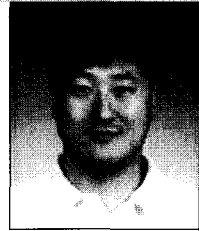


# 변형률연화와 국소화 파괴의 모델링 리뷰

## Review on the Modeling of Strain Softening and Localization Failure



박재균\*

\*단국대학교 토목환경공학과 전임강사

### 1. 서론과 문제설정

공학적 응력-변형률 곡선에서 재료의 파괴직전에 흔히 나타나는 변형률연화 (strain softening) 현상은 국부의 집중소성변형 현상과 밀접한 관계가 있다. 그러나 변형률연화는 음수의 기울기를 가지는 응력-변형률 곡선을 의미하며, 이 모델은 유한요소해석의 결과가 그 요소의 크기에 따라 수렴점이 달라지는 근본적인 문제를 가진다. 따라서 1980년대 이후 많은 학자들이 이 현상의 적절한 모델을 찾기 위한 노력을 기울여왔다.

본 기사는 de Borst<sup>1)</sup>의 논문을 주로 참고하여 그간 연구, 개발된 해석모델을 소개하고 장단점을 비교하는 것을 내용으로 한다. 특히 연성(ductility)이 높은 금속재료보다는 상대적으로 작은 변형률에도 취성파괴를 일으키는 콘크리트 등의 재료에 적용하기 적절한 모델들이다. 비교를 위하여 장력을 받는 일차원 봉의 거동을 연구대상으로 삼았다.

수평 방향 x 축을 따라 길이 L인 봉을 생각한다. 작은 변형률, 작은 변위의 가정으로 연속체 모델을 적용한다. 이 봉은 일정단면 A를 가지며 모든 곳의 물성이 일정하다. 오른쪽 끝단은 힘 P를 받고 있다. 이때 봉을 동일 크기를 가지는 m개의 요소로 나눌 수 있다. 응력이 인장강도  $f_t$ 에 이르기까지 수직응력  $\sigma$ 와 수직변형률  $\epsilon$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma = E \epsilon \quad (1)$$

위 식에서 탄성계수 E를 사용하였다. 부재가 하중을 전혀 받지 못하는 위치를  $\epsilon_u$ 라고 하면 인장강도를 넘어서는 변형률에 대한 구성방정식은

$$\sigma = f_t + h(\epsilon - \epsilon_0) \quad (2)$$

여기서 음의 실수인 h를 연화상수로 정의할 수 있으며, 최고응력에서의 변형률을  $\epsilon_0$ 로 놓으면 다음 관계가 성립

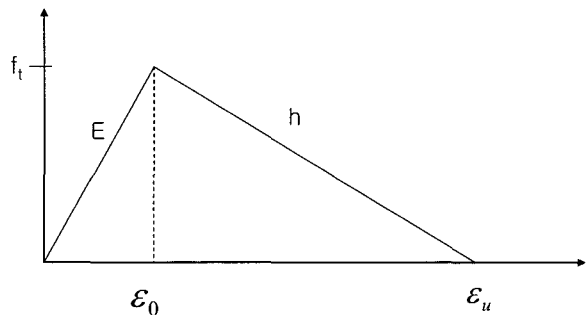
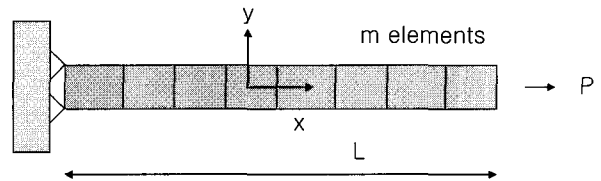


그림 1 힘 P를 받는 일차원 봉(위), 응력-변형률 곡선(아래)

한다.

$$h = -\frac{f_t}{(\epsilon_u - \epsilon_0)} \quad (3)$$

이제 요소 I의 인장강도가 다른 요소에 비해 매우 조금 낮다고 가정하자. 증가하는 하중으로 제일 먼저 I 요소가 인장강도에 도달하면 그 순간 I 요소에서는 소성연화과파가 일어난다. 그러나 그와 동시에 다른  $m-1$ 개의 요소에서는 탄성 하중제거현상(elastic unloading)이 일어나게 된다. 인장강도를 지나면서 이 봉의 평균변형률은

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{E-h}{Eh} \frac{\sigma - f_t}{m} \quad (4)$$

이다. 여기에  $n := \epsilon_u/\epsilon_0$ ,  $h = -E/(n-1)$ 를 이용하면

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{n(f_t - \sigma)}{mE} \quad (5)$$

위 식으로부터 응력과 평균변형률의 관계를 유도한다.

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{d\sigma} = \frac{1}{E} - \frac{n}{mE} \quad (6)$$

이 결과로 전체 봉의 응답이  $m$ 의 함수인 것을 알 수 있다. 여기서 음의 기울기를 유지하려면  $1 \leq m < n$ 의 조건을 만족해야 한다. 특히  $m \rightarrow n$ 일 때 기울기는 0으로 접근한다. 그 한계를 넘어서는 경우 ( $n < m < \infty$ )는 탄성기울기로 접근하면서 변위가 줄어드는 snap-back 현상이 발생하게 된다. 이 관계를 응력과 평균변형률의 도표로 나타내면 그림 2와 같다. 따라서 축력과 끝단 변위의 관계도 포도 위와 같은 모양이 되며, 결론적으로 요소의 수에 따라 그 수렴하는 해가 모두 다르다. 위의 해석에는 수치적 오차가 포함되어 있지 않으며 이것은 유한요소법 등의 수치해석으로 인한 오차와는 근본적으로 다른 문제이다.

## 2. Fracture Energy를 이용한 방법

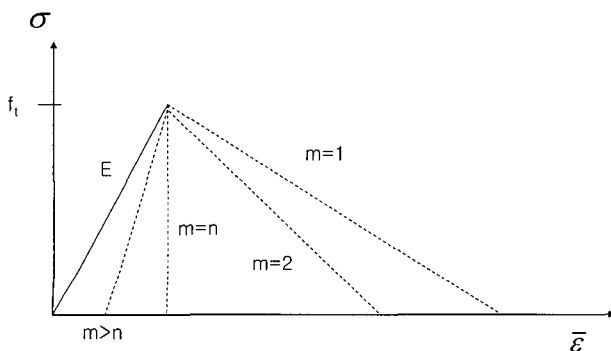


그림 2 일차원 연속체 탄소성모델의 응력-평균변형률 관계

연속체의 변형률연화 모델이 가지는 문제점을 해결하기 위하여 여러 가지 발전된 제안들이 발표되었다. Bazant & Oh<sup>2)</sup>, Pietruszczak & Mroz<sup>3)</sup> 등은 응력-변위곡선 아래 부분의 면적을 물성의 하나로 보는 Fracture 에너지 방법을 사용하였다. 이 면적은 단위면적을 가지는 단면이 하나의 완전한 크랙을 만드는 데에 필요한 에너지를 의미하며 다음의 정의로 표현 한다. (그림 3 참조)

$$G_f = \int \sigma du = \int \sigma \epsilon(s) ds \quad (7)$$

요소 하나의 넓이를  $w = L/m$  로 놓고 변형률 연화 현상이 하나의 요소에서만 일어난다고 가정하면 Fracture 에너지와 최종변위  $u_f$ 와의 관계를 얻는다.

$$d_u = \frac{2G_f}{f_t w} \quad (8)$$

이때 변형률 연화상수  $h$ 는

$$h = \frac{-Lf_t^2}{2mG_f - Lf_t^2/E} \quad (9)$$

로 유도되며, 이로부터  $h$ 가  $m$ 의 함수임을 알 수 있다.

이 모델(위 식의  $h$ )을 사용하여 그림 1의 실험을 다시 하면, 이전과 같이 약한 요소 I 에서만 소성 파괴가 일어나며, 평균변형률과 응력의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{d\sigma} = \frac{1}{E} - \frac{2G_f}{Lf_t^2} \quad (10)$$

위 식에서 보이는 바와 같이 이제 응력-평균변형률 곡선은 요소의 크기나 개수와 무관하며, 따라서 하중-끝단 변위 곡선도 같은 결과를 낳는다. 그러나 식 (10)이 부재의 길이  $L$ 을 포함하기 때문에 크기효과(size-effect)를 가지는 한계가 있으며, 특히  $L \rightarrow \infty$ 인 경우 탄성부재로 돌아가는 결과가 된다.

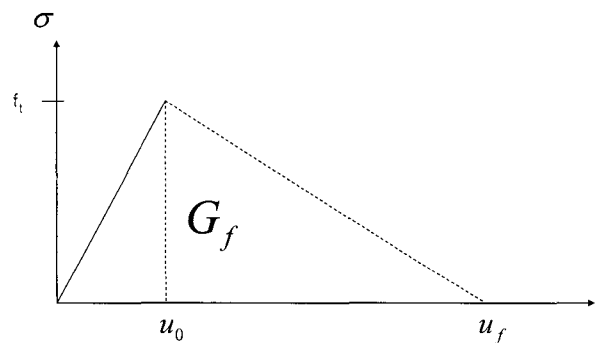


그림 3 Fracture Energy (두 삼각형 넓이의 합)

### 3. Non-Local 연속체 모델

Fracture 에너지 방법의 한계 중 하나는 파괴면의 두께  $w$ 가 유일하게 결정되지 않는 것으로 실제 실험이나 물리학적 사유와 맞지 않는다. 그 두께를 물성적인 개념으로 넣어주기 위하여 다음과 같은 전체적 의미의 변형률을 정의한다.

$$\bar{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} g(s)\epsilon(x+s)ds, \quad \Omega = [-L/2, L/2] \quad (11)$$

위 식에서  $g(s)$ 는 하중함수(weighting function)로  $\int_{\Omega} g(s)ds \approx 1$ 의 성질을 가지며 원래 각 지점에서 정의되는 변형률을 일종의 구간 대표 값으로 재 정의하는 역할을 한다. 오차함수(Error function)는 다음과 같이 표현되며,

$$Erf(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-u^2)du \quad (12)$$

그 kernel을 파괴면의 두께와 관계있는 물성변수  $2l$ 로 정규화 하여 식 (11)에 적용하면

$$\bar{\epsilon} = \int_{\Omega} \frac{1}{2l\sqrt{\pi}} \exp(-s^2/4l^2)\epsilon(x+s)ds \quad (13)$$

마지막으로 식 (13)을 식(2)에 적용하여

$$\sigma = f_t + h(\bar{\epsilon} - \epsilon_0) \quad (14)$$

의 관계를 유도한다. 이 방법은 물성인  $l$ 을 모든 경우에 미리 정해줘야 하는 단점이 있으며, 하중함수의 설정도 인위적이나 파괴면의 두께가 요소의 크기와 무관해진다. 계산적 측면에서는 변형률 계산을 위해 식(13)의 적분이 언제나 필요하므로 효율적이지 못하다.

### 4. Gradient 연속체 모델

Non-local 모델의 변형률인 식 (11)의  $\epsilon(x+s)$ 을  $s=0$ 에서  $x$ 에 대하여 테일러전개(Taylor series expansion)로 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon(x+s) = \epsilon(x) + \frac{d\epsilon(x)}{dx}s + \frac{1}{2} \frac{d^2\epsilon(x)}{dx^2}s^2 + \dots \quad (15)$$

식(15)의 3번째 항까지를 식(11)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &\approx \int_{\Omega} g(s) \left[ \epsilon(x) + \frac{d\epsilon}{dx}s + \frac{1}{2} \frac{d^2\epsilon}{dx^2}s^2 \right] ds \\ &= \epsilon(x) + \frac{1}{2} \frac{d^2\epsilon}{dx^2} \int_{\Omega} g(s)s^2 ds \end{aligned} \quad (16)$$

이며, 하중함수가 오차함수의 kernel인 경우 그 결과는

$$\bar{\epsilon}(x) = \epsilon(x) + l^2 \frac{d^2\epsilon}{dx^2} \quad (17)$$

이제 식(14)에 위 식을 적용하면 최종 관계식을 얻는다.

$$\sigma = f_t + h(\epsilon - \epsilon_0) + hl^2 \frac{d^2\epsilon}{dx^2} \quad (18)$$

위의 식은 원래의 Non-local 모델에 비하여 적분이 없으므로 효율적이며, 마지막 항이 계산을 안정화시키는 역할을 한다. 같은 일차원 봉의 문제를 계산한 해석해의 결과<sup>4)</sup>로부터 다음의 물성을 가정하면,

$$\sigma = f_t + h'\epsilon^p + h'l^2 \frac{d^2\epsilon^p}{dx^2} \quad (19)$$

변형률 연화가 생기는 구역의 넓이는  $w = 2\pi l$ , 평균변형률과 응력의 관계는

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{2\pi l}{Lh'} \quad (20)$$

가 된다.

### 5. Visco-Plasticity(점소성) 모델

일반 연속체모델에서 소성변형률의 시간변화율에 대한 응력변화를 첨가한 것이 점소성모델이다.

$$\sigma = f_t + h\epsilon^p + \eta\dot{\epsilon}^p \quad (21)$$

위 식에서 소성변형률  $\epsilon^p := \epsilon - \epsilon^e$  과 점성계수  $\eta > 0$  를 이용하였다. 식 (18)의 경우와 같이 식 (21)의 모델도 마지막 항이 문제를 안정화시키는 역할을 하며, 여기에 가속도를 고려한 운동방정식을 적용하면 일차원변위  $u$ 에 대한 최종 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta \left[ \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right] \\ + \left[ \frac{E+h}{c_e^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서  $c_e := \sqrt{E/\rho}$  는 일차원 탄성파의 속도,  $\rho$ 는 밀도를 나타내며 이 지배방정식은 유일한 해를 가지고 있다. Sluys<sup>5)</sup>는 이 문제에 대한 유한요소해석을 수행하여 정해에 대한 수렴성을 보였으며 변형이 집중되는 소성연화현상의 구간넓이

$$w = \frac{2\eta c_e}{E} \quad (23)$$

를 해석적으로 계산하였다. 위의 식에서 구간넓이는 점성계수의 함수이며, 따라서 넓이 자체가 물성이라기보다는

파괴가 일어나는 속도와 그것을 관찰하는 시간의 크기가 중요한 요소가 됨을 알 수 있다. 점소성 모델에서는 적절한 점성계수의 계산이 문제가 된다.

## 6. Strong Discontinuity(불연속 변위) 모델

불연속 변위<sup>(6,7)</sup>는 일반적인 적합성(compatibility) 가정을 제외하여 한 점에서 unit step function 타입의 변위를 허용한 것이다. 변형률연화 현상을 하나의 불연속(변위) 평면에서 발생하는 현상으로 이상화하고 불연속 평면에서의 응력-변위관계를 다음과 같이 정의 한다.

$$\sigma(d_s) = f_t + h_L d_s \quad (24)$$

여기서  $d_s$ 는 불연속 평면의 변위를 나타내고  $h_L$ 은 ‘응력/길이’의 단위를 가지는 변형연화 상수로 식 (24)가 일반적인 ‘응력-변형률’의 관계가 아닌 ‘응력-변위’의 관계임이 특징적이다. 전체 봉의 변위( $d$ )는 연속체의 변형률에 의한 부분( $d_c$ )과 불연속 변위에 의한 부분( $d_s$ )의 합이므로, 평균 변형률은

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma L + d_s}{L} \quad (25)$$

그리고 식 (24)로부터 얻은  $d_s = (\sigma - f_t)/h_L$ 을 위 식에 대입하면

$$\bar{\epsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{h_L L}\right)\sigma - \frac{f_t}{h_L L} \quad (26)$$

이 결과, 평균변형률과 응력의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{d\sigma} = \frac{E + h_L L}{E h_L L} \quad (27)$$

일반적으로  $E + h_L L \gg 0$ 의 가정아래  $h_L < 0$ 이므로 상수인 음의 기울기를 가지게 된다. 계산에 있어서의 한 가지 어려움은 변형연화가 일어나는 요소 I에서 step function 모양의 변위를 묘사할 수 있는 자유도를 추가해야 하는 점이다. 그러나 요소 자체의 크기나 위치를 변화시키지 않는다.

## 7. 맺는말

이상으로 연속체모델을 이용한 변형률연화 문제의 해석과 그에 대한 다섯 가지 개선된 모델을 예로 들었다. 위에 제시한 개선 모델들 이외에도 de Borst와 Sluys<sup>(8)</sup>가 제안한 탄소성 Cosserat 연속체의 미세구조 모델이나, H. Gao

와 P. Klein<sup>(9)</sup>이 고체 미세요소간의 위치에너지함수를 가정하여 만든 VIB(virtual internal bond) 모델 등의 미세구조를 이용한 연구가 활발히 진행되고 있다. 역학(Mechanics)의 역사에 비하면 취성 재료의 변형률 연화현상에 대한 연구는 그 역사가 길지 않다. 모든 모델들은 장점과 동시에 단점을 가지고 있으며 아직 모든 문제를 해결한 모델은 개발되지 않았다. 앞으로도 많은 연구가 필요한 분야이다.

## 참고 문헌

1. de Borst, R., A tutorial on localization and regularisation, *III Congreso de Metodos Numericos en Ingenieria*, 1996
2. Bazant, Z.P. & OH, B., Crack band theory for fracture of concrete, *RILEM Mater. Struct.*, Vol. 16, 1983, pp.153~177
3. Pietruszczak, S. & Mroz, Z., Finite element analysis of deformation of strain softening materials, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, 1981, pp.327~334
4. de Borst, R. & Muhlhaus, H.-B., Gradient-dependent plasticity:formulation and algorithmic aspects, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, 1992, pp.521~539
5. Sluys, L. J., Wave propagation, localization and dispersion in softening solids, *Ph.D. Dissertation, Delft Technological University, The Netherlands*, 1992
6. Simo, J.C., Oliver, J. & Armero, F., An analysis of strong discontinuities induced by softening solutions in rate independent Solids, *Journal of Computational Mechanics*, Vol. 12, 1993, pp.277~296
7. Larsson, J, Runesson, K & Ottosen, N. S., Discontinuous Displacement Approximation for Capturing Plastic Localization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp.2087~2105
8. de Borst, R. & Sluys, L. J., Localization in a cosserat continuum under static and loading conditions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 90, 1991, pp.805~827
9. Gao, H & Klein, P., Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bonds, *J. Mech. Phys. Solds*, Vol. 46, 1998, pp.187~218