

부가질량을 갖는 구속 외팔송수관의 비선형 동특성[#]

Nonlinear Dynamic Characteristics of Constrained Cantilever Tube with Attached Mass

정 구 충* · 임 재 훈** · 최 연 선[†]

Goo-Choong Jung, Jae-Hoon Lim and Yeon-Sun Choi

(2004년 1월 13일 접수 : 2004년 6월 10일 심사완료)

Key Words : Attached Mass(부가질량), Hopf bBifurcation(호프 분기), Critical Flow Velocity(임계 유속), Chaotic Motion(혼돈 운동), Bifurcation Diagram(분기 선도), Lyapunov Exponent(리아프노프 지수)

ABSTRACT

The nonlinear dynamic characteristic of a straight tube conveying fluid with constraints and an attached mass on the tube is examined in this study. An experimental apparatus with an elastomer tube conveying water which has an attached mass and constraints is made and comparisons are made between the theoretical results from the non-linear equation of motion of piping system and the experimental results. The comparisons show that the tube is destabilized as the magnitude of the attached mass increases, and stabilized as the position of the attached mass closes to the fixed end. In case of a small end-mass, the system shows complicated and different types of solutions. For a constant end-mass, the system undergoes a series of bifurcations after the first Hopf bifurcation, as the flow velocity increases, which causes chaotic motions of the tube eventually.

1. 서 론

유동유체를 갖는 배관계의 진동은 그 중요성으로 인해 많은 연구가 수행되어 왔다. 초기 연구는 관 내부로 흐르는 유체에 의한 관의 동특성의 연구가 대부분이었지만, 최근에는 단순 유체의 흐름뿐만 아니라 보다 복잡한 조건이 더해진 시스템에 대한 연구가 수행되고 있고, 초기의 선형 안정성 평가에서 벗어나 유체 송수관의 동특성에 대한 연구는 대부분 비선형

운동방정식을 유도하여 관의 비선형 동특성을 조사하기에 이르렀다.

Paidoussis⁽¹⁾는 유체유동관이 간극이 있는 구속조건이 있는 경우에 대한 연구를 수행 하였고, 그 후 Paidoussis⁽²⁾는 부가질량(attached mass)에 의해 발생하는 관의 비선형 동특성, 즉, 분기현상(bifurcation), 다주기운동(multiple periodic motion), 혼돈운동(chaotic motion) 등에 대하여 조사하였다. 류봉조⁽³⁾는 부가질량의 위치와 크기의 변화에 따른 배관계의 동적 안정성을 검토하였고, 외부 외란에 의한 파이프의 진동을 줄이기 위해 내부 유동유체 유속을 조절하는 배관계의 능동제어기술을 개발하였다. Fricke⁽⁴⁾는 U형관에 2개 이상의 구속바(motion constraint bar)가 존재할 때, 관과 구속바 사이에 발생하는 충격과 이로 인해 발생하는 관의 진동현상을 연구하였다. Jin⁽⁵⁾은 스프링으로 지지된 관에 대하여 스프링 상수와 내부 유속의 변화에 따른 관의 동특성의

[†] 책임저자 : 정희원, 성균대학교 기계공학과 교수

E-mail : yschoi@yurim.skku.ac.kr

Tel : (031) 290-7440, Fax : (031) 290-5849

* 정희원, 대림산업(주)

** 정희원, 성균관대학교 기계진동연구실

[#] 본 논문은 2003 추계학술대회에서 우수 발표논문으로 추천되었음.

변화를 조사하였다. Lee⁽⁶⁾는 양단지지 유체 송수관의 거동에 대한 비선형 운동방정식을 유도하였고, Li⁽⁷⁾와 Semler⁽⁸⁾는 외팔 수직관(cantilever pipe)의 비선형 운동방정식을 유도하였다. 한편, 임재훈⁽⁹⁾은 관의 설계변수 변화에 따른 송수관의 동특성 변화에 대하여 조사하였고, 설계변수의 변화에 따른 혼돈운동의 가능성을 제시하였다. Yamashita⁽¹⁰⁾는 스프링지지된 외팔송수관에 대하여 관 진동의 진폭과 위상이 포함된 운동방정식으로부터 평면운동이 아닌 3차원 운동에 대한 연구를 수행하였고, 지지된 비대칭 스프링에 따른 관의 안정성에 대해 조사하였다.

본 연구에서는 구속바가 있고, 관에 부가집중질량이 부착되어있는 경우, 집중질량의 위치와 크기의 변화에 따른 관의 동특성에 대하여 조사하였다. 이미 부가질량을 포함한 외팔송수관의 동특성에 대해 많은 연구가 수행되었으나 구속바와 부가질량이 함께 있는 시스템에 대한 연구는 수행된 바 없다. 이러한 시스템은 슬리브(sleeve)가 포함된 관의 중간에 밸브 혹은 플랜지(flange) 등이 장착된 경우에 해당된다.

2. 부가질량이 포함된 외팔송수관의 운동방정식

본 연구에 사용된 시스템은 Fig. 1에서와 같이 길이 L 인 외팔 수직관으로 되어 있으며 s_a 와 s_b 에 각각 부가질량 M_a 와 구속바가 있다. 여기서 관 내부로 흐르는 유체의 유속 U 는 일정하다고 가정한다. 또한 운동 방정식에 사용한 좌표축은 s 이며, 오일러 좌표계(eulerian coordinate) 즉, 변형된 관내 질점 위치에서의 좌표축이다. 이 경우 관의 운동 방정식은 다음과 같다.^(3,9)

$$\begin{aligned}
 & [m + M + M_a \delta(s - s_a)] \ddot{y} + 2M\dot{y}'(1 + y'^2) \\
 & + [m + M + M_a \delta(s - s_a)] g y'(1 + \frac{1}{2} y'^2) \\
 & + y' [M^2(1 + y'^2) \\
 & - (1 + \frac{2}{3} y'^2) \int_s^L (m + M + M_a \delta(s - s_a)) g ds] \\
 & + EI [y''''(1 + y'^2) + 4y' y'' y''' + y''^3] \\
 & - y' [\int_s^L (m + M + M_a \delta(s - s_a)) \int_0^s (\dot{y}^2 + y' \dot{y}') ds] ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_s^L (2M y' \dot{y}' + M^2 y' y'') ds \\
 & + y' [m + M + M_a \delta(s - s_a)] \int_0^s (\dot{y}'^2 + y' \dot{y}') ds \\
 & + k(y - 0.5(|y + y_b| - |y - y_b|)) \delta(s - s_b) = 0
 \end{aligned}$$

여기서, E 는 관의 탄성계수(Young's modulus)이며, y_b 는 관과 구속바 ξ_b 사이의 거리이다. 또한 $(\dot{\quad})$ 와 $(\quad)'$ 는 시간 t 와 관의 길이 s 에 대한 미분을 각각 나타낸다.

식 (1)에서 관 재료를 켈빈-보이트(Kelvin-Voigt) 모델 형태로 표현하면,

$$E \rightarrow E(1 + a \frac{\partial}{\partial t}) \tag{2}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 다시 식 (3)의 무차원 변수를 이용하여 식 (1)을 무차원화 하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{s}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \tau = \left(\frac{EI}{m+M}\right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \\
 \alpha &= \left(\frac{EI}{m+M}\right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, u = \left(\frac{M}{EI}\right)^{1/2} UL, \\
 \gamma &= \frac{m+M}{EI} L^3 g, \beta = \frac{M}{m+M}, \\
 \phi &= \frac{M_a}{(m+M)L}, x = \frac{kL^3}{EI}
 \end{aligned} \tag{3}$$

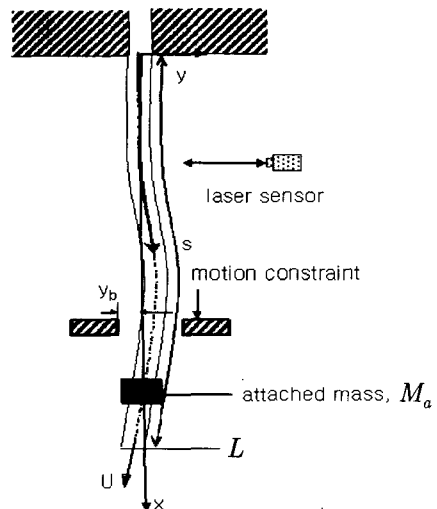


Fig. 1 Schematic of the system

$$\begin{aligned}
 & \alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + [1 + \phi\delta(\xi - \xi_a)] \ddot{\eta} \\
 & + 2\alpha\sqrt{\beta} \dot{\eta}' (1 + \eta'^2) \\
 & + \eta' \left[u^2 - \gamma \int_{\xi}^1 (1 + \phi\delta(\xi - \xi_a)) d\xi \right] \\
 & + \chi [1 + \phi\delta(\xi - \xi_a)] \eta' \\
 & + \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [\eta'''' \eta'^2 + 4\eta' \eta'' \eta'''' + \eta''^3] \quad (4) \\
 & + \eta' [1 + \phi\delta(\xi - \xi_a)] \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi \\
 & - \eta' \left[\int_{\xi}^1 [1 + \phi\delta(\xi - \xi_a)] \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi \right. \\
 & \left. + \int_{\xi}^1 (2\alpha\sqrt{\beta} \eta' \dot{\eta}' + u^2 \eta' \eta'') d\xi \right] \\
 & + \chi (\eta - \frac{1}{2} (|\eta + \eta_b| - |\eta - \eta_b|)) \delta(\xi - \xi_b) = 0
 \end{aligned}$$

여기서, 기존의 여러 연구자들은 α 에 의한 비선형 항들을 무시하였으나, α 항에 의해서 관의 혼돈운동 등 비선형 현상이 발생하므로⁽⁹⁾, 본 연구에서는 이 항들을 포함하였다. 식 (4)를 Galerkin 방법을 통하여 변수분리하면 식 (6)과 같다. 이때, 가정한 해는 아래와 같고 이 때, $\phi_i(\xi)$ 는 외팔보의 고유모드함수이다

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_i^N \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & [\delta_{ij} + \phi\phi_i(\xi_b)\phi_j(\xi_b) + \gamma_{ijkl} q_k q_l] \ddot{q}_j \\
 & + C_{ij} \dot{q}_j + K_{ij} q_j + \alpha_{ijkl} q_k q_l + \beta_{ijkl} q_k \dot{q}_l \\
 & + \gamma_{ijkl} q_j \dot{q}_k \dot{q}_l + a_{ijkl} \dot{q}_j q_k q_l + 2a_{ijkl} q_j q_k \dot{q}_l \\
 & + 4b_{ijkl} (\dot{q}_j q_k q_l + q_j \dot{q}_k q_l + q_j q_k \dot{q}_l) \\
 & + 3c_{ijkl} q_j q_k \dot{q}_l + \chi \phi_{jb} \left[\sum_i \phi_{ib} q_i \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\left| \sum_i \phi_{ib} q_i + \eta_b \right| - \left| \sum_i \phi_{ib} q_i - \eta_b \right| \right) \right] = 0, \\
 & C_{ij} = \alpha \lambda^4 \delta_{ij} + 2\sqrt{\beta} u \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi, \\
 & K_{ij} = \lambda^4 \delta_{ij} + 2\sqrt{\beta} u \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \\
 & + \chi \left(\int_0^1 \xi \phi_i \phi_j'' + \int_0^1 \phi_i \phi_j' \right)
 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, δ_{ij} 는 Kroneker's delta이며, 또한 $\alpha_{ijkl}, \beta_{ijkl}, \gamma_{ijkl}, a_{ijkl}, b_{ijkl}, c_{ijkl}$ 등은 수치적으로 계산할 수 있다.⁽⁸⁾

3. 외팔송수관의 진동 실험

본 연구에서 관의 진동현상을 실험으로 확인하기

Table 1 Parameters of the test setup

Test tube	Silicon rubber
Fluid	Water
Length of the tube, L (m)	0.6
Outside diameter, d_o (m)	0.011
Inside diameter, d_i (m)	0.0076
Area moment of inertia, I (m ⁴)	5.55×10^{-10}
Mass of the tube per unit length, m (kg/m)	0.006247
Mass of the fluid per unit length, M (kg/m)	0.04527
Young's modulus, E (N/m ²)	4.041×10^6
Mass ratio, β	0.87874
Coefficient of Kelvin-Voigt damping, Ea (Ns/m ²)	0.8173×10^5
Laser sensor position, x_L (m)	0.0766
Motion constraint position and gap between the tube and constraint, s_b, y_b (m)	0.28905, 0.0155
Attached mass position, s_a (m)	0.6
Mass of the attached mass, M_a (g)	1, 2, 3
Nondimensional parameters $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$	0.01172, 0.8787, 48.683, 7.545×10^4



Fig. 2 Experimental apparatus

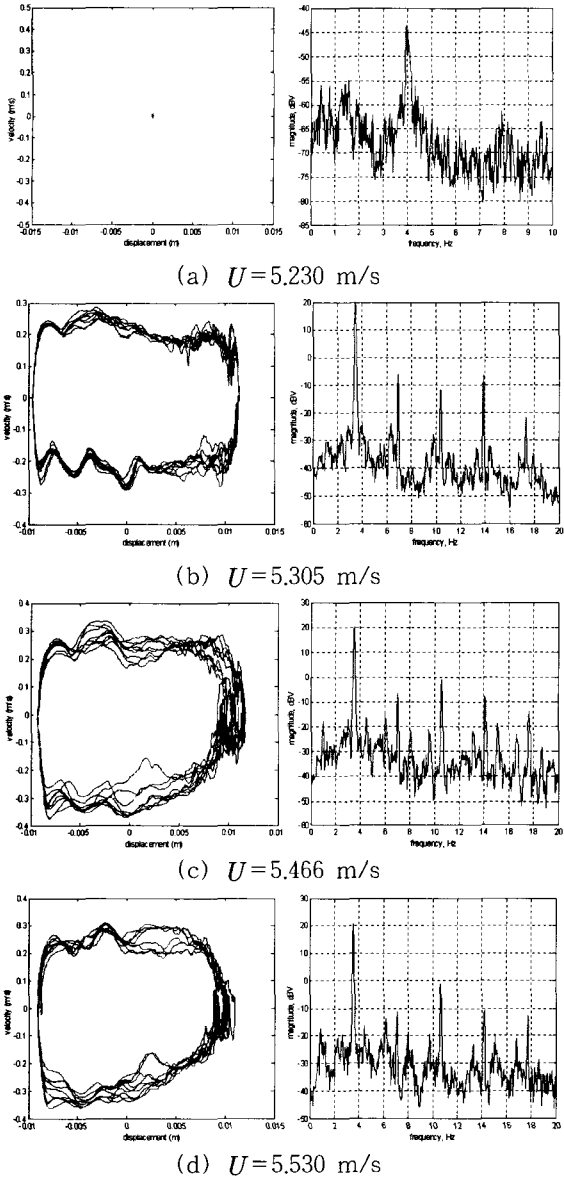


Fig. 3 Phase diagrams and power spectra of the tube for $\psi=0.0323$

위해 Fig. 2와 같은 실험 장치를 제작하였다. 실험 장치의 설계변수는 Table 1에 명시하였다.⁽⁹⁾ 유량의 변화를 위해 펌프에 연결된 인버터(Sv-iG inverter, Starvert Co.)를 사용하여 펌프 모터 회전수를 조절하여 유속을 변화시켰다. 관의 진동은 레이저센서(Graham&White laser sensor M5L/20)로 측정하고 FFT 분석기(ONOSOKI CF-350)로 분석하고 동시에 AD 보드(NI-707E, National Instrument Co.)를 통해 변환된 데이터를 컴퓨터에 저장하였다.

외팔송수관은 유속이 증가함에 따라 플러터(flutter)가 발생한다. 이것은 부가질량이 있을 때도 마찬가지로 실험을 통해 확인할 수 있으며, Fig. 3에서 보는 바와 같이 플러터가 발생하는 현상, 즉 호프 분기(Hopf bifurcation)가 발생하기 전에는 관의 거동이 나타나지 않으므로 Fig. 3(a)의 위상선도(phase diagram)에서는 하나의 점으로 나타나지만 호프 분기가 발생한 후에는 위상선도에서의 거동이 한계사이클(limit cycle)로 나타난다. 또한 Fig. 3에서 유속이 증가함에 따라 응답 스펙트럼 상에 기본주파수의 아조화(subharmonics) 성분들이 나타남에 따라 위상선도에서는 2주기 이상의 거동, 즉 주기배가 분기(period doubling bifurcation) 현상이 발생함을 알 수 있다. Fig. 4는 부가질량이 없을 경우와 있을 경우 각각에 대해서 분기 선도를 나타낸다. Fig. 4에서 볼 수 있듯

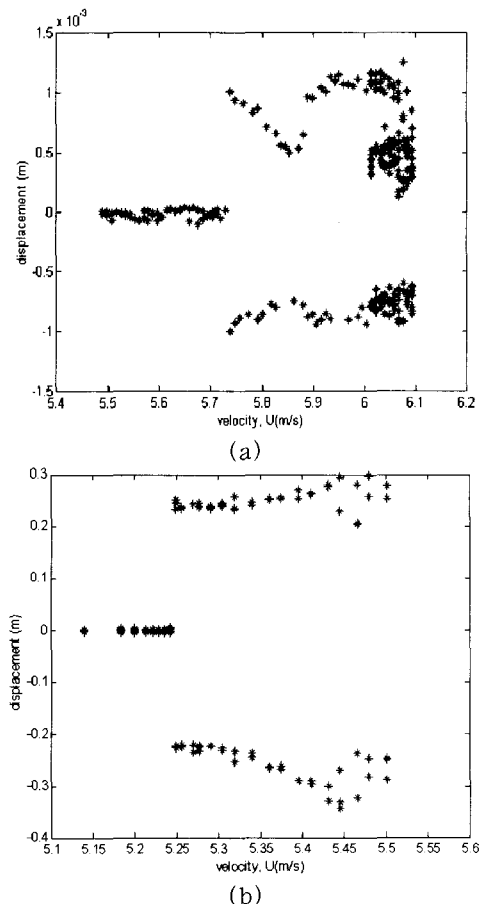


Fig. 4 Bifurcation diagrams of the system: (a) without attached mass and (b) with attached mass $\psi = 0.1$

이 부가질량에 의해 호프분기 유발 유속과 주기배가 분기 유발 유속이 감소하는 것을 알 수 있다.

4. 수치해석

앞장에서 유도한 운동방정식을 수치해석하기 위해 식 (6)을 식 (7)과 같이 상태방정식 형태로 변환하였다.

$$\{\dot{y}\} = [A]\{y\} + F(\{y\}) \tag{7}$$

여기서, $\{y\} = \{q, \dot{q}\}^T$ 이다. 시스템을 2자유도로 가정하여 식 (7)을 룬지-쿠타 알고리즘(Runge-Kutta algorithm)으로 수치해석하였다.

부가질량의 위치가 $\xi_a = 1$ 이고 질량이 각각 $\psi = 0.0323, 0.0647$ 일 때의 수치해석 결과를 위상선도와

Table 2 Comparison between experiment and theory of the flow velocity corresponding to the Hopf bifurcation

	By experiment	By theory
$\psi = 0.0323$	$U_H = 5.24$ m/s	$U_H = 5.28$ m/s
$\psi = 0.0647$	$U_H = 4.98$ m/s	$U_H = 4.85$ m/s
$\psi = 0.097$	$U_H = 2.61$ m/s	$U_H = 2.45$ m/s

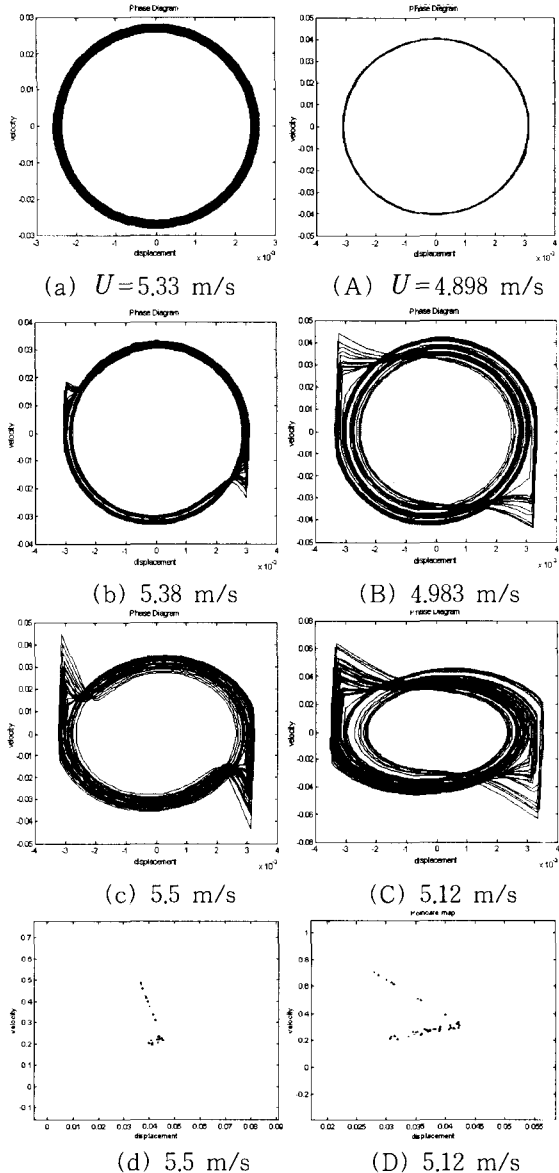


Fig. 5 Phase diagrams of the system for $\xi_a = 1$ and $\psi = 0.0323$: (a), (b), (c), $\psi = 0.0647$: (A), (B), (C) and Poincaré maps for $\psi = 0.0323$: (d), $\psi = 0.0647$: (D)

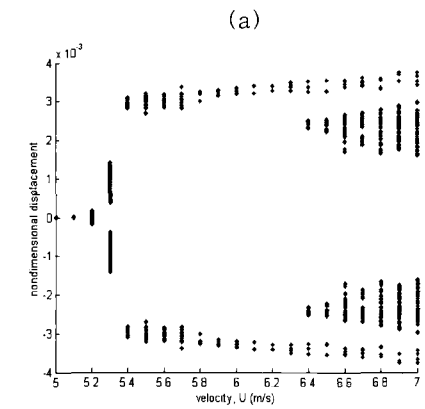
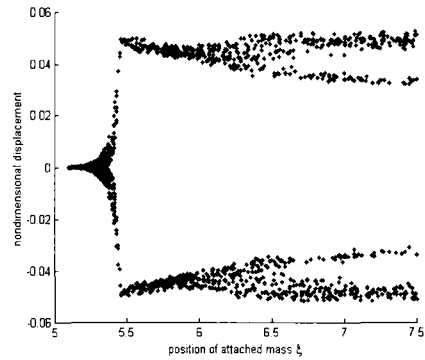


Fig. 6 Bifurcation diagrams of the system by numerical analysis: (a) without attached mass and (b) with attached mass $\psi = 0.1$

프앵카레 사상(Poincare map)으로 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 5(a)에서는 $\psi=0.0323$, $U=5.33$ m/s일 때, 호프분기 이후의 한계사이클(limit cycle)을, (b)에서는 구속바에 부딪히면서 나타나는 안정 한계사이클을 나타내고 (c)에서는 여러 주기의 운동을 나타낸다. 그리고 (d)에서는 $U=5.5$ m/s 일 때 혼돈운동이 발생함을 프앵카레 사상(poincare map)을 통해 나타내었다. Fig. 5(A), (B), (C)에서는 $\psi=0.0647$ 로 부가질량이 증가함에 따라 호프분기가 발생하는 임계유속이 감소함을 보여주고 있으며 유속이 증가함에 따라 주기배가분기와 혼돈운동이 발생할 뿐만 아니라 $\psi=0.0323$ 에 비해 분기 유발유속이 감소하며 혼돈운동이 보다 낮은 유속에서 나타남을 알 수 있다. 또한 Fig. 5(D)는 $\psi=0.0647$ 이며 $U=5.12$ m/s일 때 관의 혼돈운동이 발생함을 프앵카레 사상으로 도시한 것이다.

부가질량의 증가에 따른 임계유속 변화에 대해 실

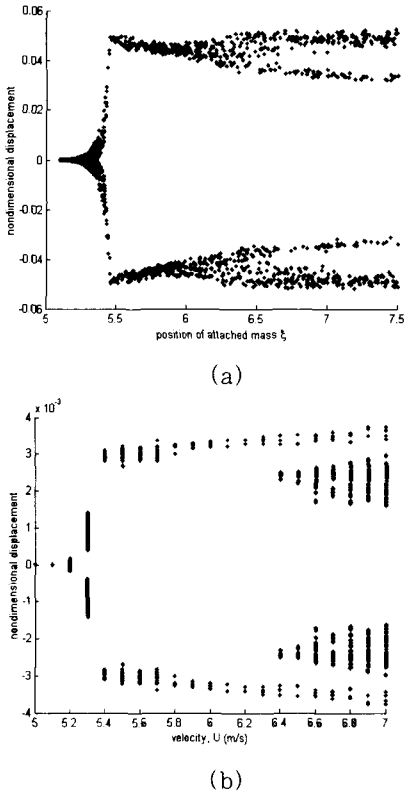


Fig. 6 Bifurcation diagrams of the system by numerical analysis: (a) without attached mass and (b) with attached mass $\psi = 0.1$

험 결과와 수치해석 결과를 비교한 것을 Table 2에 나타내었다. Table 2에서는 실험과 수치해석이 잘 일치함을 보여준다. 따라서 끝단에 부가질량이 있으면

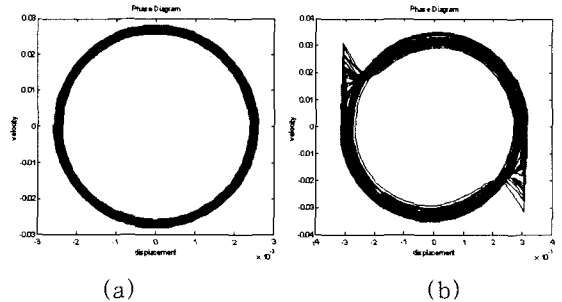


Fig. 7 Phase diagrams of the system for $\xi_a = 1$, $\psi = 0.0323$ and $U = 5.33$ m/s with non-linear terms by viscoelastic damping coefficient: (a), without nonlinear terms: (b)

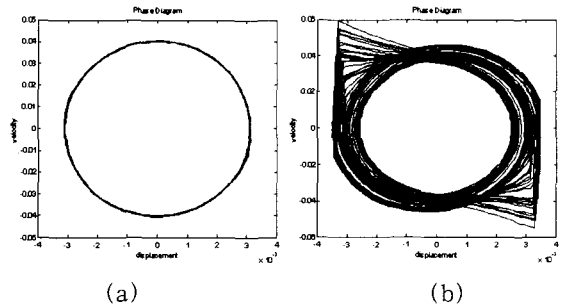


Fig. 8 Phase diagrams of the system for $\xi_a = 1$, $\psi = 0.0647$ and $U = 4.898$ m/s with non-linear terms by viscoelastic damping coefficient: (a), without nonlinear terms: (b)

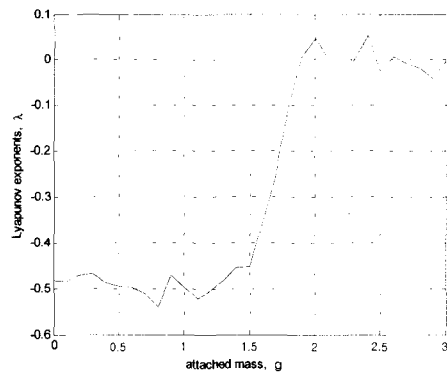


Fig. 9 Lyapunov exponents of the system for $\xi_a = 1$, $U = 5$ m/s

유체유동관은 같은 유속에서도 더욱 불안정해지며 혼돈운동의 발생 가능성도 존재함을 알 수 있다.

Fig. 6에서는 부가질량이 없을 때와 있을 때, 각각에 대해서 수치해석을 하여 분기 선도로 도시한 것이다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 부가질량에 의해 임계 유속이 감소함을 알 수 있고, 보다 복잡한 혼돈운동이 발생할 수 있음을 알 수 있다. 또한 점탄성 댐핑 항에 의해서 나타난 비선형 항들의 영향에 대해서 조사하기 위해 Fig. 7과 Fig. 8과 같이 부가질량 ψ 가 각각 0.0323과 0.0647일 때 비선형항의 유무에 따른 위상선도를 비교하여 도시하였다. 각각의 그림에서 보는 바와 같이 점탄성 계수에 의한 비선형 항이 식 (6)에서 생략됨에 따라 관의 거동이 불안정해짐을 알 수 있다. 즉, $\psi=0.0323$ 일 때, 같은 유속 $U=5.33$ m/s에서도 관의 거동이 복잡해짐을 Fig. 7에서 알 수 있으며, 마찬가지로 Fig. 8에서도 같은 질량, 유속에서 비선형 항이 생략됨에 따라 분기유발유속이 감소하여 관 거동이 불안정해짐을 알 수 있다. 따라서, 점탄성 계수에 의한 비선형 항이 생략되면, Table 2에서의 실험결과와 일치하지 않게 된다.

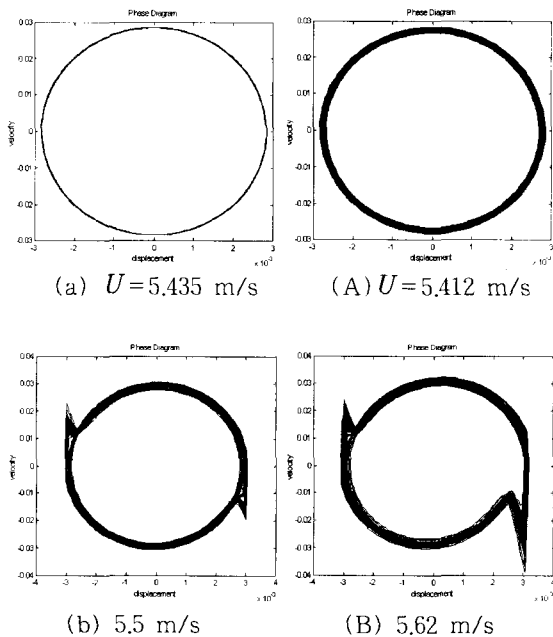


Fig. 10 Phase diagrams of the system for $\xi_a=0.35$ and $\psi=0.0323$: (a) and (b), $\psi=0.0647$: (A) and (B)

5. 부가질량 위치 및 크기의 영향

Fig. 9는 유속 $U=5$ m/s일 때, 부가질량의 변화에 따른 리아프노프 지수(Lyapunov exponent) 지수를 계산한 결과이다. Fig. 9에서 부가질량의 크기가 2g이 됨에 따라 같은 유속에서도 혼돈운동이 발생함을 알 수 있다. 또한, 부가질량 영향에 대해 조사하기 위해서 Fig. 5에서와 같이 부가질량이 $\psi=0.0323, 0.0647$ 이고, $\xi_a=0.35$ 일 때의 관의 거동을 Fig. 10에 도시하였다. Fig. 10에서 보는바와 같이 Fig. 7, 8과 비교하여 부가질량의 위치가 고정단 방향으로 옮겨감에 따라 호프분기를 유발하는 임계유속이 증가하는 것을 확인하였다. 즉 $\psi=0.0323$ 일 때는 $\xi_a=1$ 에서 관의 임계유속이 5.28 m/s이었으나 $\xi_a=0.35$ 에서는 5.43 m/s로 증가하였고, $\psi=0.0647$ 일 때는 임계유속이 4.85 m/s에서 5.4 m/s로 증가하였다. 또한 Fig. 11은 질량의 크기가 $\psi=0.0647$ 이고 끝단에 있을 때 혼돈운동이 발생하였던 유속 $U=5.12$ m/s에 대해서 질량위치의 변화에 따른 분기선도이다. Fig. 11에서는 일정한 유속에 대해서 부가질량이 자유단에서 고정단 쪽으로 이동함에 따라 불안정, 즉, 혼돈운동이 발생하였던 관이 안정해 지는 것을 확인할 수 있다. 따라서, 부가질량의 위치에 따라 관의 동특성이 변하게 되며, 혼돈운동 발생을 방지할 수 있음을 알 수 있다.

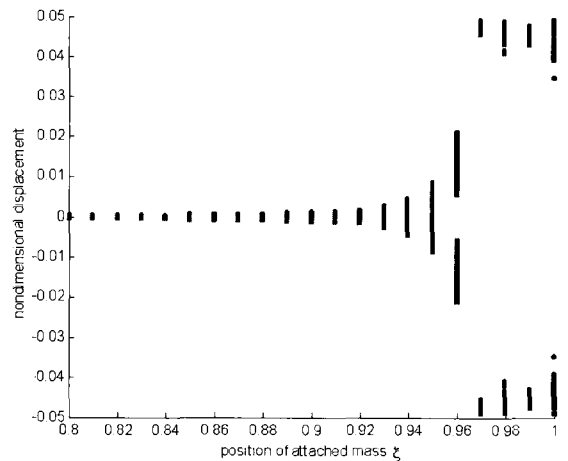


Fig. 11 Bifurcation diagram of the system for $\psi=0.0647$

6. 결 론

본 연구에서는 부가질량이 외팔송수관의 동특성에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 이 연구를 위해 실험 장치를 구성하여 부가질량의 크기 변화에 대한 실험을 수행하였고 이를 모델링한 비선형 운동방정식의 수치해와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

부가질량의 크기가 증가함에 따라 호프 분기가 발생하는 임계유속이 감소한다. 즉, 같은 유속에서도 부가질량의 크기가 커짐에 따라 안정적이던 관의 거동이 불안정해지고 혼돈운동의 가능성도 커짐을 확인할 수 있었다. 또한, 부가질량의 크기가 일정하고 위치가 자유단에서 고정단으로 옮겨 갈수록 임계유속이 증가하며 관의 거동이 더욱 안정화됨을 알 수 있었다. 따라서 부가질량의 위치와 크기에 의해 관의 동특성이 현저하게 달라질 수 있으며, 설계 시 부가질량이 외팔송수관에 미치는 영향을 고려해야 함을 알았다. 또한 관의 점탄성 댐핑에 의한 비선형 항들이 생략됨에 따라 수치해석상 관의 거동이 불안정해짐으로 실험에서 관찰한 결과와 다르게 된다. 따라서 본 연구에서와 같은 배관계의 동특성을 수치해석함에 있어서 점탄성 계수에 대한 비선형 항들이 중요해짐을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Paidoussis, M. P., Li, G. X. and Moon, F. C., 1989, "Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 1~19.
- (2) Paidoussis, M. P. and Semler, C., 1998, "Non-linear Dynamics of a Fluid-conveying Cantilevered Pipe with a Small Mass Attached at the Free End," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 33, No. 1, pp. 15~32.
- (3) 류봉조, 정승호, 이종원, 2000, "유체유동에 의한 유연한 파이프의 불안정과 진동억제에 미치는 부가질량의 영향," *한국소음진동공학회논문집*, 제 10 권, 제 2 호, pp. 280~290.
- (4) Fricker, A. J., 1992, "Numerical Analysis of the Fluidelastic Vibration of a Steam Generator Tube with Loose Supports," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 6, pp. 85~107.
- (5) Jin, J. D., 1997, "Stability and Chaotic Motions of a Restrained Piped Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 208, No. 3, pp. 427~439.
- (6) Lee, S. I. and Chung, J., 2002, "New Non-linear Modelling for Vibration Analysis of a Straight Pipe Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2, pp. 313~325.
- (7) Li, G. X. and Paidoussis, M. P., 1994, "Stability, Double Degeneracy and Chaos in Cantilevered Pipes Conveying Fluid," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 83~107.
- (8) Semler, C., 1996, "Pipe Conveying Fluid: a paradigm of Nonlinear Dynamics," Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering, McGill University, Montreal, Canada.
- (9) 임재훈, 정구충, 최연선, 2003, "시스템 규명을 통한 외팔 송수관의 비선형 동적 거동 해석," *한국소음진동공학회 춘계학술대회논문집*, pp. 495~500.
- (10) Yamashita, K., Yoshizawa, M., Agata, J. and Motoki, A., 2003, "Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsatile Flow (Effect of an Asymmetric Spring Supported End)," *Proceedings of DETC'03 ASME 2003, DETC2003/VIB48600*.