

출력의 미분항을 사용하지 않는 적응 관측기 설계 방법

論 文
53D-6-2

Design of an Adaptive Observer without Using Output Derivative Measurements

孫 瑛 翼* · 沈 亨 輔** · 白 柱 薰*** · 趙 南 熏⁹
 (Young-Ik Son · Hyungbo Shim · Juhoon Back · Nam-Hoon Jo)

Abstract - By using an adaptive algorithm, together with an additional dynamic system, this paper proposes a new approach to design of a state observer for a class of uncertain systems. We enlarge the class of linear systems from the canonical form of [1] by proposing an adaptive observer that allows unknown parameters to affect those unmeasured states. The result is based on a recent result which presents a design algorithm for an additional system to replace output derivative measurements with the additional dynamics. A numerical example illustrates the design procedure of the state observer.

Key Words : Adaptive Observer, Linear System, Unknown Parameter, Parameter Adaptation, Output Derivative Measurement

1. 서 론

미지의 파라미터가 존재하는 시스템에 대하여 적응 알고리즘을 이용한 관측기 설계 방법은 많은 관심을 받아왔다 [2-6]. 그 첫 결과는 선형 시불변 시스템에 대한 참고문헌 [2]의 결과이다.

파라미터에 대한 적응 알고리즘을 가진 관측기의 첫 번째 목표는 시스템의 상태 변수를 추정하는 것이고, 미지의 파라미터를 알아내는 것은 그 부차적인 목표라고 할 수 있다. 하지만, 적응 관측기에 대한 많은 결과들에서 두 문제는 서로 연관되어 다루어지고 있고, 따라서 미지의 파라미터를 먼저 식별하는 과정을 거친 후 Luenberger 관측기의 형태로 시스템의 상태 변수를 추정하게 한다 [7].

본 논문에서는 파라미터의 식별을 위한 어떤 조건이나 가정 없이 시스템의 상태 변수를 추정하는 관측기 본래 목적에 관심을 둔다. 이런 연구 방향으로서 최근의 참고문헌 [1]에서는 대부분의 적응 관측기를 정리하고, 그 결과들이 모두 공통된 표준형(canonical form)을 가짐을 보였다. 주목할 점은 그 표준형을 살펴보면 추정되지 않는 상태 변수를 표현하는 식에는 미지의 파라미터가 나타나지 않는다는 것을 알 수 있다.

본 논문은 적응 알고리즘과 더불어 추가 시스템을 구성하는 새로운 관측기 설계 방법을 제안하여 참고문헌 [1]의 표준형으로 표현될 수 없는 시스템에 대한 상태 변수를 추정

한다. 즉, 불확실성이 존재하는 시스템의 관측기 구성에서 그 대상 시스템의 범위를 넓히는데 목표를 둔다. 이 때, 추가 시스템을 구성하는 방법에 대한 결과는 제어 입력에서 미분항을 대체하고자 추가 시스템을 구성하는 제어기 설계 방법으로부터 착안할 수 있었다 [8,9].

다음 장에서는 논문에서 다루는 대상 시스템과 기존의 적응 관측기에 대해 간단히 소개하고, 기본 사항으로 추가 시스템 구성에 대한 이해를 위해 미분항을 대체하는 제어기 설계 방법의 결과를 정리하였다. 3장에서는 기존 논문과 다른 형태의 불확실성을 갖는 시스템에 대하여 추가 시스템을 이용하는 새로운 형태의 적응 관측기를 설계하고, 간단한 예제를 통한 관측기 설계 방법을 4장에서 설명하였다.

논문에서 x 가 벡터일 때 $\|x\|$ 는 $\sqrt{x^T x}$ 이고, I_n 은 $n \times n$ 단위행렬을 뜻한다. 행렬 A 의 고유치는 $\lambda(A)$ 로 표시하고, 행렬의 가장 큰 특이치는 $\|A\|$ 로 나타내었다.

2. 문제 정의와 기존 정리들

2.1 문제 정의

참고 문헌 [1]에서는 미지 계수들의 식별 과정 없이 시스템의 상태 변수를 직접 추정하는 기존의 관측기에 대한 통일된 구조를 제시하였다. 즉, 미지의 계수 θ 에 대한 식별 없이 상태 변수 x 를 추정하는 거의 모든 적응 관측기들은 아래와 같은 표준형으로 나타낼 수 있음을 보였다¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_y y + A_{23} z + B_1 u + G_1 \theta \\ \dot{z} &= A_{21} y + A_z z + B_2 u. \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서 $y \in R^p$ 는 시스템의 출력; $u \in R^m$ 는 제어 입력;

1) 참고 문헌 [1]에서는 비선형 시스템에 대한 관측기를 다루고 있으나, 본 논문에서는 선형 시스템에 대한 결과만을 다루기로 한다.

* 正 會 員 : 明知大 工大 電氣工學科 助教授
 ** 正 會 員 : 서울대 工大 電氣컴퓨터工學部 助教授
 *** 正 會 員 : 서울대 工大 電氣컴퓨터工學部 Post Doc.
⁹ 正 會 員 : 崇實大 工大 電氣制御시스템工學部 專任講師
 接受日字 : 2003年 3月 11日
 最終完了 : 2003年 8月 22日

$\theta \in \mathbb{R}^q$ 는 미지의 상수 계수; $z \in \mathbb{R}^r$ 는 측정할 수 없는 상태 변수이며, 행렬 A_z 는 안정하다고 가정한다 (즉, 모든 고유치 $\lambda(A_z)$ 는 음의 실수부를 가진다). 다시 말해 관측기가 설계 가능한 시스템 방정식에 적절한 좌표변환을 적용하면 항상 (1)과 같은 형태로 쓸 수 있음을 말한다.

식 (1)에서 미지 계수 θ 는 측정할 수 없는 상태 변수인 z 에 영향을 미치지 않음에 주목한다. 논문 [1]에서 밝힌 바와 같이 시스템 (1)에 대한 관측기 구성은 어렵지 않게 이룰 수 있다.

본 논문에서는 다음과 같이 표현되는 시스템의 관측기 구성 문제를 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}z + B_1u + G(t)\theta \\ \dot{z} &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}z + B_2u \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (2)$$

단, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p, \theta \in \mathbb{R}^q, G(t) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 이고, $z \in \mathbb{R}^r$ 이다. 알려진 시변(time varying) 행렬 계수 $G(t)$ 와 그 미분 $\dot{G}(t)$ 는 유계(bounded)이다.

시스템 식 (2)는 논문 [1]의 형태인 (1)로써는 표현될 수 없음이 자명하다. 하지만, 측정 가능한 상태 변수인 출력 $y = x_1$ 의 미분인 $\dot{y} = x_2$ 도 측정 가능하다고 가정하면, 식 (2) 역시 식 (1)과 같은 형태로 쓸 수 있다. 그 때 적용 관측기는 아래와 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 - k_1(\hat{x}_1 - x_1) \\ \hat{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}\hat{x}_2 + A_{23}\hat{z} + B_1u \\ &\quad + G(t)\hat{\theta} - k_2(\hat{x}_2 - x_2) \\ \hat{z} &= A_{31}x_1 + A_{32}\hat{x}_2 + A_{33}\hat{z} + B_2u \\ \hat{\theta} &= -G^T(t)(\hat{x}_2 - x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

단, k_1 과 k_2 는 적당히 큰 양수이다.

위의 관측기 (3)의 수렴성을 조사하기 위하여 $x := [x_1 \ x_2]^T, \hat{x} := [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T, e := \hat{x} - x, e_z := \hat{z} - z$ 이고, $\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta$ 라 정의하자. 그러면, 시스템 (2)와 관측기 (3)사이의 오차 시스템은 아래와 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= (A_{22} - k_2I_p)e_2 + A_{23}e_z + G(t)\tilde{\theta} \\ \dot{e}_z &= A_{33}e_z + A_{32}e_2 \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -G^T(t)^T e_2. \end{aligned} \quad (4)$$

행렬 A_z 가 안정하므로 다음 식을 만족하는 양한정 행렬 P_z 와 Q_z 를 찾을 수 있다 [10]:

$$P_z A_z + A_z^T P_z = -Q_z < 0. \quad (5)$$

다음과 같이 리아푸노프(Lyapunov) 함수를 택하여

$$V(e_1, e_2, e_z, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e_1^T e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2 + \frac{1}{2} e_z^T P_z e_z + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}. \quad (6)$$

시스템 (4)를 따라 미분하면 Schwarz 정리에 의하여 아래 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 e_1^T e_1 + e_1^T e_2 - e_2^T (k_2 I_p - A_{22}) e_2 \\ &\quad + e_2^T (A_{32}^T P_z + A_{23}) e_z - \frac{1}{2} e_z^T Q_z e_z \\ &\leq -k_1 |e_1|^2 + \frac{1}{2} |e_1|^2 + \frac{1}{2} |e_2|^2 + \|A_{22}\| |e_2|^2 \\ &\quad - k_2 |e_2|^2 + \frac{1}{4\delta} \|A_{32}^T P_z + A_{23}\|^2 |e_2|^2 \\ &\quad + \delta |e_z|^2 - \frac{1}{2} e_z^T Q_z e_z. \end{aligned} \quad (7)$$

단, δ 는 임의의 양수이다. 부등식 $e_z^T Q_z e_z \geq \delta |e_z|^2$ 를 만족하는 상수 δ 에 대해서 충분히 큰 양수 k_1 과 k_2 에 의하여 위 식은 항상 음의 반한정이다. 따라서, 오차 시스템 (4)는 리아푸노프 안정하고 시간이 지남에 따라 오차 (e_1, e_2, e_z) 는 영으로 수렴함을 알 수 있다. 즉, 관측기는 시스템의 상태 변수를 추정하게 됨을 말한다 ($\hat{x} \rightarrow x, \hat{z} \rightarrow z$).

위의 결과에서 상기할 점은 시스템 (2)에 대한 관측기 (3)은 상태 변수 x_2 가 측정 가능하다는 가정에서 출발했다는 것이다. 다음절에서는 논문 [8,9]의 결과에 착안하여 $\dot{y} = x_2$ 의 측정 없이 시스템 (2)에 대한 성공적인 관측기를 설계한다. 이에 앞서 추가 시스템 이용에 관한 논문 [9]의 착안점을 간단히 소개한다.

2.2 미분 측정을 대체하는 추가 시스템

본 절에서는 선형 시스템을 안정화하는 제어기 설계의 한 방법으로서 비례-미분(Proportional-Derivative, PD) 제어기로 안정화되는 시스템의 제어 입력 중에서 미분항을 대체하기 위해 추가 시스템을 설계하는 방법을 소개한다 [9].

다음과 같이 표현되는 시스템을 생각한다. 단, x_e 는 시스템의 상태 변수, ω 는 제어 입력이고, $C_e B_e = 0$ 이라고 하자.

$$(P): \begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_e \omega, & x_e \in \mathbb{R}^n, \omega \in \mathbb{R}^p \\ y_e = C_e x_e, & y_e \in \mathbb{R}^b. \end{cases} \quad (8)$$

또한, 위 시스템은 다음과 같은 제어 입력에 의해 안정화 가능하다고 가정하자.

$$\omega = -F_1 y_e - F_2 \dot{y}_e = -[F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} C_e \\ C_e A_e \end{bmatrix} x_e. \quad (9)$$

즉, 입력 (9)에 의한 아래의 폐루프 시스템 행렬 A_c 는 안정하다:

$$A_c := A_e - B_e [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} C_e \\ C_e A_e \end{bmatrix}. \quad (10)$$

이제, 제어 입력 (9) 중에서 미분항 \dot{y}_e 를 대체하기 위해 다음과 같은 추가 시스템 (V)를 설계한다 [9].

$$(V): \begin{cases} \dot{\eta} = F_1 y_e + \omega, & \eta \in \mathbb{R}^b, \omega \in \mathbb{R}^p \\ y_\eta = \eta, & y_\eta \in \mathbb{R}^b. \end{cases} \quad (11)$$

그리고, 그림 1과 같이 두 시스템 (8)과 (11)을 연결한다.

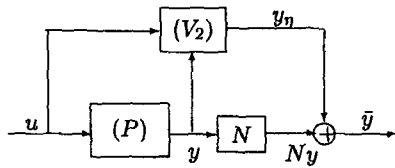


그림 1 미분항 대체를 위한 병렬연결
Fig. 2. Parallel Connection for Replacing the Derivatives

이제 그림 1과 같이 연결된 시스템은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & 0 \\ F_1 C_e & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_e \\ I_p \end{bmatrix} \omega \\ \bar{y} = [F_2 C_e \ I_p] \begin{pmatrix} x_e \\ \eta \end{pmatrix}, \bar{y} \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (12)$$

새로운 시스템 (12)의 출력 \bar{y} 의 미분은 다음과 같이 주어지므로

$$\dot{\bar{y}} = (F_1 C_e + F_2 C_e A_e) x_e + \omega, \quad (13)$$

시스템 (12)는 상대 차수 1을 갖는다. 따라서, 논문 [8,9]에서 처럼 아래와 같은 좌표변환을 통해

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - B_e F_2 C_e & -B_e \\ F_2 C_e & I_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

시스템 (12)를 다음과 같은 정규 형태로 다시 쓸 수 있다 [11]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{A}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \omega. \quad (15)$$

단, $\xi \in \mathbb{R}^n$ 이고, 각 행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = A_e - B_e F_1 C_e - B_e F_2 C_e A_e, \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_1 B_e, \\ \hat{A}_3 = F_2 C_e A_e + F_1 C_e, \\ \hat{A}_4 = \hat{A}_3 B_e. \end{cases} \quad (16)$$

주목할 점은 시스템 (12)(혹은 시스템 (15))의 영동특성 행렬 \hat{A}_1 은 식 (10)에서 얻은 행렬 A_c 와 같고, 따라서 안정하다는 것이다.

이제 다음과 같은 출력 궤환 입력을 가하여

$$\omega = -\Psi \bar{y}, \quad (17)$$

페루프 시스템 (15)-(17)이 안정하도록 행렬 Ψ 를 결정한다. 먼저, 행렬 \hat{A}_1 가 안정하므로 다음 식을 만족하는 행렬 $P = P^T > 0$ 가 존재한다.

$$P \hat{A}_1 + \hat{A}_1^T P = -I_n. \quad (18)$$

리아푸노프 함수를 아래와 같이 정하여

$$V(\xi, \bar{y}) = \frac{1}{2} \xi^T P \xi + \frac{1}{2} \bar{y}^T \bar{y}, \quad (19)$$

시스템 (15)의 궤적을 따라 미분하면 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \xi^T (\hat{A}_1^T P + P \hat{A}_1) \xi + \xi^T P \hat{A}_2 \bar{y} \\ &\quad + \bar{y}^T \hat{A}_3 \xi + \bar{y}^T \hat{A}_4 \bar{y} + \bar{y}^T \omega \\ &\leq -\frac{1}{2} \|\xi\|^2 + \|P \hat{A}_2 + \hat{A}_3^T\| \|\xi\| |\bar{y}| \\ &\quad + \|\hat{A}_4\| |\bar{y}|^2 + \bar{y}^T \omega \\ &\leq -\frac{1}{2} \|\xi\|^2 + \frac{1}{4} \|\xi\|^2 + \|P \hat{A}_2 + \hat{A}_3^T\|^2 |\bar{y}|^2 \\ &\quad + \|\hat{A}_4\| |\bar{y}|^2 + \bar{y}^T \omega \\ &\leq -\frac{1}{4} \|\xi\|^2 + (\|P \hat{A}_2 + \hat{A}_3^T\|^2 + \|\hat{A}_4\|) |\bar{y}|^2 \\ &\quad + \bar{y}^T \omega. \end{aligned} \quad (20)$$

다음 부등식을 만족하는 상수 ϕ 로 $\Psi = \phi I_p$ 와 같이 정하면 $\phi > \|P \hat{A}_2 + \hat{A}_3^T\|^2 + \|\hat{A}_4\| + 1$, 입력 (17)과 (20)식으로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\dot{V}(\xi, \bar{y}) \leq -\frac{1}{4} \|\xi\|^2 - |\bar{y}|^2. \quad (21)$$

위 식들로부터 페루프 시스템 (15)-(17)의 안정성을 얻을 수 있고, 따라서 시스템 (17)은 출력 미분항을 사용하지 않고 새로 설계된 시스템 (11)과 제어 입력 (17)에 의하여 안정하게 됨을 의미한다 [9].

추가 시스템을 이용하여 미분항을 사용하지 않는 위 결과에 착안하여, 다음절에서는 관측기 (3)에서 $\dot{y}(=x_2)$ 항을 사용하지 않고 추가 시스템을 이용하는 방법을 제시한다. 주목할 점은 본 절에서 설명한 안정화 제어기 설계 방법을 직접 적용할 대상은 관측기 설계 대상 시스템 (2)가 아니라 오차 시스템 (4)라는 것이다. 즉, 오차 시스템 (4)에서 $e_2(= \hat{x}_2 - x_2)$ 항을 사용하지 않는 문제를 해결하는 것으로부터 관측기를 설계하는 것이다.

3. 새로운 적응 관측기의 설계

앞 절에서 소개한 추가 시스템 구성을 통한 미분항의 대체를 위해서는 먼저, 오차 시스템 (4)를 페루프 시스템 (8)-(9)의 시스템 행렬 (10)과 같은 형태로 쓸 수 있어야 한다. 이와 같은 이유로 식 (4)를 아래와 같이 다시 구성한다.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 I_p & I_p & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & G(t) \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 I_p \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 I_p \ I_p] \begin{bmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 I_p & I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \theta \end{pmatrix}.$$

즉, 새로운 상태 변수 $x_e := [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \theta]^T$ 를 정의하면, 재구성된 오차 시스템 (22)는 다음과 같은 형태를 가짐을 알 수 있다.

$$\dot{x}_e = A_e x_e - B_e F \begin{bmatrix} C_e \\ C_e A_e \end{bmatrix} x_e. \quad (23)$$

단, 각 행렬들은 다음과 같이 주어진다.

$$A_e = \begin{bmatrix} -k_1 I_p & I_p & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & G(t) \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 I_p \\ 0 \\ G^T(t) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$F = [k_1 I_p \ I_p], \quad \begin{bmatrix} C_e \\ C_e A_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 I_p & I_p & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

다시 한번 부연 설명하면 관측기에 미분항을 사용하여 얻어진 오차 시스템 (4)를 식 (22)와 같이 재구성함으로써, 관측기 오차 시스템은 식 (24)의 행렬들로 구성된 시스템 (8)에 (9)와 같은 제어 입력을 가한 폐루프 시스템으로 해석된 것이다.

이제, 추가 시스템을 구성하여 오차 시스템 (22)(혹은, (23))에서 사용된 측정 불가능한 미분항 e_2 를 소거한다. 식 (22)-(24)로부터 추가 시스템 (11)과 새로운 출력 \bar{y} 는 다음과 같이 설계된다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = k_1 e_1 + \omega, \eta \in R^p \\ \bar{y} = e_1 + \eta. \end{cases} \quad (25)$$

결국, 시스템 (2)의 상태 변수를 추정하기 위해 본 논문에서는 추가 시스템 (25)와 함께 아래와 같은 형태의 관측기를 제안한다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{z}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{z} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 x_1 \\ A_{21} x_1 + B_1 u \\ A_{31} x_1 + B_2 u \\ 0 \end{pmatrix} + B_e \omega \quad (26)$$

$$- \begin{pmatrix} k_2 \\ k_2 A_{22} + G(t)G^T(t) \\ k_2 A_{32} \\ -G^T(t) \end{pmatrix} \bar{y}.$$

최종적으로 추가 시스템 (25)와 제안된 관측기 (26)에 제어 입력 (17)과 같이 충분히 큰 상수 ψ 로 $\omega = -\psi \bar{y}$ 를 대입하면, 출력의 미분항을 측정하지 않고 시스템 (2)의 상태 변수를 추정할 수 있다. 제안된 관측기에 대한 수렴성 증명과 ψ 의 크기 결정은 다음과 같다.

3.1 관측기의 수렴성 증명

관측기의 수렴성은 관측기와 대상 시스템간의 오차 시스템으로부터 그 안정도를 해석하여 증명한다. 안정도 해석 및 수렴성 증명은 앞장의 해석 방법을 따라 진행한다. 먼저, 대상 시스템 (2)와 관측기 (26)에 대한 오차 시스템은 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e \omega - \begin{pmatrix} k_2 \\ k_2 A_{22} + G(t)G^T(t) \\ k_2 A_{32} \\ -G^T(t) \end{pmatrix} \bar{y}. \quad (27)$$

좌표변환을 위해 식 (24)의 행렬들로부터 계산하면

$$F_2 C_e = [I_p \ 0 \ 0 \ 0], \quad C_e B_e = 0 \text{ 이고,}$$

$$I_n - B_e F_2 C_e = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 I_p & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ -G^T(t) & 0 & 0 & I_a \end{bmatrix}.$$

따라서, 전체 시스템 (25)-(27)에 대한 좌표 변환 행렬 (14)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{cases} \xi_1 = e_1 \\ \xi_2 = -k_2 e_1 + e_2 - k_2 \eta \\ \xi_3 = e_z \\ \xi_4 = -G^T(t)e_1 + \theta - G^T(t)\eta \\ \bar{y} = e_1 + \eta \end{cases} \quad \text{이고,}$$

$$\begin{cases} e_1 = \xi_1 \\ e_2 = \xi_2 + k_2 \bar{y} \\ e_z = \xi_3 \\ \theta = \xi_4 + G^T(t)\bar{y} \\ \eta = -\xi_1 + \bar{y} \end{cases} \quad \text{이다.}$$

결국, 변환된 상태 변수 (ξ, \bar{y}) 에 대하여 전체 시스템 방정식을 다시 쓰면 다음과 같다:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -k_1 \xi_1 + \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = (A_{22} - k_2 I_p)\xi_2 + A_{23}\xi_3 + G(t)\xi_4 \\ \dot{\xi}_3 = A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 \\ \dot{\xi}_4 = -G^T(t)\xi_2 \\ \dot{\bar{y}} = \xi_2 + \omega. \end{cases} \quad (29)$$

위 식에서 상태 변수 ξ 에 대한 식이 식 (4)와 동일하므로, 시스템 (4)의 안정성에 의해 상태 변수 ξ 는 리아푸노프 안정하고 시간이 지남에 따라 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow 0$ 임을 알 수 있다.

시스템 (29)에 대한 안정성을 보이기 위해 다음과 같이 리아푸노프 함수를 정하고

$$V(\xi, \bar{y}) = \frac{1}{2} \xi_1^T \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2^T \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_3^T P_2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_4^T \xi_4 + \frac{1}{2} \bar{y}^T \bar{y}, \quad (30)$$

시스템을 따라 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 \xi_1^T \xi_1 + \xi_1^T \xi_2 - \xi_2^T (k_2 I_p - A_{22}) \xi_2 \\ & + \xi_2^T (A_{32}^T P_2 + A_{23}) \xi_3 - \frac{1}{2} \xi_3^T Q_2 \xi_3 \\ & + \bar{y}^T \xi_2 + \bar{y}^T \omega. \end{aligned} \quad (31)$$

식 (7)에서와 같은 과정을 거쳐 충분히 큰 양수 k_1, k_2, ψ 로부터 $\omega = -\psi \bar{y}$ 일 때, $\dot{V} \leq 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 시스템 (29)는 리아푸노프 안정하고 시간이 지남에 따라 상태 변수 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{y}) \rightarrow 0$ 임을 알 수 있다 (LaSalle-Yoshizawa 정리 [12]). 좌표 변환 행렬 (28)로부터 이것은 다시 (e_1, e_2, e_z, η) 가 영으로 수렴함을 의미한다. 이것으로 추가 시스템을 이용한 제안된 관측기가 불확실성이 존재하는 시스템의 상태 변수를 성공적으로 추정할 수 있음을 보였다.

4. 관측기 설계 예제

본 장에서는 간단한 예제를 통해 제안한 관측기 설계 방법을 설명한다. 다음 식으로 표현되는 시스템을 생각한다.

$$M\dot{z} + c\dot{z} + kz = f + d \quad (32)$$

알려진 양수 M, c, k 는 각각 질량, 감쇠 계수, 스프링 상수에 의한 것이다. 입력 f 는 구동기의 출력인데 다음과 같은 동특성을 따른다고 가정하자:

$$f = -af + u. \quad (33)$$

위 식에서 양수 a 는 시정수이며 u 는 제어 입력이다. 시스템 (32)는 입력 f 와 함께 크기를 알 수 없는 외란 $d(t) = \theta_1 \sin t + \theta_2 \sin 3t$ 의 영향을 받는다고 한다.

상태 변수를 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [z \ \dot{z} \ f]^T$ 로 정하면 다음과 같은 식을 얻는다. 본 예제에서는 변위 z 만 측정할 수 있어 출력 x_1 을 이용하여 나머지 상태 변수들을 추정하고자 한다. 단, 시스템의 계수는 $M=1, k=0.5, c=0.3, a=1.5$ 일 경우를 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.5x_1 - 0.3x_2 + x_3 + [\sin t \ \sin 3t] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ \dot{x}_3 &= -1.5x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (34)$$

먼저, 위 시스템은 $\theta = 0$ 일 때 관측 가능함을 알 수 있다. 하지만 미지의 θ 로 인한 관측기의 오차를 없애기 위해 참고 문헌 [1]의 결과에 의하면 시스템 (34)의 x_1 과 x_2 모두 측정 가능해야 한다. 이와 같은 경우의 관측기인 (3)을 생각하면 그에 따른 오차 시스템 (4)는 안정하다. 즉, 관측기의 설계 값인 $k_1=1, k_2=2$ 일 때, 다음 함수의 미분은

$$V(e, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T \bar{\theta}$$

아래와 같이 주어짐으로 상태 변수들의 추정이 가능하다.

$$\dot{V} = -e_1^2 - 1.3e_2^2 - e_3^2. \quad (35)$$

이제, 상태 변수 x_2 (혹은 e_2)의 측정을 피하기 위해 시스템 (25)를 고려하자. 이 추가 시스템과 시스템 (34)에 대해 제안된 관측기 (26)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + x_1 - 2\bar{y} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -0.3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + [\sin t \ \sin 3t] \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &\quad - 0.5x_1 + 2\omega - (-0.6 + \sin^2 t + \sin^2 3t)\bar{y} \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -1.5\hat{x}_3 + u \\ \dot{\hat{\theta}} &= \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin 3t \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} \cos t \\ 3\cos 3t \end{bmatrix} \bar{y}. \end{aligned} \quad (36)$$

안정도 해석을 위해 오차 시스템 (34)-(36)에 좌표 변환 (28)을 적용하고, 전체 시스템을 따라 다음 함수를 미분하면

$$V(\xi, \bar{y}) = \frac{1}{2} \xi^T \xi + \frac{1}{2} \bar{y}^2,$$

아래 식을 얻게 된다.

$$\dot{V} = -\xi_1^2 - 1.3\xi_2^2 - \xi_3^2 + \bar{y}(\xi_2 + \omega).$$

결국, $\omega = -4\bar{y}$ 를 인가하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\xi_1^2 - 1.3\xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_2\bar{y} - 4\bar{y}^2 \\ &= -\xi_1^2 - 1.3\xi_2^2 - \xi_3^2 + \frac{1}{4}\xi_2^2 + \bar{y}^2 - 4\bar{y}^2 \\ &= -\xi_1^2 - 1.05\xi_2^2 - \xi_3^2 - 3\bar{y}^2. \end{aligned} \quad (38)$$

따라서, 오차 시스템은 리아푸노프 안정하고 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{y}) \rightarrow 0$ 임이 증명된다. 다시 말해서, 시간이 지남에 따라 오차와 추가 시스템의 상태 변수 $(e_1, e_2, e_3, \eta) \rightarrow 0$ 이다.

Matlab을 이용한 컴퓨터 모의 실험 결과는 그림 2에 나타내었다. 이 때, 실험에 사용한 참 값 $\theta_1=2, \theta_2=-1$ 이고, 초기치 $x_0 = [1 \ 1 \ 1], \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0], \hat{\theta}_0 = [0 \ 0], \bar{y}_0 = 0$ 이다. 모의 실험에서 입력 u 는 단위 계단 함수를 사용하였다.

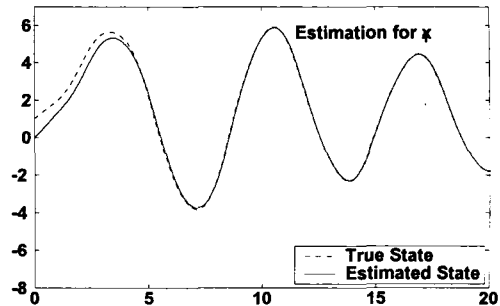


그림 2 (a) 상태 변수 x_1 의 추정
Fig. 2 (a) Estimation of State Variable x_1

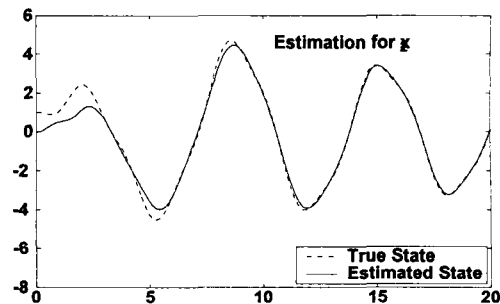


그림 2 (b) 상태 변수 x_2 의 추정
Fig. 2 (b) Estimation of State Variable x_2

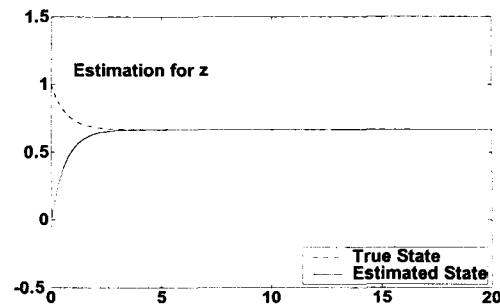


그림 2 (c) 상태 변수 z 의 추정
Fig. 2 (c) Estimation of State Variable z

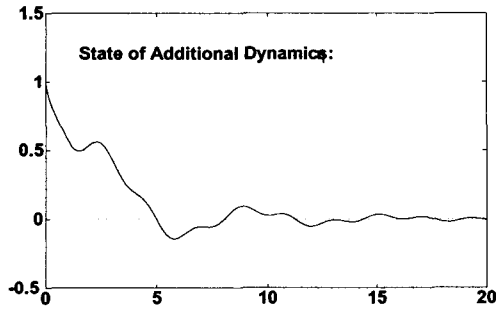


그림 2 (d) 추가 시스템의 상태 변수 η
 Fig. 2 (d) Additional System State Variable η

그림 2. 모의 실험 결과
 Fig. 2 Simulation Results

5. 결 론

불확실성이 존재하는 시스템에 대한 관측기 구성 문제는 제어기 구성 문제에 비하여 매우 어려운 문제이다. 본 논문에서는 시변하는 미지의 불확실성이 존재하는 선형 시스템의 관측기 설계 문제를 다루었다. 미지 계수의 추정을 위한 과정 없이 시스템의 상태 변수를 직접 추정하는 결과에 대한 공통적인 표준형은 참고 문헌 [1]에 정리되어있고, 그 중요한 특징은 불확실성이 측정되지 않는 상태 변수에는 영향을 미치지 않는다는 것이다. 본 논문에서는 추가 시스템을 설계하여 출력의 미분항을 대체하는 제어기 설계 방법에서 착안하여, 시변 불확실성이 측정할 수 없는 상태 변수에 영향을 미치는 시스템의 경우에 대하여 관측기를 설계하였다. 본 결과는 적응 관측기가 설계 가능한 집합의 범위를 확장함으로써, 관측기 설계 문제에 앞으로도 많은 기여를 할 수 있을 것이라 생각한다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 및 한국과학재단의 ERC 프로그램과 지역대학우수과학자 지원연구사업 (KOSEF-R05-2003-000-10624-0)으로 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

[1] Gildas Besancon, "Remarks on nonlinear adaptive observer design," Systems & Control Letters, vol. 41, pp. 271-280, 2000.
 [2] R.L. Carroll and D.P. Lindorfe, "An adaptive observer for single-input single-output linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 18, pp. 428-435, 1973.
 [3] G. Luders and K.S. Narendra, "An adaptive observer and identifier for a linear system," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 18, pp. 496-499, 1973.
 [4] G. Luders and K.S. Narendra, "A new canonical form for an adaptive observer," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 19, pp. 117-119, 1974.
 [5] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 2-8, 1977.
 [6] G. Bastin and M.R. Gevers, "Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 33, pp. 650-658, 1988.
 [7] P.A. Ioannou and J. Sun, Robust Adaptive Control, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
 [8] Young I. Son, H. Shim, K. Park, and Jin H. Seo, "Passification of non-square linear systems using an input-dimensional dynamic feedforward compensator," IEICE Trans. on Fundamentals of ECCS, vol. E85-A, no. 2, pp. 422-431, 2002.
 [9] 손영익, "입력 차수 보상기를 이용한 비정방 선형 시스템의 출력 궤환 수동화," 전기학회 논문지, vol. 53D, no. 1, pp. 10-15, 2004.
 [10] C.T. Chen, Linear System Theory and Design, New York: Oxford University Press, 1984.
 [11] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 3rd Ed., 1995.
 [12] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotovic, Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

저 자 소 개



손 영 익 (孫 瑛 翼)

1995년 서울대학교 전기공학과 졸업. 2002년 동 대학원 전기·컴퓨터공학부 졸업(공학박). 2003년~현재 명지대학교 전기공학과 조교수.

Tel : 031-330-6358

E-mail : sonyi@mju.ac.kr



백 주 훈 (白 柱 薰)

1997년 서울대학교 기계설계학과 졸업. 1999년 동 대학원 기계설계학과 졸업(공학석). 2004년 동 대학원 전기컴퓨터공학부 졸업(공학박). 2004년~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사후 과정.

Tel : 02-880-1786

E-mail : backhoon@hanmail.net



심 형 보 (沈 亨 輔)

1993년 서울대학교 전기공학과 졸업. 2000년 동 대학원 전기공학부 졸업(공학박). 2003년~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 조교수.

Tel : 02-880-1745

E-mail : h.shim@ieee.org



조 남 훈 (趙 南 薰)

1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 2000년 서울대 대학원 전기공학부 졸업(공학박). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS 사업부 책임연구원. 2002년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수.

Tel : 02-820-0643

E-mail : nhjo@ee.ssu.ac.kr