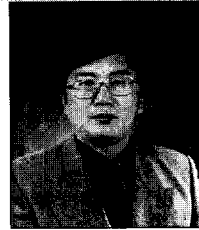


강체 스프링 모델에 의한 철골구조물의 극한해석

Limit Analysis of Steel Structures by Right-Bodies Spring Model



박강근*

*밀양대학교 건축학부 부교수

1. 서론

강체스프링 모델은 분할된 요소를 강체라고 가정하고, 각 요소는 스프링 시스템을 연결되어 있다고 생각하여 구조물을 해석하는 방법이다. 먼저 보의 휨 문제에 대한 강체스프링 모델의 개념을 설명하고자 한다.

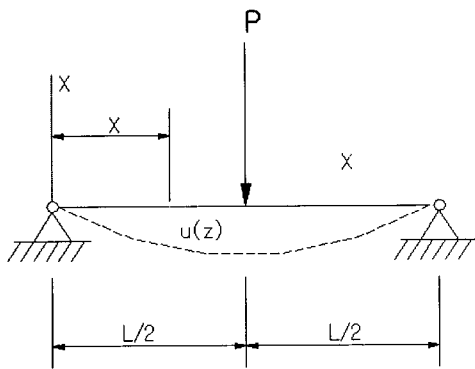


그림 1 양단 단순지지 보의 곡선

그림 1은 중앙집중하중 P를 받는 양단연속지지 보의 휨 문제를 나타낸다.

보의 중앙점에 있어서 처짐을 $u(z)$ 라 하면,

$$u(z) = \frac{P}{48EI} (3L^2z - 4z^3) \quad (0 \leq z \leq L/2) \quad (1)$$

여기에 EI 는 보의 y 축 주변의 휨강성, L 은 보 길이, P

는 중앙집중 하중을 표시하고 있다. 보의 휨곡선은 좌표는 z 의 3차곡선으로 그림 2 과 같이 주어진다. 지금 이 보의 휨곡선을 그림과 같이 $2n$ 개의 점선으로 근접해두자 n 은 보의 양분의 분할수 이므로 n 보다 작을 때에는 보의 휨의 근접은 당연히 거칠지만, n 이 커지게 되면 실제의 굴곡 곡선에 근접할 것이다. 여기에는 보 평균분할 된 각 부분은 하중을 받는데도 변형하지 않는 강체로 생각하면 세분된 보의 부분을 요소(element)라 한다. 상응하는 요소는 하중을 받아 이동하는 서로의 각도만 각변화가 일어나게 된다. 따라서, 세분된 보 요소를 상호 편으로, 다음 편 접합부회전이 일어날 때에 그 회전량에 비례하는 반력(휨모멘트)가 생기는 것이다. 그러면 이 두 개의 요소에 관해 다음과 같은 역학적인 관계가 있음을 알 수 있다. 즉, 요소 A와 요소B의 변위는 양단의 점의 ①, ② 및 ③의 변위, u_1, u_2, u_3 가 주어지면 완전히 결정된다. u_i ($i = 1, 2, 3$)극소로 되면 A 요소, B 요소의 회전각은 다음과 같은 식이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} t\theta_2 &= \frac{u_3 - u_2}{l} \quad \therefore \theta_1 = \frac{u_2 - u_1}{l} \\ t\theta_2 &= \frac{u_3 - u_2}{l} \quad \theta_2 = \frac{u_3 - u_2}{l} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에 $l = L/2n$ 이다. 따라서 회전 스프링의 강성을 k 라하면 스프링에 생기는 반력 M 은 다음의 식을 주어진다.

$$M = k(\theta_2 - \theta_1) \quad (3)$$

보의 휨 이론에 의해 보에 생기는 휨모멘트 M 은 보의 휨 강성 EI 그 곡률의 면적은 다음과 같다.

$$M = EI\kappa \quad (4)$$

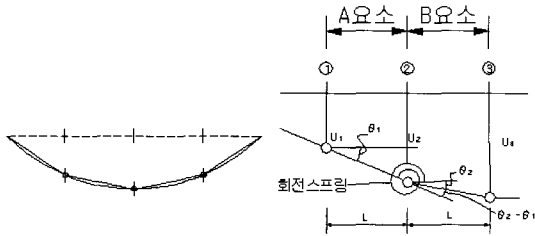


그림 2 보의 휨곡선의 근사와 보의 휨문제에 대한 강체 스프링 요소 모델

그런데 곡률 κ 는 l 가 충분히 작으면 다음식과 같은 식이 주어진다.

$$\kappa \approx \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} \quad (5)$$

따라서 식(4), (5)에서 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$k = \frac{EI}{l} \quad (6)$$

따라서 회전스프링에 의한 변형에너지 V 는 다음과 같이 식이 주어진다.

$$V = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 = \frac{EI}{2l} \left\{ \left(\frac{u_3 - u_2}{l} \right) - \left(\frac{u_2 - u_1}{l} \right) \right\}^2 \quad (7)$$

이상에서는 1차 형상함수의 보(휨)요소를 사용하여 보의 있고 변형에너지 V 가 인접2차요소의 단부점의 변위의 2차 함수로 나타나게 된다. 인접을 표시한 것이므로 아직, 표준적 차분표시의 되고 있다. 다시말하면, 강체-스프링모델은 1차의 형상함수의 유한요소이고, 표준차분모델임을 알았다.

보의 곡선 문제를 2 요소 접근을 해 보면, 회전의 스프링에 의한 변형에너지 V 는 식(7)로 부터 다음식으로 주어진다.

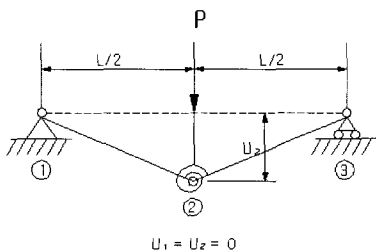


그림 3 양단 단순지지보의 2요소 근사모델

$$V = \frac{2EIu_2^2}{l^3} \quad (\because u_1 = u_3 = 0) \quad (8)$$

외력 P 가 포텐셜 $W = Pu_2$ 이고, 이 요소의 적합 조건은 다음과 같다.

$$\therefore \Pi(u_2) = V - W = \frac{2EIu_2^2}{l^3} - Pu_2 \quad (9)$$

$$\frac{d\Pi}{du_2} = \frac{4EIu_2}{l^3} - P = 0$$

따라서, u_2 는 다음의 값으로 주어진다.

$$u_2 = \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{PL^3}{32EI} \quad (10)$$

이 중앙점의 처짐 δ 를 구하면 다음과 같다.

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad (11)$$

주어진 식(11)에 주어지는 2요소근사해의 오차 ϵ_2 는

$$\epsilon_2 = \frac{u_2 - \delta}{\delta} = \left(\frac{48}{32} - 1 \right) \times 100\% = 50\%$$

가 된다. 이와같이 서술한 계산의 방법은 대수연산적이지만, 다음과 같은 최소 포텐셜 원리를 사용해도 같은 답을 얻을 수 있다. 즉 주어진 보의 휨문제에 대해 보의 요소의 변형에너지 $V = \frac{EI}{2l^3} (u_1 - 2u_2 + u_3)^2$ 는 다음식과 같이 얻을 수 있다.

$$= u_1, u_2, u_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{EI}{2l^3} 1, -2, 1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} u_1, u_2, u_3 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

따라서 Castigliano 정리에서 다음의 요소 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

식(13)을 사용해서, 또 다시 지지보의 휨문제를 생각해 보자. 우선 보의 양끝이 지지되고 있으므로 $u_1 = u_3 = 0$ 이며, 이러한 점에서 지지반력 X_1 및 X_3 이라고 하면 평형방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ P \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

식(14)에서 다음의 값들을 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{AEHu_2}{l^3} \quad \therefore u_2 = \frac{PL^3}{32EI} \\ X_1 = X_2 &= \frac{2AEHu_2}{l^3} = -\frac{P}{2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

여기에 L 은 보의 전체 길이로 표현한다. 따라서 $L=2l$ 이다. 식(14)으로 얻을 수 있는 보요소를 사용해서 4요소 근접의 경우의 해답을 구해보도록 하자(그림 4 참조). 이 경우 보요소 전체의 강성방정식은 강성-스프링요소의 강성방정식을 3중으로 겹쳐서 만들어진다.

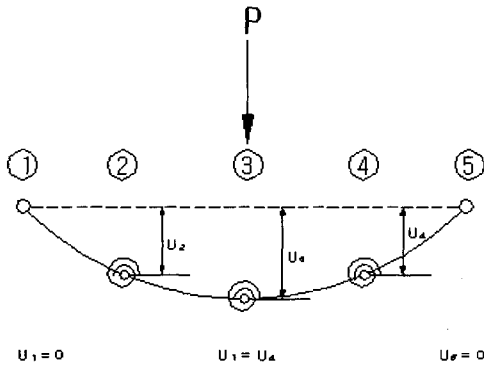


그림 4 4요소 근사 모델

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \quad (17)$$

식 (13), (16), (17)의 조합하면, 보의 양단은 지지되고 변형은 중앙점에 관해서 대칭해 있음을 고려하면,

$$u_1 = u_5 = 0, \quad u_2 = u_4$$

이다. 따라서 4요소근사의 경우의 평형방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4+1 & -2-2 & 1 & 0 \\ 1 & -2-2 & 1+4+1 & -2-2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-2 & 1+4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ P \\ X_3 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix} \quad (18)$$

따라서,

$$X_1 = X_5 = \frac{EI}{l^3} (-2u_2 + u_3)$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

가 된다. 그러면 u_2, u_3 에 관한 강성방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^3} \{(5+1)u_2 - 4u_3\} = 0$$

$$\frac{EI}{l^3} \{- (4+4)u_2 + 6u_3\} = P$$

$$\frac{EI}{l^3} \{(1+5)u_2 - 4u_3\} = 0$$

최종적으로 다음의 (2×2)의 강성방정식을 푸는 문제에 귀착한다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}$$

이 식은 제 1행의 양변을 2배로 해도 상관이 없으므로 결국 다음과 같은 강성방정식을 푸는 문제가 된다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{l^3}{8EI} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{Pl^3}{8EI} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad (21)$$

식(21)에서 u_3 을 구하면,

$$u_3 = \frac{12Pl^3}{8EI} = \frac{3PL^3}{128EI} \quad (22)$$

가 된다. 4요소근사의 경우의 오차는 ϵ_4 은

$$\begin{aligned} \epsilon_4 &= \frac{u_4 - \delta}{\delta} \times 100\% = \left(\frac{3 \times 48}{128} - 1 \right) \times 100\% \\ &= 11.25\% \end{aligned}$$

가 된다. 식 (19)에서 식 (20)을 도입한 과정은 행렬의 축약(matrix condensation)으로 불리운다. 4요소근사의 답이 아직 11%의 오차를 가지고 있기 때문에 계속해서 6요소근사의 답을 구해보자. 계산방법은 4요소근사의 경우와 완전히 같다. 그림 5을 참고하고, 경계조건, 중앙점에 대한 휨곡선의 대칭성을 고려하면, 5개의 보요소의 강성방정

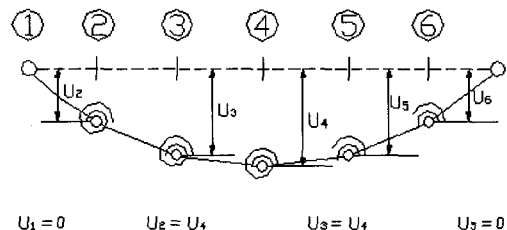


그림 5 6요소근사모델

식을 곱하면 결국 다음과 같이 6요소근사의 경우의 강성 방정식을 얻어진다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ X_7 \end{pmatrix} \quad (23)$$

식 (23)을 보면 이해되듯이 6요소모델의 강성매트릭스는 식(13)의 요소강성 매트릭스를 대각선상에서 오른쪽 밑으로 1행씩 어긋나게해 4개의 매트릭스를 겹친것 이외에는 없다.

이렇게 해서 만들어진 보의 유한요소모델의 전체강성매트릭스는 밴드매트릭스(bend matrix)가 된다. 그리고 식(23)을 축약하면 결국 다음과 같은 3행3열의 강성방정식이 된다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2 \\ -8 & 14 & -8 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (24)$$

이 방정식의 답은 수계산에도 구해져 다음 식과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{l^3}{16EI} \begin{bmatrix} 20 & 32 & 36 \\ 32 & 56 & 64 \\ 36 & 64 & 76 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (25)$$

따라서, 보의 중앙점의 휨 u_4 는 다음 식으로 주어진다.

$$u_4 = \frac{76Pl^3}{16EI} - \frac{19PL^3}{864EI} \quad (26)$$

그러므로, 이 답의 상대오차 u_6 은

$$\epsilon_6 = \frac{u_6 - \delta}{\delta} \times 100\% = \frac{50}{9} \approx 5.6\%$$

가 되고, 상당히 정도가 높은 답이 얻어지게 된다. 이상의 연산을 8요소, 10요소로 근사를 접근해서 해석해보면, 공학적으로는 8요소 근사해 위에 충분히 정밀도를 가지고 있다고 생각되는 것이다.

2. 보의 곡선 고유진동 및 휨 좌굴문제의 해석

그림 6 은 양단이 단순지지된 보의 휨진동의 운동방정

식은 잘 알려져있듯이 식(27)과 같이 주어진다.

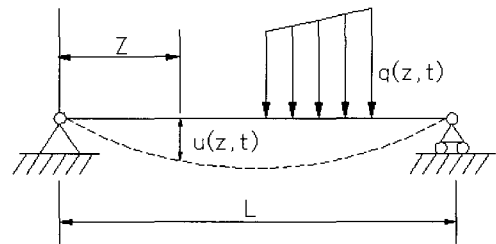


그림 6 보의 휨 진동

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(z, t) \quad (27)$$

여기에 EI 는 보의 y 축 부근의 휨강성, $u(z, t)$ 의 보의 횡력, γ/g 는 재료의 밀도, A 는 보의 단면적, $q(z, t)$ 는 분포외력을 나타내고 있다.

그러면, 보의 고유진동문제가 라고 하는 것은 외력의 작용이 없는 경우, 보가 어떠한 파형과 주기로 진동하는가 하는 문제이고, 경험적으로 만약 감쇠가 없다면 단진동(simple harmonic oscillation)을 일으킨다는 것이 알려져 있다. 따라서 그 진동하는

$$u(z, t) = u_0(z)e^{imt} \quad (28)$$

이다. 여기에 e^{imt} 는 단진동을 나타내고 시간인자로 i 는 순허수를 표시하고 있다.

식(28)을 식(27)에 대입하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$EI \frac{d^4 u_0}{dz^4} = \frac{\gamma A p^2}{g} u_0 \quad (29)$$

그러면, 식(29)의 양변에 변위 δu_0 을 보의 전길이에 걸쳐서 적분하면 다음식이 얻어진다.

$$\int_0^L EI \frac{d^4 u_0}{dz^4} \delta u_0 dz = \int_0^L \frac{\gamma A p^2}{g} u_0(z) \delta u_0 dz \quad (30)$$

식(30)은 좌측을 부분적분하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & | EHu_0'' \delta u_0' - EHu_0' \delta u_0'' | \Big|_0^L + \delta \int_0^L \frac{1}{2} EHu_0''^2 dz \\ & = \delta \int_0^L \gamma A p^2 u_0''^2 dz \end{aligned} \quad (31)$$

그런데 지금 생각하고 보의 양단은 단순지지 되고 있다고 가정하고 있기 때문에 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_0(0) &= u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = 0 \\
 \delta L &= 0 \\
 L &= T - V \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\gamma A \rho^2}{g} (u_0(z))^2 dz \\
 V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (u_0''(z))^2 dz
 \end{aligned} \tag{32}$$

이다. T 는 보의 운동에너지, V 는 보의 휨의 변형에너지를 나타내고 있고, 함수 L 은 Lagrange 함수라 하고, 동역학의 이론에 있어서 중요한 역할을 하는 함수이다.

이상과 같은 이론에서 알 수 있듯이 보의 휨 고유진동해석은 식(29)에서 얻어지는 미분방정식을 일정 경계조건하에서 풀고, 그때의 고유파형 $u_0(z)$ 와 그것에 대응하는 고유진동수 $p/2\pi$ 를 구하는 문제이지만, 그것은 식(31)로 나타난다. 함수에 극치를 주는 $u_0(z)$ 및 p 를 구하는 좌굴문제와 동등하다.

또한 그림 7은 양단으로 축압축력 P 를 받는 기둥의 좌굴문제를 나타내고 있다. 이 문제를 지배하는 기둥의 미분방정식은 다음 식으로 얻어진다.

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \tag{33}$$

그래서 식(33)을 주어진 경계조건하에서 풀어서 최소고유치(좌굴하중)를 구하는 것은, 이계가 가지는 전체의 포텐셜에너지 $\Pi = V - W_1$ 의 정유조건을 만족하는 답을 구해 그 최소고유치를 계산하는 문제와 동등하고 하는 것이 나타난다.

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi(u) &= 0 \quad V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz \\
 W_1 &= - \int_0^L \frac{1}{2} P \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz
 \end{aligned} \tag{34}$$

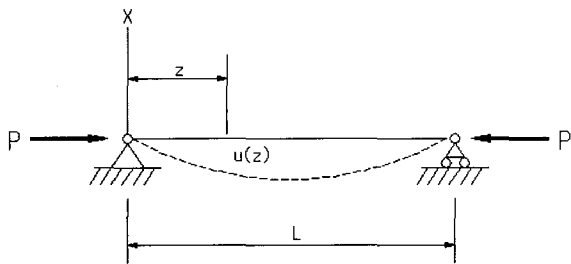


그림 7 양단의 축압축력 P를 받는 보의 휨 좌굴

다음으로 새로운 요소모델을 이용해서 진동 및 좌굴해석에 필요한 질량매트릭스(mass matrix) 및 기하강성매

트릭스(geometrical stiffness matrix)를 도입하도록 하자.

(a) 질량매트릭스의 도출

그림 8은 주어진 보를 등분할 하고, 그 대표적인 서로 이웃한 2요소에 있어서 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 를 낳은 상태를 나타내고 있다. 식(34)을 이용해서 두 개의 요소가 가지는 운동에너지 T 를 계산하면 다음과 같다.

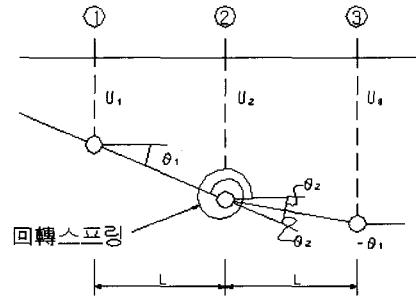


그림 8 보의 휨 요소

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma A P^2}{g} \left\{ u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{l} \right) z_1 \right\}^2 dz_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma A P^2}{g} \left\{ u_1 + \left(\frac{u_3 - u_2}{l} \right) z_2 \right\}^2 dz_2 \\
 u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{l} \right) z_1 &= \left(1 - \frac{z_1}{l} \right), \frac{z_1}{l} \left\{ \frac{u_1}{u_2} \right\}
 \end{aligned} \tag{35}$$

식 (35)는 다음과 같은 식으로 다시 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l u_1^T h^T(z_1) \left(\frac{\gamma A P^2}{g} \right) h(z_1) u_1 dz \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^l u_2^T h^T(z_2) \left(\frac{\gamma A P^2}{g} \right) h(z_2) u_2 dz \\
 u_1 &= \left\{ \frac{u_1}{u_2} \right\}, u_2 = \left\{ \frac{u_2}{u_3} \right\}, h^T(z_i) = \left(1 - \frac{z_i}{l} \right), \frac{z_i}{l} \quad (i = 1, 2) \\
 \bar{m} &= \int_0^l h^T(z) \frac{\gamma A}{g} h(z) dz
 \end{aligned} \tag{36}$$

질량 매트릭스 M 을 계산하면, 우선 식(36)은 다음의 같이 표시된다.

$$T = \left(\frac{1}{2} u_1^T \bar{m} u_1 + \frac{1}{2} u_2^T \bar{m} u_2 \right) P^2 \tag{38}$$

그런데 식(37)로 부터

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \\
 m_{11} &= \frac{\gamma A}{g} \int_0^l \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{\gamma A l}{3} \\
 m_{12} = m_{21} &= \frac{\gamma A l}{g} \int_0^l \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{\gamma A l}{6} \\
 m_{22} &= \frac{\gamma A}{g} \int_0^l \left(\frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{\gamma A l}{6}
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$m_{22} = \frac{\gamma A}{g} \int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = \frac{\gamma Al}{3}$$

가 된다. 한편의 운동에너지 T 을 다음의 모양으로 나타내자.

$$T = \frac{1}{2} p^2 u^T m u \tag{40}$$

여기서, $u^T = u_1, u_2, u_3$ 이다. 그렇게 하면 대각선방향으로 1행1열이 엇갈리게 겹치는 것에 의해 m 이 만들어지는 것을 알수 있으므로, 결국 구하는 보요소의 질량매트릭스 m 은 다음식과 같이 주어진다.

$$\frac{\gamma Al}{6} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

보의 휨 요소에서의 질량매트릭스의 결합은 다음과 같다.

$$\bar{m} = \frac{\gamma Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

(b) 기하강성매트릭스 K_G 의 도출

축력 P 의 가지는 포텐셜 W 는 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int_0^l P \left(\frac{du_1}{dz_1}\right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l P \left(\frac{du_2}{dz_2}\right)^2 dz \\ &= -\frac{1}{2} (u_1^T \bar{K}_G u_1 + u_2^T \bar{K}_G u_2) = -\frac{1}{2} u^T K_G u \end{aligned} \tag{42}$$

여기에서

$$\begin{aligned} \bar{K}_G &= \int_0^l h'(z)^T P h'(z) dz \\ &= \int_0^l \frac{P}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dz = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 질량매트릭스의 경우와 같은 겹침 계산을 하여

$$K_G = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

이라 하는 보의 휨좌굴에 있어서 기하강성매트릭스가 구해진다.

(c) 고유치문제의 매트릭스에 의한 정식화

이상 언급한 것에서 보의 휨 진동 및 축압축력 P 에 의해 좌굴문제는 각각 다음의 범함수(functional)의 극치조건을 구하는 문제가 된다.

$$L(u) = \sum_i \frac{1}{2} (p^2 u_i^T m_i u_i - u_i^T K_i u_i) \tag{44}$$

$$\Pi(u) = \sum_i \frac{1}{2} (u_i^T K_i u_i - P u_i^T K_G u_i) \tag{45}$$

따라서, 보 혹은 기둥의 절점변위모델 벡터를 u 명요소의 강성, 질량 및 기하강성매트릭스를 겹쳐 만들어진 전체 매트릭스를 각각 K, M 및 K_G 나타내면 식(44) 식(45)은 최종적으로는 다음식과 같이 표시된다.

$$L(u) = \frac{1}{2} (p^2 u^T M u - u^T K u) \tag{46}$$

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} (u^T K u - P u^T K_G u) \tag{47}$$

여기에

$$K = \sum K_i, K = \sum m_i, K_G = \sum K_{Gi} \tag{48}$$

이다. 따라서 식(46), (47)의 극치조건을 만들면 다음식과 같이 된다.

$$\frac{\partial L}{\partial u} = (p^2 M - K)u = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = (K + P K_G)u = 0 \tag{50}$$

식(49), (50)은 $u = 0$ 에 이거나, 괄호안의 매트릭스가 0이 되는것을 나타내고 있다. 그런데 $u = 0$ 이라고 하는 답은 보의 휘어지지 않는 것을 의미하기 때문에 무의미한 답이기 때문에 제외하면, 결국 괄호안의 매트릭스의 만드는 행렬식이 0이 되지 않으면 안된다. 즉,

$$|K - p^2 M| = 0 \tag{51}$$

$$|K + P K_G| = 0 \tag{52}$$

가 된다. 이미 언급한 이와같이 식(50)은 보의 휨 진동의 진동수방정식(frequency equation), 식(52)는 축압축력 P 를 받는 기둥좌굴하중을 결정하는 특성방정식(characteristic equation)을 나타내고 있다. 이상에서 서술한 이론에 따라서 양단지지보의 고유치문제를 풀어 보자. 우선 2요소근사의 경우에서부터 시작해본다.

(i) 2요소 근사해

식(51)의 2요소근사 해석은 쉽게 다음 의하여 구해진다. 진동수방정식은 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{w^2}{96} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

여기에 $w^2 = \gamma A p^2 L^2 / EI$ 에 있다. ($L = 2l$)

$$\therefore 4 \left(1 - \frac{w^2}{96} \right) u_2 = 0$$

따라서 $\mu = \sqrt[4]{w^2} = 3.13017$ 가 된다. $\mu = \pi = 3.14159$

이기 때문에 오차는 -0.36%로 정답이 매우 가깝다.

좌굴방정식은 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (54)$$

여기에 $\lambda = PL^2/EI$ 이다. 따라서

$$4 + \frac{\lambda}{2} = 0 \quad \therefore \lambda = -8$$

부여된 압축하중이라는 것을 표시하고 있다.

그런데 정답은 $\lambda = -\pi^2 = -9.87$ 으로 오차합 -19%이다.

(ii) 4요소 근사해(기본진동의 고찰)만을 생각한다.

진동수방정식은 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{w^2}{1536} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{vmatrix} 12 - \frac{w_2}{192} & -8 - \frac{w_2}{768} \\ -8 - \frac{w_2}{768} & 6 - \frac{w_2}{384} \end{vmatrix} = 0$$

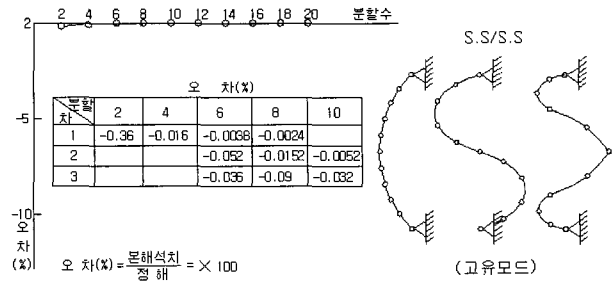
이 방정식을 풀 결과는 $\mu = \sqrt[4]{w^2} = 3.14114$ 가 되고, 기본진동 모델의 답은 오차는 -0.014%가 된다. 마찬가지로 좌굴의 특성방정식의 4요소근사해는 다음식과 같이 주어진다.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{16} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

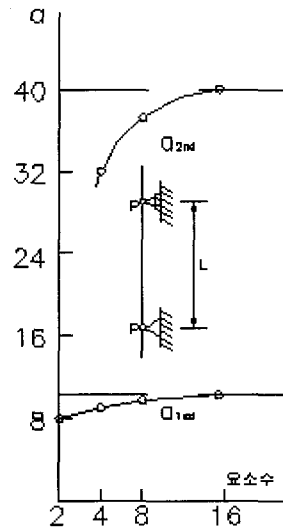
따라서

$$\begin{vmatrix} 12 + \frac{\lambda}{4} & -8 - \frac{\lambda}{8} \\ -8 - \frac{\lambda}{8} & 6 + \frac{\lambda}{8} \end{vmatrix} = 0 \quad (56)$$

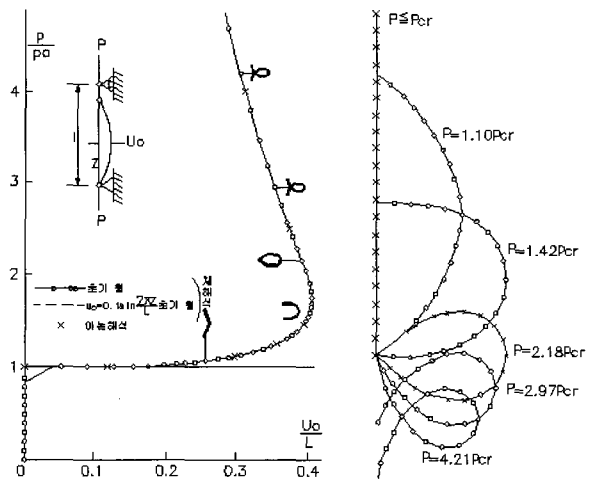
이것을 풀어서 얻어진 최소고유치는 $\lambda = 9.376$ 이 답의 오차는 약 5%이고, 이것을 4요소근사에서도 실용적인 해답을 얻어진다고 생각된다.



(a) 보의 휨 고유진동해석



(b) 양단에 축압축력 P를 받는 기둥의 휨 좌굴해석
그림 9 양단 단순지지된 보 기둥의 고유치해석



(a) 하중-변위곡선 (b) 변위상태

그림 10 양단 축압축력 P를 받는 기둥의 좌굴후의 안정문제 해석

참 고 문 헌

1. Kawai, T., "New Element Model in Discrete Structural Analysis." *Journal of the Naval Architects of Japan*, Vol. 141, 1977, pp.174-180
2. Tsuboi, Y., "Elasto-plastic Analysis of Wall-type Precast R.C. Structure by Rigid Element Method," *Report of the Housing Corporation in Japan*, April, 1982.
3. Kwun, T.J. and Kim, S.D., "Preceedings IASS Symposium on Shells", *Membrances and Space frames, Elsevier Science Publi-shers B.V.*, Vol. 1, Sept, 1986, pp.137-144.
4. Kwun, T.J., Han, S.E. and Park, K.G., "New Approach on the Elasto-Plastic Analysis of the Open Spherical Dome," *Proceedings IASS Symposium on Dome from Antiquity to the Present*, May, 1988, pp.334-342
5. Kwun, T.J., Han, S.E., Suh, S. and Park, K.G., "A New Approach on the Elasto Plastic Analysis of Pressure Vessel," *Proceedings of the International Symposium on Pressure Vessel Technology and Nuclear Codes and Standards*, April, 1987, pp.3. 32-3.45.
6. Kwun, T.J., Park, K.G. and Cho, K.P., "A New Limit Analysis of The Hemispherical Shell Supported with Cylinder by Rigid Element Method", *Proceedings of the Thrid Summer Colloques of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures*, Aug, 1990, pp.525-534.
7. Kwun, T.J., Park, K.G. and Cho, K.P., "An Experimental Study on Verification of Numerical Results of R.C Hemispherical Shell Subjected to Vertical Load," *Precedeings of the SEICKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures*, Oct, 1993, pp.355-362.
8. 권택진, 박강근, "강체요소법에 의한 구조물의 탄소성 해석," *대한건축학회논문집*, 1994. 12, pp. 225-235 