Global Optimization을 이용한 Structured Singular Value의 계산

이 지 태
경북대학교 화학공학과

1. 서론

Structured singular value (SSV)는 robust stability와 robust performance를 매우 엄밀하게 다루기 위해 고안되었다 (Doyle, 1982; Safonov, 1982). 이 엄밀성으로 제어시스템의 설계 및 분석에 광범위하게 사용되고 있다. 강건제어의 단초를 이루었으며, loop failure tolerance, decentralized integral controllability (Campo and Morari, 1994), D-stability (Lee and Edgar, 2001) 등에 SSV가 사용되고 있다. SSV의 중요성이 알려짐에 따라 이것에 관한 많은 연구가 있었다(Fan et al., 1991; Packard and Pandey, 1993). 그러나 이 값의 계산은 매우 어려운 NP-hard인 것으로 판명되었으며 (Braatz et al., 1994), 실수 불확실 변수에 대한 SSV의 경우 원하는 오차범위내로 근사값을 구하는 것도 마찬가지 인 것으로 밝혀졌다(Fu, 1997). 이 말은 문제의 크기에 계산량이 지수적으로 증가하는 것을 의미하며 문제의 크기가 커지면 계산이 현실적으로 불가능해진다. 즉 정확한 SSV값을 찾는 global search에 해당하는 Gaston and Safonov (1988) 및 Newlin and Young (1997)법을 적용할 때 문제의 크기가 커지면 원하는 시간 안에 문제를 해결하지 못하는 일이 생긴다. 즉 불확실 변수의 개수가 작은 문제에만 정확한 SSV를 계산이 가능하다. 따라서 이 계산상의 문제를 해결하기 위한 많은 노력이 있어 왔다.

실제 SSV의 정확한 값 대신에 이것의 upper bound와 lower bound를 주로 계산하고 이용한다 (Young et al., 1992). Upper bound는 robust stability의 충분조건이 되며, lower bound는 필요조건이 된다 (혹은 instability를 위한 충분조건이 된다). 두 한계 값이 서로 가까우면 실제 이용하는데 어려움이 없을 것이다. 반복되지 않는 복소수 불확실 변수에 대한 SSV의 upper bound는 실제 사용에 문제가 없는 어느정도 실제 값에 가까운 식이 주어져 있으며, 선형행렬부등식 (LMI, Linear Matrix Inequality) 방법에 의한 계산방법도 주어져 있다. 그러나 반복되는 복소수 불확실 변수 혹은 실수 불확실 변수가 있게 되면 기존의 upper bound 식과 lower bound식은 믿을만 하지 않은 것으로 판명되었다 (Hayes et al., 2001).

SSV 계산이 NP-hard인 것이 밝혀졌지만 문제 크기가 작으면 정확한 값을 얻으려는 시도를 할 수 있을 것이다. 실수 불확실 변수에 대하여 다항식의 positivity 조건으로 5변수까지의 문제를 정확히 푸는 방법이 제안되어 있으며 (Dainson and Lewin, 1998), optimization 방법을 이용하는 방법들이 연구되고 있다 (Hayes et al., 2001). 복합 불확실 변수에 대하여는SSV의 upper bound 와 lower bound를 계산하는 방법들을 이용하는 global optimization 방법의 하나인 branch and bound법으로 정확한 SSV값을 계산하고자 하는 방법도 제안되어 있다 (Newlin and Young, 1997).

본 연구는 새로운 복합 불확실 변수에 대한 SSV 식을 소개하고 이의 정확한 계산을 위한global optimization 방법의 응용 가능성을 제안하고자한다.

2. Structured Singular Value for Mixed Uncertainties

그림 1과 같은 공정이 Δ의 불확실성을 갖는 시스템의 안정도를 고려한다. 이 공정시스템의 안정도는 그림 2와 같은 폐루프 시스템의 안정도로 되며 여기서 다룬다.

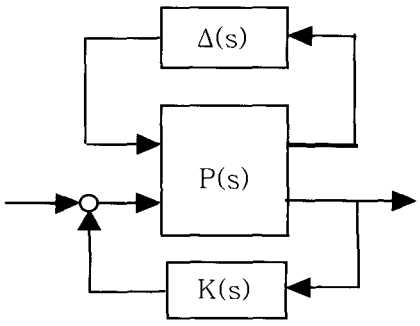

그림 1. 불확실성을 갖는 공정의 제어시스템.

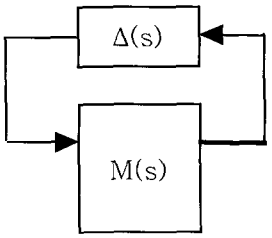

그림 2. 불확실성을 갖는 시스템의 안정도 문제.

위의 문제를 기술하기 위해 먼저 용어를 살펴본다. 정방형의 복소수 행렬 M에 대하여

M^* = complex conjugate transpose

$\sigma_i(M)$ = i번째 크기의 singular value ($\sigma_1(M)$: the largest singular value of M)

$\lambda_i(M)$ = Hermitian 행렬의 i번째 크기의 eigenvalue

$M>0 (M\geq 0)$ = positive definite(semi-definite)

I_k = k × k 단위 행렬

O_k = k × k 영 행렬

다음 집합은 불확실성의 구조를 나타내는 것으로 이 집합에 포함되는 불확실성을 고려한다.

$$\Theta = \left\{ block\ diag\left(\delta_1^r I_{k_1}, \cdots, \delta_m^r I_{k_m}, \Delta_{m+1}^c\right)\right\} \quad (1)$$

$$\delta_i^r = a\,real\,number,\ i = 1, 2, \cdots m$$

Δ^c_{m+1} = k_{m+1} × k_{m+1} block diagonal 복소수 행렬, $\sum_{i=1}^{m+1} k_i = n,\ k_i \geq 0$

위의 불확실성 집합 Θ에 대응하는scaling 행렬은

$$D = \left\{ block\ diag\left(D_1, \cdots, D_m, D_{m+1}\right)\right\} \quad (2)$$

D_i = k_i × k_i nonsingular 복소수 행렬, $D_i = D_i^* > 0$, i=1,2, ..., m

D_{m+1} = k_{m+1} × k_{m+1} nonsingualr 복소수 행렬, $D_{m+1} = D_{m+1}^* > 0$ and $D_{m+1}\Delta^c_{m+1} = \Delta^c_{m+1} D_{m+1}$ 그리고

$$G = \left\{ block\ diag\left(G_1, \cdots, G_m, O_{k_{m+1}}\right)\right\} \quad (3)$$

G_i = k_i × k_i nonsingular 복소수 행렬, $G_i = G_i^*$, i=1,2, ..., m

가 앞으로 사용된다.

정의 1 (Doyle, 1982): n × n 정방행렬 M과 불확실성 집합 Θ에 대하여 SSV $\mu_\Theta(M)$ 는 다음과 같이 정의된다. 만약 $\det(I-\Delta M)=0$가 되는 Δ가 없으면 $\mu_\Theta(M)=0$, 그렇지 않으면

$$\mu_\Theta(M) = 1/\min_{\Delta\in\Theta}\left\{\sigma_1(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0\right\} \quad (4)$$

이 정의에 따른 SSV는 robust stability 를 매우 정밀하게 기술 한다(Fan et al., 1991). 그러나 이것의 정확한 계산은 매우 적은 불확실성 변수의 개수를 갖는 문제 외에는 매우 어렵다.

SSV의 upper bound는 robust stability의 충분조건이 된다. 이 upper bound계산을 살펴본다. $D\in\mathcal{D}$에 대하여, $\det(I-\Delta M)=\det(I-D\Delta MD^{-1})=\det(I-\Delta DMD^{-1})$을 얻을 수 있다. 따라서

$$\mu_\Theta(M) \leq \inf_{D\in\mathcal{D}} \sigma_1(DMD^{-1}) \quad (5)$$

이 upper bound는 실수 혹은 복소수 불확실 변수에 관계없이 적용된다. 그러므로 순수하게 실수 불확실 변수에 대하여는 다소 conservative하다. 불확실 변수가 실수라는 것을 고려하는 개선된 upper bound가 다음과 같은 것들이 제안되어 있다(Doyle, 1985; Fan et al., 1991).

$$\mu_\Theta(M) \leq \inf_{\substack{D\in\mathcal{D}\\ G\in\mathcal{G}}}\left[\min_{\alpha\geq 0}\left\{\alpha : (M^*D^2M + j(GM - M^*G) - \alpha^2 D^2) \leq 0\right\}\right] \quad (6)$$

혹은 동등한 것으로

$$\mu_\Theta(M) \leq \inf_{\substack{\alpha>0\\ D\in\mathcal{D}\\ G\in\mathcal{G}}}\left[\alpha : \sigma_1\left((I+G^2)^{-0.5}\left(\frac{DMD^{-1}}{\alpha} - jG\right)\right) \leq 1\right] \quad (7)$$

SSV의 lower bound는 robust stability의 필요조건을 준다. Eigenvalue계산에 사용되는 power iteration과 유사한 방법이 제안되어 있어 사용되고 있다 (Young et al., 1992).

3. 계산 방법

3.1. 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality)

식(5) 와 (6)의 SSV의 upper bound를 계산하는 문제는 선형행렬부등식 문제로 바꿀 수 있다. 선형행렬부등식 문제는 최근 많은 연구가 진행되어interior point 법을 포함하는 우수한 수치적 방법이 개발되어 있다 (Vandenberghe and Balakrishnan, 1996). MATLAB의 몇몇 Toolbox에서 SSV계산에 이 선형행렬부등식 법을 이용하고 있다.

3.2. Branch and Bound법

선형행렬부등식 방법으로 SSV의 upper bound를 계산하고 power iteration법을 이용하여 lower bound를 계산할 수 있다. Newlin and Young (1997)은 이 둘을 이용하는 global optimization법의 하나인branch and bound 법을 적용하여 정확한 SSV를 계산하는 방법을 제안하였다. 그러나 문제에 따라서는 수렴 속도가 매우 느리거나 전혀 수렴이 진행되지 않는 것을 볼 수 있다. 이는 그들이 사용한 upper bound와lower bound의 성능 때문으로 보인다.

4. 새로운 Structured Singular Value에 관한 식

복소수 및 실수 불확실 변수가 혼재하는 SSV의 upper bound와 lower bound를 더 정밀하게 구할 수 있는 새로운 식을 제안한다.

n × n 복소수 행렬 M 과 $\Delta \in \Theta$에 대하여, 행렬 I-DM 이 singular인 것과 다음 식을 만족하는 영이 아닌 실수 벡타 v_1 과 v_2 가 존재한다는 것은 동치이다.

$$[I-\Delta M](v_1+jv_2)=[I-(Re(\Delta)+jIM(\Delta))(Re(M)+jIm(M))](v_1+jv_2)=0 \quad (8)$$

같은 것으로 다음을 얻을 수 있다(Qiu et al., 1994).

$$\left(I-\begin{bmatrix} Re(\Delta) & -Im(\Delta) \\ Im(\Delta) & Re(\Delta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Re(M) & -Im(M) \\ Im(M) & Re(M) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{bmatrix}=0 \quad (9)$$

이를 이용하여 SSV를 계산하는 식을 만든다.

먼저 사용되는 변수들을 정의한다. 불확실 변수를 정리하여 다음과 같이한다. Permutation 행렬 P를 도입하여

$$\Delta_2 = P\begin{bmatrix} Re(\Delta) & -Im(\Delta) \\ Im(\Delta) & Re(\Delta) \end{bmatrix}P^{-1} \quad (10)$$

$$= \text{block diag}\left(\delta_1^r I_{2k_1},\cdots,\delta_m^r I_{2k_m},\begin{bmatrix} Re(\Delta_{m+1}^c) & -Im(\Delta_{m+1}^c) \\ Im(\Delta_{m+1}^c) & Re(\Delta_{m+1}^c) \end{bmatrix}\right)$$

을 얻고 여기에 따른

$$M_2 = P\begin{bmatrix} Re(M) & -Im(M) \\ Im(M) & Re(M) \end{bmatrix}P^{-1} \quad (11)$$

을 구한다. 관련되는 scaling 행렬들도 정의한다.

$$D_2 = \left\{\text{block diag}\left(D_1,\cdots,D_m,D_{m+1}\right)\right\} \quad (12)$$

$D_i = 2k_i \times 2k_i$ nonsingular 복소수 행렬, $D_i = D_i^* > 0$, $i=1,2,\ldots,m$

D_{m+1} = a $2k_{m+1} \times 2k_{m+1}$ nonsingular 복소수 행렬, $_{m+1} = D_{m+1}^* > 0$, $D_{m+1}\Delta^c_{m+1}{}^c = \Delta c_{m+1} D_{m+1}$

그리고

$$G_2 = \left\{P\begin{bmatrix} O_n & -G \\ G & O_n \end{bmatrix}P^{-1}, G \in G\right\} \quad (13)$$

Scaling 행렬 $\tilde{G} \in G_2$는 다음의 성질을 갖는 것이다.

$$\Delta_2\tilde{G}+(\Delta_2\tilde{G})^*=0$$

$$\tilde{G}^*\tilde{G}=\tilde{G}\tilde{G}^*=block\,diag\left\{G_1^2,G_1^2,L,G_m^2,G_m^2,O_{2k_{m+1}}\right\}$$

$$(\tilde{G}^*\tilde{G})\Delta_2=\Delta_2(\tilde{G}^*\tilde{G}).$$

식 (8)과 (9)로부터 다음 두식은 동등함을 알 수 있다.

$$\det(I-M\Delta)=0$$
$$\det(I-M_2\Delta_2)=0$$

따라서 SSV에 관한 정의 1를 다음과 같이 바꿀 수 있다

Theorem 1: n × n 정방행렬 M과 불확실성 집합 Θ에 대하여 SSV $\mu_\Theta(M)$는 다음과 같이 된다. 만약 det(I-ΔM)=0가 되는 Δ가 없으면 $\mu_\Theta(M)=0$, 그렇지 않으면

$$\mu_\Theta(M)=1/\min_{\Delta_2\in\Theta_2}\{\sigma_1(\Delta_2):\det(I-M_2\Delta_2)=0\} \quad (14)$$

식 (14)로부터 SSV의 upper bound식을 구한다. 두 벡타 (v_1, v_2)가 모두 영이 아니므로,

$\text{rank}\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{bmatrix}=2$이며,

행렬 I-ΔM가 singular가 되지 않을 조건은

$\text{rank}\left(I-\begin{bmatrix} Re(\Delta) & -Im(\Delta) \\ Im(\Delta) & Re(\Delta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Re(M) & -Im(M) \\ Im(M) & Re(M) \end{bmatrix}\right)\le 2n-2$이다.

따라서 행렬 I-ΔM 가 singular가 되지 않기 위해서는

$$\sigma_1(\Delta)=\sigma_1\left(\begin{bmatrix} Re(\Delta) & -Im(\Delta) \\ Im(\Delta) & Re(\Delta) \end{bmatrix}\right)<1/\sigma_2\left(\begin{bmatrix} Re(M) & -Im(M) \\ Im(M) & Re(M) \end{bmatrix}\right)$$

$=1/\sigma_2(M_2)$을 얻을 수 있으며,

$$\mu_\Theta(M)\le\sigma_2(M_2) \quad (15)$$

을 얻을 수 있다. 여기에 scaling을 도입하면 다음의 SSV의 upper bound를 얻을 수 있다.

Theorem 2 (Lee and Edgar, 2003): n x n 정방행렬 M과 불확실성 집합 Θ에 대하여,

$$\mu_\Theta(M)\le\inf_{\tilde{D}\in D_2}\sigma_2(\tilde{D}M_2\tilde{D}^{-1}) \quad (16)$$

만약 순수한 실수 불확실 변수가 없으면 조건 (16)은 조건 (5)와 같게 된다. Scaling 행렬이 $\tilde{D}=P\begin{bmatrix} D & O_n \\ O_n & D \end{bmatrix}P^{-1}$으로 선택되면, $\sigma_2(\tilde{D}M_2\tilde{D}^{-1})=\sigma_1(DMD^{-1})$가 되며 따라서 조건 (16)은 조건 (5)와 같게 된다. 즉 조건 (16)은 조건 (5)과 적어도 같게는 된다. 순수 실수 불확실 변수에 대하여

scaling 행렬 $\tilde{D} \in D_2$는 조건 (5)의 것보다 3.5배 만큼 많은 요소를 가진다. 이는 계산량을 많게 하는 작용을 하지만 더 정확한 upper bound를 줄 가능성을 가진다. 식 (16)에서 i번째 블록의 요소 개수는 $2k_i^2+k_i$ 인데 반하여 식 (5)의 것은 $0.5(k_i^2+k_i)$ 이다.

Corollary 1(Lee and Edgar, 2003): n × n 정방행렬 M과 불확실성 집합 Θ에 대하여,

$$\mu_\Theta(M) \le \inf_{\tilde{D}\in D_2} \sigma_2(\tilde{D}M_2\tilde{D}^{-1}) = \sqrt{\inf_{\substack{v\in R^{2n}\\ \tilde{D}\in D_2}} \lambda_1(\tilde{D}^{-T}M_2^T\tilde{D}^T\tilde{D}M_2\tilde{D}^{-1} - vv^T)} \quad (17)$$

이 조건식은 Theorem 2에 있는 두번째로 큰 singular 조건을 가장 큰 eignevalue조건으로 바꾸어 계산이 쉽게 되도록 하는데 있다.

Theorem 3(Lee and Edgar, 2003): n × n 정방행렬 M과 불확실성 집합 Θ에 대하여,

$$\mu_\Theta(M) \le \inf_{\substack{\alpha>0\\ \tilde{D}\in D_2\\ \tilde{G}\in G_2}} \left[\alpha : \sigma_2\left((I+\tilde{G}^*\tilde{G})^{-1/2}\left(\frac{\tilde{D}M_2\tilde{D}^{-1}}{\alpha} - \tilde{G}\right)\right) \le 1\right] \quad (18)$$

이 조건식은 조건 (7)을 확장하고자 하는데 있다.

예제 1. 순수 반복되지 않는 실수 불확실 변수에 대한 2×2 복소수 행렬의 SSV의 upper bound를 비교하였다. Upper bound (16)과 (18)는 최적화 프로그램 'fmins' (Optimization Toolbox for MATLAB Branch and Grace, 1996)를 이용하였고, 프로그램 'mu' (Mu Analysis and Synthesis Toolbox for MATLAB Balas et al., 1995)의 결과와 비교하였다. 계산결과는 표1에 나타나 있다. Upper bound (18)은 계산한 모든 경우에 우수한 upper bound를 주었으며, upper bound (16)도 몇몇 문제 외에는 우수한 결과를 주었다.

표 1. 반복되지 않는 실수불확실 변수에 대한 2 x 2 행렬의 SSV의 upper bound.

M	Upper Bound (5)	Upper Bound (6)	Upper Bound (13)	Upper Bound (15)	Exact
$\begin{bmatrix} 4+j & 4j \\ -1 & j \end{bmatrix}$	4.82	4.11	3.73	3.73	3.73
$\begin{bmatrix} 4+j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix}$	4.38	1.77	0.02	0.01	0
$\begin{bmatrix} 2+j & 3j \\ 1 & 2+j \end{bmatrix}$	3.92	1.43	0.62	0.62	0.62
$\begin{bmatrix} 2+j & j \\ 1 & 2+j \end{bmatrix}$	3.16	0	2.45	0	0

예제 2. 반복되지 않는 실수불확실 변수에 대한 $\mu_\Theta(C(j\omega I-A)^{-1}B)$를 계산하였다. 여기서

$$A = \begin{bmatrix} 79 & 20 & -30 & -20 \\ -41 & -12 & 17 & 13 \\ 167 & 40 & -60 & -38 \\ 33.5 & 9 & -14.5 & -11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2190 & 0.9347 \\ 0.0470 & 0.3835 \\ 0.6789 & 0.5194 \\ 0.6793 & 0.8310 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0346 & 0.5297 & 0.0077 & 0.0668 \\ 0.0535 & 0.6711 & 0.3834 & 0.4175 \end{bmatrix}$$

그림 3에 결과를 보였다. Upper bound (16)이 그래프에서는 구별될 수 없을 정도로 정확한 값을 주었다. Upper bound (18)도 계산하였지만 그래프에서구별되지 않아 나타내지 않았다.

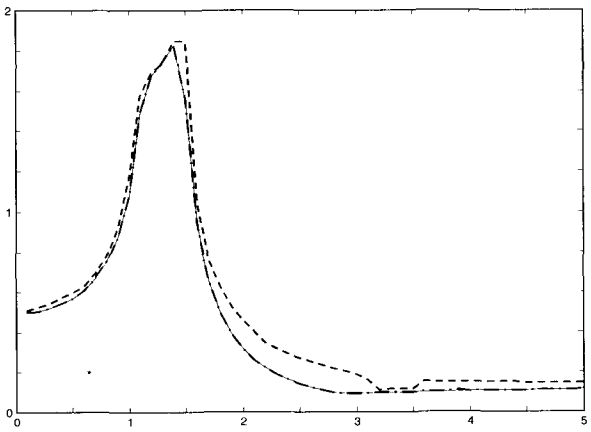

그림 3. 예제 2의 문제에 대한 SSV의 upper bounds. 가는 실선: SSV값, 점선: upper bound (6), 쇄선: upper bound (16) (가는 실선과 구별되지 않음).

5. Global Optimization

Hayes et al. (2001)은 실수 불확실 변수에 대하여 다음의 최적화에 근거한 SSV계산 방법을 제안하고 있다.

$$\text{Min}\ \sigma_1(\Delta) \quad (19)$$
$$\text{s.t. } \det(I-M\Delta) < e$$

이 최적화 문제는 많은 local minimum을 가진다. Local minimum은 SSV의 lower bound로 사용될 수 있다. 이 최적화 문제에global optimization 기법을 적용하면 SSV의

정확한 값 혹은 매우 우수한 lower bound를 얻을 수 있을 것이다.

위의Hayes et al. (2001)의 최적화 문제는 복소수와 실수 불확실 변수가 섞여 있는 문제에 바로 다음과 같이 확장될 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sigma_1(\Delta) \\ \text{s.t. } &A(X,Y)=0 \\ &B(X,Y)=0 \\ &\det(I-M\Delta)=A(X,Y)+jB(X,Y) \\ &X=\mathrm{Re}(\Delta) \\ &Y=\mathrm{Im}(\Delta) \end{aligned} \tag{20}$$

혹은

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sigma_1(\Delta) \\ \text{s.t. } &\det(I-M_2\Delta_2)=A^2(X,Y)+B^2(X,Y)=0 \end{aligned} \tag{21}$$

여기에 branch and bound법 혹은 확률적 방법의 global optimization법들을 적용할 수 있다. 위 식에서 equality 제약조건은 하나 혹은 두 변수에 대해서는 보통 쉽게 풀리는 식으로 변수를 줄이는데 사용할 수 있다.

또 다른 방법으로 직접 $\det(I-M_2\Delta_2)$를 최소화하는 것을 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \det(I-M_2\Delta_2) \\ \text{s.t. } &-\beta<x_{ij}<\beta \\ &-\beta<y_{ij}<\beta \end{aligned} \tag{22}$$

최적화 (22)를 풀어 $\det(I-M_2\Delta_2)=0$가 되는 x_{ij} 및 yij를 찾는다. 찾아지면 이때의 $1/\sigma_1(\Delta)$가 SSV의 lower bound가 되며, 식 (22)에서 각 변수의 한계를 $\sigma_1(\Delta)$로 하여 다시 위의 최소화 과정을 반복한다. 한 $\det(I-M_2\Delta_2)=0$를 만족하는 변수가 찾아지면 이 점에서 continuation 방법을 적용하여 더 작은 $\sigma_1(\Delta)$를 주는 $\det(I-M_2\Delta_2)=0$를 만족하는 점들을 찾는 과정을 첨가하면 계산시간을 단축할 수 있을 것이다.

이 최소화 문제에 branch and bound법을 적용할 수 있다. $\det(I-M_2\Delta_2)$는 여러 최적화 변수의 다항식으로 나타나므로, 다음과 같은 일반적 branch and bound방법에서 사용하는upper bound및 lower bound식들을 이용할 수 있다(Biegler and Grossmann, 2004).

$$\begin{aligned} x_ix_j &\geq x_i^Ux_j+x_ix_j^U-x_i^Ux_j^U \\ x_ix_j &\geq x_i^Lx_j+x_ix_j^L-x_i^Lx_j^L \\ x_ix_j &\leq x_i^Ux_j+x_ix_j^L-x_i^Ux_j^L \\ x_ix_j &\leq x_i^Lx_j+x_ix_j^U-x_i^Lx_j^U \end{aligned} \tag{23}$$

$\det(I-M_2\Delta_2)$의gradient도 쉽게 구할 수 있어 local minimum을 빠르게 계산할 수 있기도 하다.

확률적 방법을 적용할 수도 있다. 여러 random한 초기값들에 빠른 local minimum계산을 결합한다. 앞의 branch and bound방법에 버금가는 계산법이 될 것으로 판단된다. 또한 앞의branch and bound 방법에 비해 프로그램이 매우 간편한 장점도 있다.

6. 결론

복소수 및 실수 불확실 변수가 섞여 있는 복합 SSV의 빠른 계산은 제어시스템 설계에 매우 유용하게 사용될 수 있다. 그러나 이 계산은 NP-hard인 것으로 판명되어 있어, 문제의 크기가 커지면 정확한 SSV의 계산은 불가능하다. Upper bound와 lower bound에 만족해야 하는데, 이 upper bound는 robust stability를 위한 충분조건이 되고 lower bound는 필요조건이 된다. 정확한 SSV값에 가까운 upper bound와 lower bound을 얻는 방법이 필요하다.

SSV의 더 정밀한 upper bound를 위해 새로운 식들을 제안하였다. 아직 효과적인 계산방법이 연구되지 않았으나 선형행렬부등식 방법등을 통하여 계산할 수 있을 것이다. SSV의 lower bound는 최적화을 통하여 얻을 수 있다. 이를 위한 새 목적함수를 제안하였으며, global optimization 방법을 적용하면 시간이 충분하면 원하는 오차범위내의 정확한 SSV를 얻을 수도 있다.

참고문헌

1. G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith, *m-Analysis and Synthesis Toolbox*, MathWorks, MA, 1995.
2. R. D. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle, and M. Morari, "Computational Complexity of μ Calculation," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-39, pp. 1000-1002, 1994.
3. M. A. Branch and A. Grace, MATLAB *Optimization Toolbox Users Guide, MathWorks, MA*, 1996.
4. R. R. E. de Gaston and M. G. Safonov, "Exact Computation of the Multivariable Stability Margin," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-33, pp. 156-171, 1988.
5. P. J. Campo and M. Morari, "Achievable Closed-loop Properties of Systems under Decentralized Control: Conditions Involving the Steady-state

Gain." *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. *AC-39*, pp. 932-942, 1994.

6. B. E. Dainson, and D. R. Lewin. "An Algebraic Criterion for Robust Stability of Linear Control Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-43, pp. 237-241, 1998.
7. J. C. Doyle, "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties," Proc. *IEE pt. D*, vol. 129, pp. 242-250, 1982.
8. M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle, "Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics." *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, pp. 25-38, 1991.
9. M. Fu, "The Real Structured Singular Value is Hardly Approximable," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-42, pp. 1286-1288, 1997.
10. I. E. Grossmann, and L. T. Biegler, "Part II. Future Perspective on Optimization," *Comput. Chem. Eng.*, in press, 2004.
11. M. J. Hayes, D. G. Bates, and I. Postlethwaite, "New Tools for Computing Tight Bounds on the Real Structured Singular Value." *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 24, pp. 1204-1213, 2001.
12. J. T. Lee and T. F. Edgar. "Real Structured Singular Value Conditions for the Strong D-stability," *Systems and Control Letters*, vol. 44, pp. 273-277, 2001.
13. J. T. Lee and T. F. Edgar, "Upper Bounds of Structured Singular Values for Mixed Uncertainties," *Proc. CDC 2003, vol. 42*, pp. 798-802, 2003.
14. M. P. Newlin and P. M. Young, "Mixed m Problems and Branch and Bound Techniques," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 7, pp. 145-164, 1997.
15. A. Packard and P. Pandey, "Continuity Properties of the Real/Complex Structured Singular Value," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-38, pp. 415-428, 1993.
16. M. G. Safonov, "Stability Margins of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems," *Proc. IEE pt. D*, vol. 129, pp. 251-256, 1982.
17. Vandenberghe and V. Balakrishnan. "Algorithms and Software Tools for LMI Problems in Control: an Overview," *Proc. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, Michgan, U.S.A., 1996.
18. P. M. Young, M. P. Newlin, and J. C. Doyle, "Practical Computation of the Mixed μ Problem," *Proc. ACC 1992*, pp. 2190-2194, 1992.

저자약력

《이 지 태》

- 1979년 서울대학교 화학공학과 졸업 (학사).
- 1981년 KAIST 화학공학과 졸업 (석사).
- 1986년 KAIST 화학공학과 졸업(박사).
- 1983년~현재 경북대학교 화학공학과 교수.
- 관심분야 : 공정제어.