

## 특정 병진작업경로에서 최소의 관절힘을 받는 병렬형 매니퓰레이터의 설계

양현익<sup>+</sup>, 이종우\*, 허원혁<sup>++</sup>

(논문접수일 2003. 8. 6, 심사완료일 2004. 2. 11)

### Design of the Parallel Manipulator for Minimizing the Extreme Articular Force in the Specific Translation Trajectory

Hyunik Yang<sup>+</sup>, Jongwoo Lee\*, Yuange Xu<sup>++</sup>

#### Abstract

Recently, need of the parallel manipulator requiring superior precision is increasing for medical application and precision manufacturing. In this study, we convert a given complex translation trajectory of the moving platform into a set of segments and hence a complex motion of the moving platform can be tractable and easily controlled in a very limited workspace. In addition force exerted to each link is minimized so that the minimized force can be transmitted to the end effector of the moving platform. An user friendly program is developed to design Gough-type 6DOF parallel manipulator based on the proposed method.

**Key Words :** 병렬형 매니퓰레이터(Parallel Manipulator), 강성행렬(Stiffness Matrix), 최대 관절힘(Extreme Articular Force), 변환법(Transformation Method)

## 1. 서론

병렬형 매니퓰레이터는 구조강성이 높고 정밀도가 우수 하지만 작업공간의 협소성으로 인하여 그 성능이 구성부품들의 기하학적 형상에 많이 좌우된다는 단점을 가지고 있

다. 따라서 병렬형매니퓰레이터의 설계에 있어서 각 부품들의 기하학적 형상에 대한 최적화는 매우 중요하다고 볼 수 있다. 특히 전체적인 작업공간 결정에서 가장중요한 고정 및 운동플랫폼의 기하학적 형상에대한 최적설계는 작업공간, 민첩성, 유효하중, 강성 등에 의하여 수행될 수 있

+ 한양대학교 공학대학 기계정보경영공학부 (skynet@hanyang.ac.kr)  
경기도 안산시 성포구 사1동 1271

\*,+ + 한양대학교 기계설계학과

다. Merlet<sup>(1)</sup>은 고우프타입의 병렬형 매니퓰레이터가 특정 작업공간을 갖도록 조인트의 모든 가능한 위치를 찾아냈으며, Castelli<sup>(2)</sup>는 3자유도 병렬형 매니퓰레이터에 있어서 특이점으로부터 자유로운 작업공간을 갖는 부품형상들의 최적화된 설계의 기준을 제시하였고, Liu<sup>(3)</sup>는 강성 인덱스를 도표화하고 이를 이용하여 3자유도 스페리컬 병렬형 매니퓰레이터의 최적설계를 수행하였으며, Bhat-tacharya<sup>(4)</sup>는 일반적인 스튜어트 플랫폼의 강성을 측정할 수 있는 강성행렬에 의한 유연 타원체(Flexibility Ellipsoid)를 이용하여 최적화를 수행하였다. 그러나 이러한 연구들은 구조강성에 있어서 말단장치(End Effector)의 특정한 하중방향을 고려하지 않았다는 단점이 있다. 따라서 특정방향으로 과도한 하중을 받는 비행기 시뮬레이터나 공작기계의 경우에는 적용되는 특정하중에 대한 강성을 고려할 필요가 있다. 특정한 하중방향에 대한 연구에서 다수를 차지하는 특정작업경로에 대한 연구는 작업공간을 매우 세밀하게 분석할 수 있는 장점이 있음에도 불구하고 구속조건의 수가 매우 많기 때문에 계산량이 방대한 이유로 연구결과에 있어서 미흡한 상황이며, 이에 대한 최적화는 거의 이루어지지 않고 있다. 그러나 본 연구에서는 주어진 작업공간에서 특정 작업경로를 수행하는 동안 말단장치에 작용하는 하중에 의하여 발생되는 각 관절의 힘을 최소화함으로써 이러한 단점을 극복하였다.

본 연구에서 고려된 병렬형 매니퓰레이터는 Fig. 1과 같이 6자유도를 갖는 고우프타입(Gough-type)으로 하였다. 이 기구는 베이스(Fixed Base)와 운동 플랫폼(Moving Platform)이 여섯 개의 다리(link)들과 볼소켓 조인트(ball-and-socket joint)로 연결되어 있다. 또한 여섯 개의 선형 구동기가 각각의 다리길이를 변화시킴으로써 운동 플랫폼의 위치와 자세를 제어하게 된다. 그림에서  $A_i$ ,  $B_i$ 는

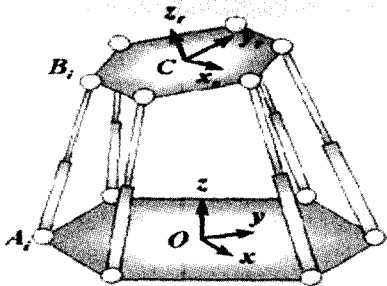


Fig. 1 A 6-DOF Parallel Manipulator

각각 베이스와 운동 플랫폼에 조인트가 부착된 점으로 표시된다. 베이스에서  $A_i$ 의  $z$ 좌표들이 모두 0이 되는  $O-x-y-z$ 의 기준 좌표계를 사용하였으며, 플랫폼에서는  $B_i$ 의  $z_r$ 좌표들이 모두 0이 되는  $C-x_r-y_r-z_r$ 의 이동 좌표계를 사용하였다.  $\alpha_i$ 는  $O-x$ 축과 벡터  $\overrightarrow{OA_i}$ 와의 사이각이며,  $\beta_i$ 는  $C-x_r$ 축과 벡터  $\overrightarrow{CB_i}$ 와의 사이각이다.  $R$ 은  $O$ 와  $A_i$ 와의 거리이며,  $r$ 은  $C$ 와  $B_i$ 와의 거리이다. 이를 정리하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_i O} &= \begin{pmatrix} -R \cos \alpha_i \\ -R \sin \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} = R \overrightarrow{u_i} \\ \overrightarrow{C B_i}_r &= \begin{pmatrix} r \cos \beta_i \\ r \sin \beta_i \\ 0 \end{pmatrix} = r \overrightarrow{v_i} \end{aligned} \quad (1)$$

따라서, 본 연구에서는 병렬형 매니퓰레이터의 기하학적 형상설계와 관련된 설계변수로서  $R$ ,  $r$ 을 정의하고 각각에 대하여 주어진 특정한 작업경로 내에서 다리들이 받는 힘(Leg Force)이 최소로 작용되도록 선정하였다.

## 2. 본 론

### 2.1 기하학적 구속조건

#### 2.1.1 점 작업공간 (Point workspace)

주어진 특정한 작업공간이  $n$ 개의 점들로 표현될 수 있다면, 이에 대한 식은 다음과 같다.

$$W = \{ (H_j, R_j), j \in [1, n] \} \quad (2)$$

여기서,  $H_j$  : location of C ;  $R_j$  : orientation matrix of the moving platform

#### 2.1.1.1 다리길이의 구속조건에 의한 허용영역

운동 플랫폼이 임의의  $W(H, R)$ 의 위치에 있다고 하면 다리의 길이  $\rho$ 는 다리벡터  $\overrightarrow{AB}$ 의 놈(norm)이므로 식 (3)과 같이 표현된다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} + [R] \overrightarrow{HB}_r \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{HB}_r \cdot \overrightarrow{HB}_r \\ &+ 2(\overrightarrow{AO} + [R] \overrightarrow{HB}_r) \cdot \overrightarrow{OH} \\ &+ 2[R] \overrightarrow{HB}_r \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OH} \end{aligned} \quad (4)$$

따라서,  $i$ 번째( $i=1; 6$ ) 다리길이  $\rho_i$ 는 다음과 같다.

$$\rho_i^2 = R^2 + r^2 + 2Rr[R] \vec{v}_i \cdot \vec{u}_i + 2R \vec{u}_i \cdot \vec{OH} + 2r[R] \vec{v}_i \cdot \vec{OH} + \vec{OH} \cdot \vec{OH} \quad (5)$$

여기서  $\epsilon(R, r, H, \rho_i)$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\epsilon(R, r, H, \rho_i) = R^2 + r^2 + 2Rr[R] \vec{v}_i \cdot \vec{u}_i + 2R \vec{u}_i \cdot \vec{OH} + 2r[R] \vec{v}_i \cdot \vec{OH} + \vec{OH} \cdot \vec{OH} - \rho_i^2 = 0 \quad (6)$$

식 (6)에서 다리의 길이  $\rho$ 가 주어지면  $R-r$  평면에서 타원으로 정의되거나 해가 없게 된다.

만일  $i$ 번째 다리길이  $\rho_i$ 의 최대길이를  $\rho_{i-max}$ , 최소 길이를  $\rho_{i-min}$ 라 하면

$$\rho_{i-min} < \rho_i < \rho_{i-max} \quad (7)$$

따라서, 각각의 다리길이가 식 (7)과 같이 제한되고  $R-r$ 평면에서의 임의의 한 점  $M(R, r)$ 은 6개 다리 모두가 만족되어야 하므로, 점  $M(R, r)$ 의 허용영역  $A_{length}$ 는 다음과 같다.

$$A_j = \bigcap_{i=1}^6 \epsilon(R, r, H_j, \rho_{i-max}) - \bigcup_{i=1}^6 \epsilon(R, r, H_j, \rho_{i-min})$$

$$A_{length} = \bigcap_{j=1}^n A_j \quad (8)$$

### 2.1.1.2 조인트상의 역학적 구속조건에 의한 허용영역

조인트의 역학적 제약조건을 Fig. 2와 같이 Merlet<sup>(1)</sup>이

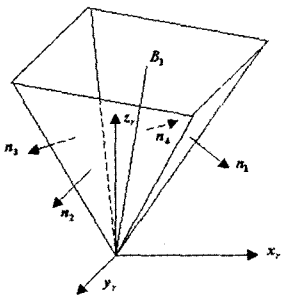


Fig. 2 A Pyramid model for the constraint on a passive joint located at  $A_1$

제안했던 피라미드 모델을 이용하여 표현하였다. 조인트의 중심이 꼭지점(apex)이 되는 피라미드를 결정하면, 조인트로 연결된 각각의 다리들은 피라미드의 모든 면들(faces) 안쪽에 위치하게 하여야 한다. 따라서  $i$ 번째 조인트 피라미드 모델에서 각 면들의 법선벡터를  $n_f^i, f \in [1, k]$ 라 정의하면, 운동 플랫폼이 임의의 위치  $W(H, R)$ 에 있을 때 다리가 피라미드 안쪽에 위치하기 위한 조건은 식 (9)와 같이 표현된다.

$$\vec{A}_i \vec{B}_j \cdot \vec{n}_f^j \leq 0 \quad \forall f \in [1, k] \quad (9)$$

$$R \vec{u}_i \cdot \vec{n}_j^i + r[R] \vec{v}_i \cdot \vec{n}_j^i + \vec{OH} \cdot \vec{n}_j^i \leq 0 \quad (10)$$

식 (10)의 좌변의 항을  $L_{i,f}(R, r, H)$ 라 정의하면  $R-r$ 평면에서 임의의 한 점  $M(R, r)$ 은 6개의 조인트들에서 만족되어야 하므로, 점  $M(R, r)$ 의 허용 영역  $A_{joint}$ 는 다음과 같다.

$$A_j = \bigcap_{i=1}^6 \left( \bigcap_{f=1}^k L_{i,f}(R, r, H_j) \right)$$

$$A_{joint} = \bigcap_{j=1}^n A_j \quad (11)$$

### 2.1.1.3 다리들의 간섭 구속조건에 대한 금지영역

먼저, 다리의 두께가 없다고 가정했을 때 두 개의 다리끼리 서로 간섭(Interference)이 일어나는 경우 다음과 같은 결과를 예측할 수 있다.

- 1) 두 개의 연장선이 교차할 때

$$\vec{A}_1 \vec{A}_2 \cdot (\vec{A}_1 \vec{B}_1 \times \vec{A}_2 \vec{B}_2) = 0 \quad (12)$$

$$-Rr(b_1R + b_2r + b_3) = 0 \quad (13)$$

위 두 식에서  $R \neq 0, r \neq 0$  이므로 다음과 같이 다시 세 가지 경우를 고려할 수 있다.

Case 1:  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$  일 때  $R-r$ 평면에서의 모든 점  $M(R, r)$ 에서 간섭이 일어난다.

Case 2:  $b_1 = b_2 = 0, b_3 \neq 0$  일 때  $R-r$ 평면에서의 모든 점  $M(R, r)$ 에서 결코 간섭이 일어나지 않는다.

Case 3: 위의 두가지 경우를 제외한 모두  $R-r$ 평면에서의 한 선 위에 있는 점  $M(R, r)$ 에서 간섭이 일어난다.

- 2) 교차점이 양쪽 다리에 모두 속할 때 먼저  $A_1^1, A_2^2,$

$B_1^l, B_2^l$ 를  $O-x-y$ 평면에 투영된 점들로 정의 할 때, 만일 선분  $A_1 B_1, A_2 B_2$ 가 교차한다면, 각각의 투영도 역시 교차하게 되며, 그 투영된 다리에 관한 식은 다음과 같이 직선의 방정식으로 표현 할 수 있다.

$$R(e_1 R + e_2 r + e_3) = 0$$

$$\text{or, } r(e_1 R + e_2 r + e_3) = 0 \quad (17)$$

따라서, 1), 2)를 모두 만족하는 금지영역  $F_j^{i,k}$ 는  $R-r$ 평면에서 일부 영역, 선분, 한 점 등으로 표현될 수 있다.

### 2.1.2 선분 작업공간 (Segment workspace)

선분 작업공간은 두 점  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 로 정의되고, 따라서 작업경로내에 있는 플랫폼의 중심  $C$ 의 위치는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{OC} = \vec{OM}_1 + \lambda \vec{M_1 M_2}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (18)$$

식 (18)을 위의 점 작업공간에 관한 식에 대입하고 정리 하면 선분작업공간에 관한 구속조건 해석식이 얻어진다.

### 2.2 기하학적 형상과 강성

Fig. 3는 운동 플랫폼에 가해지는 외력  $\vec{F}$ 와  $\vec{M}$ 를 보여주는 그림이다. 다음과 같이 두 3차원 벡터  $\vec{S}_i$ 와  $\vec{Q}_i$ 를 정의하면

$$\vec{S}_i = \vec{CA}_i - \vec{CB}_i = \vec{A_i B_i} \quad (19)$$

$$\vec{Q}_i = \vec{CA}_i \times \vec{CB}_i = \vec{CB}_i \times \vec{S}_i$$

$$= \vec{OA}_i \times \vec{S}_i \quad (20)$$

$$\vec{S}_i = \frac{\vec{S}_i}{|\vec{S}_i|}, \quad \vec{Q}_i = \frac{\vec{Q}_i}{|\vec{Q}_i|} \quad (21)$$

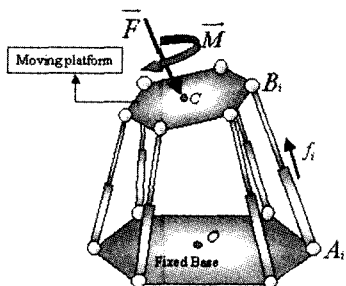


Fig. 3 Forces exerted on moving platform

따라서, 운동 플랫폼의 중심에 가해지는 외력과 다리들에 의해 받쳐지는 힘과의 관계는 다음과 같다.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^6 f_i \vec{S}_i', \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^6 \vec{CB}_i \times f_i \vec{S}_i' \quad (22)$$

또한 일반화된 힘벡터와 관절력벡터는 다음과 같다.

$$\{T\} = [\vec{F}, \vec{M}] \quad (23)$$

$$\{f\} = [f_1, f_2, \dots, f_6] \quad (24)$$

두 벡터의 관계  $\{T\} = [J]\{f\}$ 에서 자코비안(Jacobian) 행렬의 식 (25)와 같다.

$$[J] = \begin{bmatrix} \vec{S}_1'(R, r) & \vec{S}_2'(R, r) & \dots & \vec{S}_6'(R, r) \\ \vec{Q}_1'(R, r) & \vec{Q}_2'(R, r) & \dots & \vec{Q}_6'(R, r) \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 2.3 최적화

설계변수인 임의의 점  $M(R, r)$ 의 모든 가능한 위치를 전술한 구속조건들과 각 다리가 받는 힘을 고려하면 최적의  $M(R, r)$ 을 선정할 수 있다. 이를 위하여 목적함수 (Objective function)를 아래와 같이 정의하고, 이를 최소화 시키는 설계변수  $M(R, r)$ 을 구한다. 여기서  $f_i(R, r, \lambda)$ 는 베이스와 운동 플랫폼의 반지름이 각각  $R, r$ 인 매니폴 레이더가 임의의 작업공간( $\lambda$ )에 위치할 때 각 다리들이 받는 힘이다.

Objective function:

$$F(R, r) = \max [f_1(R, r), f_2(R, r), \dots, f_n(R, r)]$$

here,

$$f_i(R, r) = [f_i(R, r, \lambda=0) \sim f_i(R, r, \lambda=1)]$$

Subject to

- (1) Leg Length Constraints.
- (2) Joint Constraints.
- (3) Noninterference Constraints.

위 최적화문제는 경계 최적화문제로서 구속조건 수가 매우 많고 비선형이기 때문에 일반적인 최적화 방법으로는 문제를 해결하기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 변환법 (Transformation Method)을 이용하여 최적화를 수행하였다. 변환법이란 제약조건에 관한 최적화문제를 알고리즘이 잘 적용된 비제약조건의 최적화문제로 변환시켜 최적화를

수행하는 방법이다. 이는 오리지널 목적함수에 벌칙함수(Penalty function)를 추가함으로써 새로운 목적함수(pseudo-objective)를 만들어 원래의 제약조건문제를 비제약조건문제로 변환시켜 최적화를 수행하는 알고리즘이다.

### 2.4 설계 프로그램 개발

본 연구에서는 병렬형 매니플레이터가 주어진 작업경로를 수행함과 동시에 주어진 힘을 각각의 다리들이 최소로 받을 수 있도록 조인트들의 부착점(attachment point)의 위치를 계산하여 궁극적으로 베이스와 운동플랫폼의 반경을 구하는 프로그램을 개발하였다. 본 설계 프로그램은 MS Visual Basic 6.0으로 프로그래밍 되었으며 MS Window 상에서 운용되도록 작성되었다.

본 프로그램은 Fig. 4와 같이 순서도 형식으로 초기값설정, 작업공간 결정, 최적화계산, 설계결과분석 등 4개 단계로 나타낼 수 있다.

### 2.5 예 제

개발된 프로그램의 타당성을 검토하기 위해 두 가지의 예제를 선정하여 설계를 수행하였다. 예제 1에서는 곡선을, 예제 2에서는 구형의 작업공간을 선정하였다. 본 예제에서 사용된 설계관련 데이터는 부록에 수록하였다.

#### 2.5.1 예제 1

Fig. 5는 하나의 곡선을 11개의 선분들로 구성된 그림으로서 이와 같이 구성된 작업경로 내에서 예제를 위해 선정

된 운동 플랫폼의 방향각은 오일러각 ( $10^\circ, 20^\circ, 10^\circ$ )이고 플랫폼이 받는 외력은 [171, 30, 984]이다. 여기서 플랫폼의 방향각 및 외력의 값들은 일반적으로 병렬형 매니플레이터에서 쓰일 수 있는 임의의 값들로 하였다. 이와 같은 곡선을 요구하는 작업공간에 포함되도록 하고 가해진 외력에 대하여 최소의 Leg Force를 받는 병렬형 매니플레이터의 설계를 구현해 보았다. Fig. 6은 기하학적 제약조건에 의한 구속조건들을 시각화하여 보여주는 그림이다. 최종적으로 결정된 베이스의 반지름과 운동 플랫폼의 반지름의 최적값은 (26.84, 15.13)이다. Fig. 7은 설계된 병렬형 매니플레이터의 병진운동 ( $\theta = 10^\circ, \phi = 20^\circ, \psi = 10^\circ$ ) 작업공간을 보여주는 그림으로 곡선의 작업경로를 포함하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8은 작업경로 내에서 다리들이 받는 힘(Leg Force)과 작업경로내에 있는 플랫폼의 중심 C의 위치를 나타내는 변수  $s$ 와의 관계를 나타내는 그래프로서 (a)는 최적화과정을 통해 설계된 병렬형매니플레이터의 힘 분포이며, (b)는 그렇지 못한 병렬형 매니플레이터의 힘 분포이다. 그림에서 보는 바와 같이 최적화를 거쳐 설계된 병렬형 매니플레이터는 작업경로에서의 힘의 변화가 매우 뚜렷하게 유연해졌을 뿐만아니라, 그 크기도 약 10-30% 작아진 것



Fig. 5 Desired Workspace

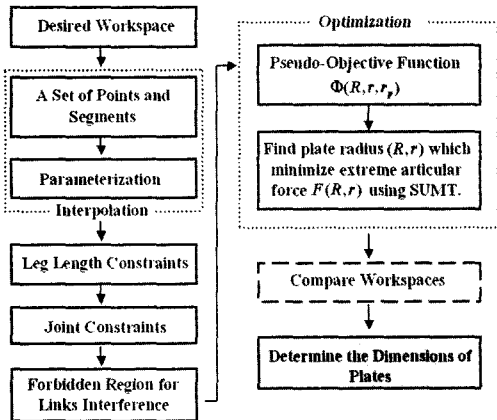


Fig. 4 Flow chart of the proposed algorithm

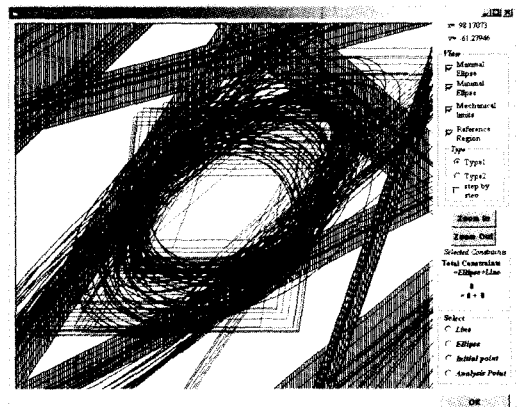


Fig. 6 Constraints

알 수 있다.

**2.5.2 예제 2**

두 번째 예제로 Fig. 9와 같이 구형 작업공간을 고려하였다. Fig. 10은 구형상의 작업공간을 선분들의 간단한 조합으로 간소화시킨 것이다.

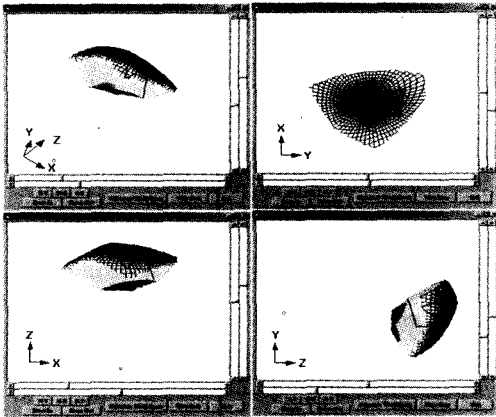
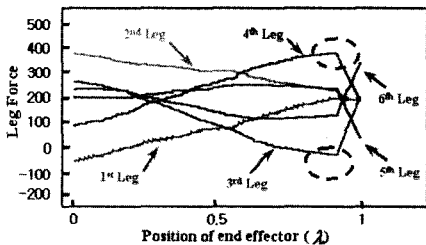
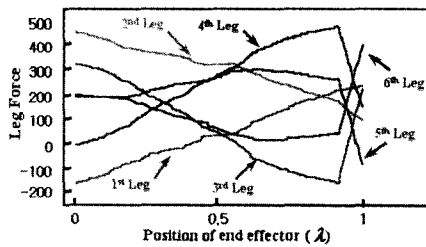


Fig. 7 Determined Workspace containing the desired trajectory 1



(a)



(b)

Fig. 8 Leg Force Analysis:  
 (a) Designed parallel manipulator( $R=26.84, r=15.13$ )  
 (b) General manipulator( $R=23.64, r=17.09$ )

무빙 플랫폼의 방향각은 오일러각( $10^\circ, -30^\circ, 10^\circ$ )이며 플랫폼이 받는 외력은  $[-171, -30, 980]$ 이다. 본 예제에서의 작업경로 내에서 다리들이 받는 힘과 작업경로 내에

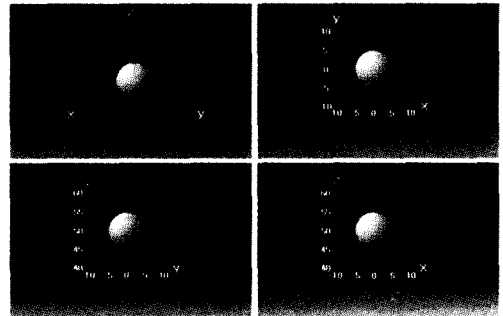


Fig. 9 Desired Workspace (trajectory2)

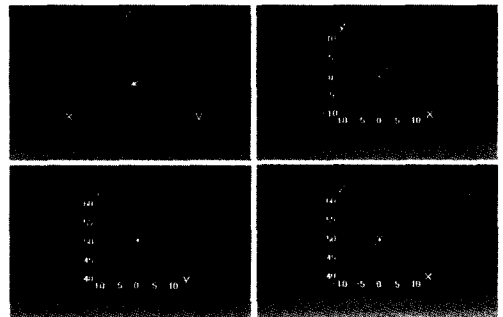


Fig. 10 Combination of Segments representing sphere (trajectory2)

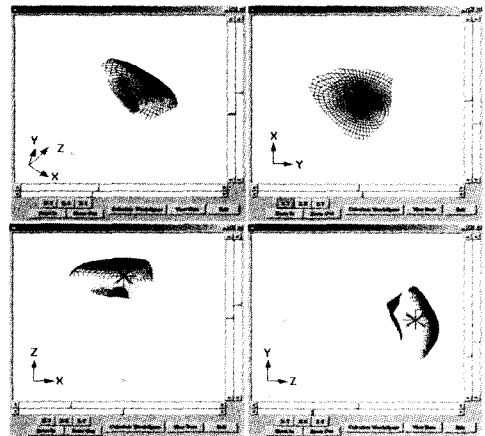


Fig. 11 Determined Workspace containing the desired trajectory 2

있는 플랫폼의 중심  $C$ 의 위치를 나타내는 변수  $\lambda$ 와의 관계를 나타내는 그래프는 Fig. 8의 결과와 유사하기에 생략하였다. Fig. 11은 최종적으로 Fig. 10의 각 작업경로들이 포함된 작업공간을 나타낸다. 최종적으로 결정된 베이스의 반지름과 운동 플랫폼의 반지름의 값은 (27.99, 16.49)이다. 이런 설계결과는 병렬형 매니퓰레이터의 운동을 더욱 민첩하게 할 수 있을 뿐만 아니라 최종적으로 작업경로에서의 특이성발생도 최소화하는 중요한 작용도 한다.

### 3. 결론

본 연구에서는 특정작업경로가 요구되는 작업공간을 갖는 병렬형 매니퓰레이터에 있어서 각 다리에 최소한의 힘을 받도록 하는 베이스와 운동 플랫폼의 반지름을 최적화기법으로 변환법을 적용하여 구하였으며, 이를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 특정방향으로 과도한 하중을 받는 비행기 시뮬레이터나 공작기계의 경우, 보다 정밀하게 작업공간을 분석하고 제어할 수 있는 새로운 방법으로 특정작업경로 연구와 변환법에 의한 최적화기법을 제시하였다.
- (2) 기존의 병렬형 매니퓰레이터의 전체적인 구조강성을 고려한 설계와는 달리 특정 힘에 대한 최대 관절힘을 최소화시킴으로써 특정 힘에 대한 구조강성을 극대화시키고, 여기에 특정작업경로를 요구하는 작업공간을 고려하였다.
- (3) 본 연구를 통해 개발된 프로그램은 선택된 예제들을 통해 볼 수 있듯이 복잡한 설계과정을 시각화함으로써 설계의 편의성과 이해를 도왔다.
- (4) 향후 링크의 길이, 베이스와 플랫폼의 형상에 따른 작업공간과 구조강성과의 관계 등을 추가한다면 더욱 향상

된 병렬형 매니퓰레이터의 설계가 이루어질 수 있을 것이라고 사료된다.

### 참고 문헌

- (1) Merlet, J. P., 1995, "Designing a parallel manipulator for a specific workspace," *Research Report*, 2527, INRIA.
- (2) Parenti, C. V., and Bubani, F., 2000, "Workspace and Optimal Design of a Pure Translation Parallel Manipulator," *Meccanica*, Vol. 35, pp. 203~214.
- (3) Liu, X. J., and Gao, F., 2000, "Optimum design of 3-DOF spherical parallel manipulators with respect to the conditioning and stiffness indices," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 35, pp. 1257~1267.
- (4) Bhattacharya, S., Hatwal, H., and Ghosh, A., 1995, "On the optimum design of Stewart platform type parallel manipulators," *Robotica*, Vol. 13, No. 2, pp. 133~140.
- (5) Zanganeh, K. E., and Angeles, J., 1997, "Kinematic Isotropy and the Optimum Design of parallel Manipulators," *Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No. 2, pp. 185~197.
- (6) Tsai, L. W., and Joshi, S., 2000, "Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU parallel manipulator," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, December, pp. 439~446.
- (7) Gosselin, C., and Angeles, J., 1989, "The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three Degree of Freedom Parallel Manipulator," *Journal of Mechanism Transmissions and Automation in Design*, Vol. 111, No. 2, pp. 202~207.

**부 록**

**Numerical data of the examples**

**(1) Angles  $\alpha_i, \beta_i$  in degree**

leg	1	2	3	4	5	6
$\alpha_i$	35	145	155	265	275	25
$\beta_i$	85	95	205	215	325	335

**(2) Length limits**

**length of the legs (first set)**

leg <sub>min</sub>	40	40	40	40	40	40
leg <sub>max</sub>	70	70	70	70	70	70

**length of the legs (second set)**

leg <sub>min</sub>	40	40	40	40	40	40
leg <sub>max</sub>	59	59	59	59	59	59

**(3) Trajectories**

**Trajectory 1 (10°, 20°, 10°)**

segment	$M_1(x_1, y_1, z_1)$			$M_2(x_2, y_2, z_2)$		
	1	0.0	5.0	55.0	0.6	4.5
2	0.6	4.5	52.2	1.8	3.3	50.0
3	1.8	3.3	50.0	3.1	1.3	51.0
4	3.1	1.3	51.0	4.1	-0.4	53.1
5	4.1	-0.4	53.1	6.0	-2.1	55.0
6	6.0	-2.1	55.0	6.4	-3.9	56.7
7	6.4	-3.9	56.7	8.3	-5.8	55.8
8	8.3	-5.8	55.8	9.5	-6.5	53.3
9	9.5	-6.5	53.3	10.4	-6.8	50.8
10	10.4	-6.8	50.8	11.2	-6.9	48.1
11	11.2	-6.9	48.1	12.0	7.0	45.0

**Trajectory 2 (10°, -30°, 10°)**

segment	$M_1(x_1, y_1, z_1)$			$M_2(x_2, y_2, z_2)$		
	1	0.0	0.0	45.0	0.0	0.0
2	3.535	0.0	46.46	-3.535	0.0	53.535
3	5.0	0.0	50.0	-5.0	0.0	50.0
4	3.535	0.0	53.535	-3.535	0.0	46.46
5	2.499	2.499	46.46	-2.499	-2.499	53.535
6	3.535	3.535	50.0	-3.535	-3.535	50.0
7	2.499	2.499	53.535	-2.499	-2.499	46.46
8	0.0	3.535	46.46	0.0	-3.535	53.535
9	0.0	5.0	50.0	0.0	-5.0	50.0
10	0.0	3.535	53.535	0.0	-3.535	46.46
11	-2.499	2.499	46.46	2.499	-2.499	53.535
12	-3.535	3.535	50.0	3.535	-3.535	50.0
13	-2.499	2.499	53.535	2.499	-2.499	46.46