특징을 잘 이해시켜 줄 수 있다는 것이다.

이제 다른 점 하나가 더해져서 점이 2개가 되는 경우를 생각해 보자. 이제 이 두 점은 서로 관계를 맺을 것이며, 이 두 점을 이용하여 다른 점을 생성하게 된다. 처음 두 점은 독립점으로 어느 곳에든 위치할 수 있지만, 이 두 점을 이용하여 만들어지는 대상들은 이 두 점에 대한 종속점이다. 먼저 두 개의 점들을 관계 지을 수 있는 타당한 방법으로 선(edge)과 원(circle)을 생각해 볼 수 있을 것이다. 선은 두 점 사이의 연결 상태를 관계로 나타낸 것이고, 원은 기존의 기하 환경의 컴퍼스에 해당하는 것으로, 두 점으로 만들어질 수 있는 원은 다시 두 점 사이의 선분을 지름과 반지름으로 하는 두 가지 경우로 나눌 수 있다. 선과 원은 점의 위치 변화에 따라 모양과 길이, 넓이가 바뀌는 점들의 관계라는 것을 주목해야한다. 또 점 두 개를 가지고 다른 점을 만들 수 있는 방법을 생각해 보자. JavaMAL의 DGS 환경은 종이 접기(Paper folding)를 활동(Hands on) 모델로 하고 있으므로 두 점을 이용하여 만들 수 있는 점들은, 한 점을 다른 점에 대하여 대칭시켜 만들어지는 (점)대칭점과 두 점의 중점이다. <그림 3>은 점 1[1]과 점 2를 이용하여 생성되는 선, 원, 점들을 나타낸 것이다. 선과 원이라는 두 점 사이의 함수적 관계는 그 위에 위치하여 그 관계를 보여주는 점(선위점, 원위점)으로 대표될 수 있다.

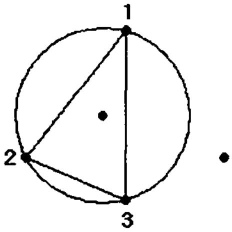


<그림 3> 두 점에 종속된 관계와 종속점

점이 n개인 경우로 확장을 생각해 볼 수 있지만, 여기서는 독립점이 세 개인 경우 몇 가지만을 생성자로 언급하려 한다. 이유는 최소의 생성자를 가지고 그로부터 생성되는 가장 풍부한 환경을 생각하는 것이 목표이기 때문이다. 우선 점 세 개가 결정하는 도형은 삼각형, 이차곡선을 생각해 볼 수 있다. 세 점을 이용하여 하나의 종속점을 만드는 방법으로 점 두 개를 이용하여 선을 만들고 그 선에 대한 대칭으로 선대칭점을 생각할 수 있다. 물론 다른 것들을 더 만들 수 있지만 그들 중 몇몇은 점 2개인 경우를 두 번 시행하는 것과 같은 결과라는 사실에 유의하여야 한다. 예를 들어 삼각형의 중선은 두 점의 중점을 잡고, 중점과 나머지 한 점을 선으로 연결하는 두 가지 단계로 나누어 생각할 수 있다. <그림 4>는 점 1, 점 2 와 점 3에 의해 결정되는 원과 점 2의 선 12에 대한 대칭점을 나타내고 있다.

---

1) JavaMAL DGS에서는 점의 이름을 숫자로 나타낸다. 이는 특정한 목적(for, next)을 위해 디자인된 것이다.



<그림 4> 세 점에 종속된 관계와 종속점

이제 지금까지 살펴본 점과 점들의 관계를 정리하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 점의 개수에 따른 생성 점

점의개수	생성 도형	생성 점
1개	점	점
2개	선, 원	점대칭점, 중점 선위점, 원위점
3개	삼각형, 이차곡선(원)	선대칭점 이차곡선 위의 점(원위점)

<표 1>에 제시된 종속점들을 이용하여 도형을 구성적으로 정의하고 분류하려 한다. 기존 학교수학의 도형의 정의는 주어진 도형의 성질에 대한 기술적 정의였으나 DGS 환경에서 종속점을 부여하는 방식, 도형을 구성하는 방식에 따른 정의, 즉 구성적 정의가 강조되어야 하기 때문이다.

4. 도형의 정의

조영미(2001)와 Vinner(1991)는 학교수학에서 정의가 차지하는 역할에 대하여 논의한 바 있다. 이러한 정의의 역할과 함께 DGS에서 도형의 구성적 정의를 생각할 때 고려해야 할 몇 가지 점이 있다. 교과서에 제시된 기술적 정의에 의한 작도가 아니라 그 도형의 성질을 이용하여 작도하여 발생하는 논리적인 문제이다. 예를 들어 평행사변형을 세 점이 주어진 경우, 두 점으로 대각선의 중점을 구하고 그 중점에 대하여 나머지 한점을 대칭시켜 마지막 점을 구하는 중점대칭도형으로 도입하는 것은 평행사변형의 정의와 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다는 성질 중 후자를 이용한 작도이다. 평행사변형은 두 대각선이 서로 이등분 하지만 두 대각선이 서로 이등분하는 도형은 모두 평행사변형인가? 이러한 논리의 문제를 피하기 위해서는 엄격한 연역적 도입과 증명이 필요하다. 하지만 현실적으로 그러한 일들은 가능하지 않을 것이다.

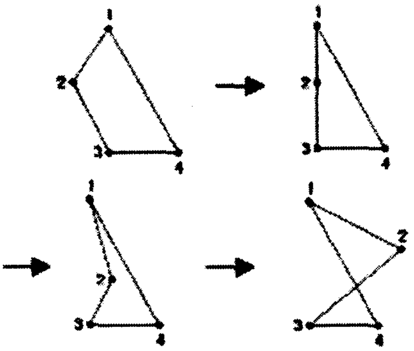
이러한 논리적 문제점을 피하는 방법으로 기존의 DGS에서는 메뉴방식으로 도형을 직접 그려준다. 그러나 이러한 메뉴방식은 정의가 연역의 사슬이어야 한다는 Freudenthal(1973)의 주장에 비추어 보면 적절치 않아 보인다. 실제 Freudenthal의 교육이념인 RME의 교육철학을 바탕으로 만들어진 MiC(Mathematics in Context)의 교과서에서도 기존 도형에 대한 정의를 새로운 방식으로 대신함을 알 수 있다.

우리는 <표 1>에 제시된 기본적인 생성자를 가지고 도형에 대한 정의를 구성적 방식으로 도입하려고 한다. Freudenthal(1973)에 따르면, 수학적 추론, 특히 논증의 의의와 방법을 이해하도록 정의의 의미를 이해시키는 데는, 정의에 대한 정의로는 부족하며, 학습자가 스스로 정의를 만들어 보는 경험을 제공할 필요가 있다. 이러한 목적으로 Fou-Lai Lin. et al.(2002)와 Mariotti et al.(1997)은 학교수학에서 도형의 정의하기에 대한 연구를 진행하였다. Jones(2000)는 연역의 기초로 사각형의 분류를 다루었고, DGS와 관련하여 De Villier(1998)는 이러한 연구들의 연장선에서 DGS를 이용하여 정의하기 수업을 시도하는 연구를 하였다.

이 논문에서는 앞 절에 제시한 생성자를 통하여 도형을 직접 구성하는 과정을 통하여 스스로 점의 종속성을 부여하는 삼각형, 사각형의 구성적 정의를 살펴본다. 특별히 학교수학의 교육과정과 일정한 연관성을 유지하기 위하여 점이 세 개인 경우의 생성자를 외접원과 선대칭에 국한하여 제시할 것이다. 다른 경우는 새로운 탐구문제로 활용될 수 있을 것이다.

먼저 DGS에서의 다각형의 정의에 대한 혼란을 살펴보도록 하자. Goldenberg(1998)과 De Villier(1998)는 DGS에서 기존 수학 지식과 상충되는 도형의 출현을 *'monster'* 라고 규정하고 DGS에서 도형의 정의는 새로운 시각으로 접근이 이루어져야 한다고 주장한 바 있다. 예를 들어 <그림 5>는 사각형으로 보이는 그림에서 점

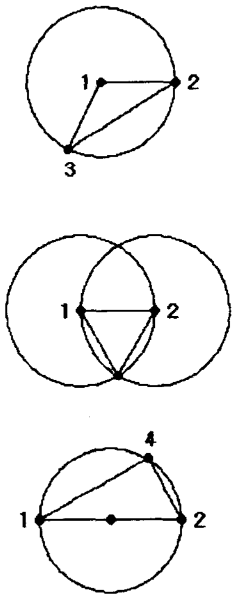
2를 점차적으로 끌어 새로운 도형, 즉 monster가 생성되는 예이다.



<그림 5> monster

어떤 것은 사각형으로 보고 어떤 것은 사각형이 아닌 경우로 볼 것인가는 DGS에서 처음으로 마주치게 되는 문제이다. 이는 기존 지필환경에서는 문제가 되지 않았던 부분이 끌기라는 새로운 기능의 추가로 만들어진 환경에서는 문제가 될 수 있음을 보여준다. 어느 경우를 사각형으로 한정하여 사각형을 정의할 것인가? 이 논문에서는 네 번째와 같은 꼬인 경우를 제외하고 나머지 경우를 사각형으로 부르도록 하겠다.[2] DGS에서의 monster의 존재는 DGS에서 도형의 정의가 보다 정교하게 다루어져야 한다는 점을 보여준다. 보다 나아가 DGS 정의들이 기존 도형의 정의와 혼동되어 지도되는 것은 바람직하지 않으며, 오히려 새로운 관점인 정의하기에 대한 교육(teach to define)을 통하여 자연스럽게 구성하고 이를 기존 도형의 정의와 연결시키는 활동을 요구된다. 이에 삼각형, 사각형의 분류 및 정의 문제를 다음과 같은 방식으로 접근해 보자.

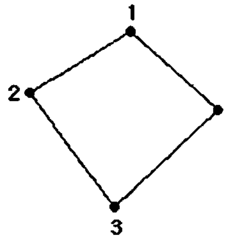
삼각형의 경우 세 점이 자유로운 일반삼각형 중에서 자유로운 두 점을 이용하여 나머지 한 점에 종속성을 부여 삼각형을 만드는 과정을 알아보자. 두 독립점들을 이용하여 원을 만들고 그 원 위에 나머지 한 점을 종속시키는 경우로 독립점들 중 어떤 점이 원의 중심인가에 따라 두 가지 방법이 있다. 두 경우 모두 이등변삼각형이다. 이 두 이등변삼각형들의 집합의 교집합은 결국 정삼각형을 이루게 된다. 여기서 말하는 DGS에서 교집합이란 끌기를 통하여 같은 그림이 그려지는 경우로 종속점이 일치할 수 있는 상태를 말한다. 이는 끌기를 이용하여 시각적으로 인식될 수 있으며 자취를 이용하면 보다 분명하게 파악된다. <그림 6>은 이등변삼각형과 정삼각형 그리고 직각삼각형을 만드는 과정을 보여준다.



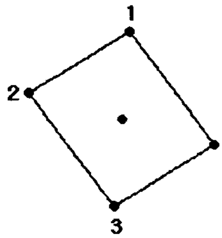
<그림 6> 삼각형의 구성

삼각형과 마찬가지로 사각형의 경우도 네 점이 자유로운 일반사각형에 중 자유로운 세 점을 이용하여 나머지 한 점에 종속성을 부여하여 사각형을 구성해 보자. <그림 7>은 선 13에 대하여 점 2의 선대칭점으로 종속점을 구하는 경우이고, <그림 8>은 점 1과 점 3의 중점에 대하여 점 2의 점대칭점으로 종속점을 구하는 경우이며, <그림 9>는 주어진 세 점을 이용하여 세 점을 지나는 원을 만들고 그 위에 종속점을 정하는 경우이다. 기존 학교기하의 정의와 혼동되지 않도록 만들어진 방법에 따라 이름을 임의로 붙였으며, 이는 학교수업 시간에는 관찰과 특성 파악 후 나름대로의 이름붙이기를 시도하고, 이후 학교기하의 정의와 다시 연결하여 이름의 혼동을 제거해야 한다.

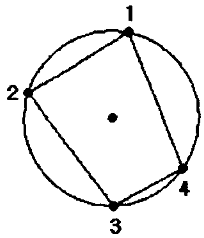
2) 이는 네 개의 꼭지점이 주어지면 사각형이 하나로 결정되어야 한다는 점을 고려한 것이다. 삼각형의 경우는 위와 같은 문제가 발생하지 않는다.



<그림 7> 선대칭사각형



<그림 8> 중점대칭사각형



<그림 9> 원에 내접하는 사각형

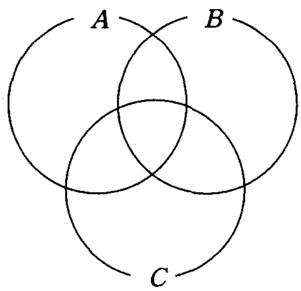
각각의 도형은 끌기를 통하여 그 성질이 파악되어야 한다. 예를 들어 선대칭사각형의 경우 점 2의 끌기를 통하여 종속점의 움직임은 어떻게 달라지는 지 관찰하고, 또한 도형의 전체적인 성질들도 관찰한다. 이 때 JavaMAL 환경에서 사용할 수 있는 길이와 각도 구하기 기능을 이용하여 정의하는 과정에서의 탐구를 시도할 수도 있다. 구성적 절차에 의해 탄생된 사각형의 성질이 밝히는 조작이 된다. 앞의 사각형 세 가지에 대하여 몇 가지 성질을 나열하면 다음 표와 같다.

<표 2> 사각형의 성질

이름	성 질
선대칭 사각형	· 두 대각선은 서로 수직으로 만난다. · 서로 이웃하는 두 쌍의 변의 길이가 각각 같다.
중점대칭 사각형	· 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. · 두 쌍의 대변이 서로 평행하다. · 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
원에 내접하는 사각형	· 대내각의 크기의 합이 180°이다.

다시 이를 벤다이어그램을 통하여 나타내면 다음과 같은 새로운 포함관계를 얻을 수 있다.

A : 선대칭사각형(Kite)들의 집합
B : 중점대칭사각형(평행사변형)들의 집합
C : 원에 내접하는 사각형들의 집합



<그림 10> 사각형의 포함관계

이 때, 독립점들에 대한 끌기는 DGS에서의 하나의 그림에 집합의 대표성을 부여한다. 즉, DGS에 나타난 도형은 하나의 정적인 도형인 동시에 그 성질을 만족하는 도형 전체의 집합이기도 하다. 이는 기존 지필환경과 DGS 환경의 중요한 차이이다.

<표 3> 새로운 사각형의 교집합

$A \cap B$	변의 길이가 모두 같은 사각형들의 집합(마름모)
$B \cap C$	직사각형들의 집합
$A \cap B \cap C$	정사각형들의 집합

이러한 방법의 정의는 Duval(1995)의 절차적 이해 단계에 해당한다고 볼 수 있다. 즉, 도형을 구성하고 그 구성을 설명하는 단계이며 구성을 통하여 자신이 구성한 도형에 대한 절차적 이해를 이룰 수 있다. 이러한 절차적인 이해는 기존 지식과 연관성을 가져 논증적 이해의 단계로 이행해야한다. 그러나 절차적 이해 없이 논증적 이해를 요구하는 것은 자연스럽지 못하다.

5. 수업 시간에 정의하기

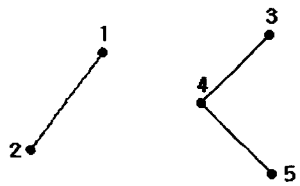
앞에서 알아본 동적 기하에서의 이러한 새로운 정의가 학교수학에서 도입될 때, 구성적으로 도입되지 않고, 다시 이러한 정의를 가르치는 것은 전혀 의미 없다. De Villier(1994)는 정의의 의미를 제대로 파악하지 못하고 오류가 발생하는 것은 그 정의의 필요성을 느끼지 못하기 때문이며 그 필요성을 느끼고 스스로 정의를 내릴 수 있을 때 비로소 교육이 이루어진다고 보고 있다. 마찬가지로 앞에서 제시된 정의들도 자신이 필요성을 느끼고 스스로 정의될 수 있어야 한다. 이에 Mariotti & Fishbein(1997)이 제시한 수업 시간에 정의하기의 다음과 같은 변증법적 절차를 따라 학생 스스로 정의에 접근할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.

- 관찰하기
- 주된 특성을 파악하기
- 주된 특성을 통하여 다른 성질 기술하기
- 도형을 통한 정의 확인 및 관찰하기

DGS 환경에서 구성적 정의를 다루기 위해서는 몇 가지 더 고려해야 할 점이 있다. 관찰하기라는 첫 번째 단계에서 주어진 도형을 수동적으로 관찰하는 것이 아니고 능동적으로 도형을 구성해야 한다. 즉, 직접 주어진 독립점을 이용하여 종속점을 만드는 방식으로 도형을 구성하고, 그것을 올바른 끌기를 이용하여 적극적으로 관찰하는 능동적인 절차가 필요하다. 또한 새로운 정의하기가 이루어질 경우 기존 지식과의 연결성도 중시되어야 한다. 특성을 파악하고, 다른 성질들을 기술하는 단계에서 자신이 구성한 도형이 의미가 있는 것임을 깨닫고 기존 도형의 정의와 연결시킬 수 있어야 한다. 이런 의미에서 구성적 수업 시간에 정의하기의 절차를 수정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- 직접 도형을 구성하고 그 도형을 관찰하기
- 주된 특성을 파악하기
- 주된 특성을 통하여 다른 성질 기술하기
- 구성 방법의 재수정 및 기존 정의와 연결하기

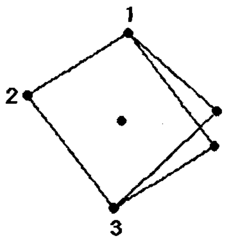
도형을 점의 종속성에 따른 생성자를 이용하여 구성하고, 그 도형을 끌기를 통하여 조작하며 관찰하고, 관찰한 결과를 실험 데이터로 그 도형에 대한 성질이 기술해야 한다. 교사는 주된 특성을 파악하고 이를 통하여 다른 성질을 추론할 수 있도록 학생을 안내해야 한다. 이를 통하여 기존 정의의 의미가 드러나고 나아가 구성적 정의도 의미를 가질 수 있다. <그림 11>과 같은 문제 상황을 생각해 보자. 주어진 <그림 11>을 이용하여 각각 삼각형과 사각형이 되기 위한 종속점을 하나씩 만들라는 문제는 함수적 관점에서 도형의 정의에 접근하는 예가 될 수 있다.



<그림 11> 삼각형과 사각형의 구성

주어진 원시 생성자를 이용하여 삼각형이나 사각형을 구성할 수 있는 타당한 방법은 앞 절에 제시된 경우 밖에 없음을 알 수 있다. 또한 주된 특성이 항상 성립하는지, 혹은 주된 특성을 만족하는 대상이 스스로 만든 구성물뿐인지를 조사하고 다시 수정하는 일련의 변증법적인 사고는 자연스러운 것이다.

De Villier(1994)는 내포적 정의가 의미 있고 중요한 것은, 그 의미를 스스로 구성하는 과정에서, 내포적 정의가 학생들에게 의미 있게 전달될 때라고 말하고 있다. 반힐 이론에 비추어보면 내포적 정의를 이해하고 받아들이는 것은 반힐 수준 3단계에서 가능하다고 지적되고 있지만 만약 이것이 보다 시각적이고 동적인 형태에서 제시된다면 그 이전 수준에서도 가능할 것으로 추측된다. 실제로 내포적 정의는 일상 언어에서는 흔히 관찰되고 사용된다. <그림 12>는 선대칭사각형과 중점대칭사각형의 조건을 동시에 만족하는 점이 존재한다는 것을 시각적으로 보여준다. 이러한 시각적 접근으로 내포적 정의에 접근해 볼 수 있다. 이는 De Villier(1994)가 지적하고 있는 내포적 정의의 필요성과 역할이 학생들에게 의미 있게 다가올 수 있는 다른 측면이 될 수 있다.



<그림 12> 두 조건을 만족하는 점

6. 맺으며

이 논문은 DGS를 기존 교육과정 내용을 위한 보조 도구가 아닌 도형의 정의를 구성시키는 교육적인 탐구환경이라는 측면에서 살펴보았다. 구성을 강조하는 탐구환경이라는 측면에서 본다면, DGS를 단순히 동적 기하 소프트웨어(Dynamic Geometry Software)라고 부르기 보다는 동적 기하 환경(Dynamic Geometry Environment)으로 보는 것이 더 타당할 것이다. 이 때, DGS는 수학적 구조를 가지는 마이크로월드라는 입장에서 설계되어야 한다. 즉, DGS가 도형을 주어진 것으로 보고 그 성질을 탐구하는 도구이기 이전에 함수적 관점에서 도형을 만들 수 있는 환경이어야 한다. DGS에서 도형의 구성을 생각할 때, 가장 기본이 되어야 하는 것은 점이며, 점과 점의 관계를 통해 생성자를 찾고, 이 생성자를 이용하여 다시 점에 종속성을 부여한다. 이는 수학의 많은 부분이 가장 기본적인 것을 공리로 하여 다른 모든 것을 만들어 내는 것과 같은 원리이다. 가장 기본적인 몇몇 생성자를 통하여 가장 풍부한 내용을 만들 수 있는 환경이 가장 바람직하다는 것이 마이크로월드의 기본 철학이다. 이 때, 학생들이 도형의 구성 방식에 따라 새로운 정의를 스스로 내리게 하여 의미를 부여하고, 도형의 포함 관계에 대한 시각적 · 조작적 측면을 강조하여 내포적 정의의 유용성을 경험할 수 있도록 하고, 기존 교육과정의 내용과도 연결할 수 있도록 한다. 스스로 도형을 만들어 문제를 제기하고 그 문제를 해결하는 일련의 과정이 가장 바람직하다는 관점으로 이 논문은 다음과 같은 일련의 과정의 하나의 예를 제시한 것이다.

생성자(generator)
→ 도형의 구성(construction)
→ 정의하기(defining)

여기서 제기될 수 있는 몇 가지 문제점을 알아보자. 우선 기존 기식과의 중복에서 발생하는 혼란의 문제를 들 수 있다. 이는 용어의 중복을 피하고, 성질을 정리하는 과정에서 기존 지식과의 연결성을 강조하여 해결될 수 있을 것이다. 다음으로 도형 정의가 정의하기로 끝나게 된다면 이는 너무 비효율적이라는 지적이다. 그러나 자신이 도형을 구성하고 도형을 조작하는 일련의 활동을 통하여 문제제기의 능력을 기를 수 있고, 이를 해결하는 적극적 문제해결자의 역할을 고려한다면 단순한 정의하기 이상의 수학적 활동으로 의미가 있음을 알 수 있다.

새로운 환경에 대처하는 새로운 정의와 문제 공간을 직접 만들고 그 상황에서의 적극적인 문제 해결자의 모습을 갖출 수 있도록 스스로 환경을 이해하고 환경에 맞는 정의를 내리는 교육은 바람직하다. DGS의 동적인 환경은 이러한 점을 고려하여 디자인되어야 하고, 교사는 DGS의 특징을 이해하여 올바른 안내자의 입장에서 학생들의 적극적인 구성을 장려하고 적절한 피드백을 제시해야 할 것이다. DGS의 설계와 구성적 수업설계에 대한 연구가 앞으로 보다 더 필요하다.

참 고 문 헌

류희찬 · 유공주 · 조민식 (2000). 탐구형 소프트웨어를 활

용한 기하학습내용의 구성방안 탐색, 대한수학교육학회 논문집 **10(1)**, pp.139-159, 서울: 대한수학교육학회.

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구, 서울대학교 교육학 박사 학위 논문.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **42(2)**, pp.177-191, 서울: 한국수학교육학회.

황우형 · 차순규 (2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(3)**, pp.341-360, 서울: 한국수학교육학회.

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics*, Cambridge, MA: MIT Press.

Couco, A. A.; Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

De Villiers, M. (1994), The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, pp.11-18.

De Villiers, M. (1998). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry, In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Duval, R. (1995), Geometrical pictures : Kinds of representation and specific processings. In R. Sutterland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, Berlin: Springer.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representation. In A. diSessa; C. Hoyles; R. Noss & L. Edwards (Eds.), *Computers and exploratory learning*, Berlin: Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel.

Fou-Lai Lin & Kai-Lin Yang. (2002). Defining a Rectangle under a Social and Practical Setting by Two Seventh Graders, *International Reviews on Mathematics Educations*, **34**, pp.17-28.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Healy, L.; Hoelzl, R.; Hoyles, C. & Noss, R. (1994), Messing up, *Micromath* **10(1)**, pp.14-16.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, **44**, pp.55-85.

King, J. R. & Schattschneider, D. (1997). *Geometry Turnned On! : Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. Washington: The Mathematics Association of America.

Mariotti, M. A. & Fishbein, E. (1997). Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics* **34**, pp.219-248.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs. "seeing": Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics* **19**, pp.79-92.

Sherin, B. (2002). Representing Geometric Constructions As Programs : A Brief Exploration, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **7(1)**, pp.101-115.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics, In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics - Building concrete relationship with mathematical knowledge*, Thesis of doctor of philosophy at the Massachusetts Institute of Technology.

Functional Definitions in DGS Environments.

Kim, Hwa Kyung
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
E-mail : indices2@snu.ac.kr

Cho, Han Hyuk
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
E-mail : hancho@snu.ac.kr

In this paper, we introduce new functional definitions for school geometry based on DGS (dynamic geometry system) teaching-learning environment. For the vertices forming a geometric figure, we first consider the relationship between the independent vertices and dependent vertices, and using this relationship and educational considerations in DGS, we introduce functional definitions for the geometric figures in terms of its independent vertices.

For this purpose, we design a new DGS called JavaMAL MicroWorld. Based on the needs of new definitions in DGS environment for the student's construction activities in learning geometry, we also design a new DGS based geometry curriculum in which the definitions of the school geometry are newly defined and reconnected in a new way. Using these funct onal definitions, we have taught the new geometry contents emphasizing the sequential expressions for the student's geometric activities.

* ZDM Classification : U73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70
* Key Words : dynamic geometry environment, DGS, microworld, defining, teach to define.