

# 새로운 Closed-Form 그린함수에 근거를 둔 MoM 행렬 요소의 해석적 계산

## Analytical Evaluation of MoM Matrix Elements Based upon a New Closed-Form Green's Functions

김 의 중 · 이 상 준\* · 이 영 순

Eui-Joong Kim · Sang-Jun Lee\* · Young-Soon Lee

### 요 약

마이크로스트립 구조체를 해석하는데 있어, 행렬 요소를 해석적으로 계산할 수 있는 효율적인 모멘트법이 제안된다. 본 논문의 모멘트법에서는 공간영역 그린함수로 Bessel 함수의 반 무한구간 정적분에 관한 공식에 근거하여 유도된 새로운 형태의 closed-form 그린함수를 사용한다. 본 논문의 모멘트법을 사용할 경우 기존의 모멘트법의 사용에 비해, 계산량 및 계산 속도와 같은 수치계산 효율 측면에서 약 4배 정도로 개선됨을 알 수 있었다. 본 논문이 제안하는 방법의 타당성을 확인하기 위하여 몇 가지 수치해석 결과를 제시한다.

### Abstract

An efficient method of moments(MoM), which can lead to the analytical evaluation of the matrix elements, is proposed to analyze microstrip structures. The present method is formulated in conjunction with use of a new closed-form spatial-domain Green's functions which are derived by use of the integral formula for semi-infinite integrals of Bessel functions. It is observed that the computational efficiency such as the amount of calculation and computation speed has been improved due to the present MoM scheme by a factor of about 4 in comparison with the previous method. To validate the proposed method, several numerical examples are presented.

Key words : Closed-Form MoM Elements, New Class of Closed-form Green's Functions, Microstrip Structure

### I. 서 론

최근에 인쇄회로(printed circuit), 고속 디지털회로, 마이크로스트립 안테나, 초고주파 집적회로(MMIC) 등과 같은 평판 형태의 마이크로스트립 구조체(microstrip structure)의 사용이 급증하고 있는 추세이다. 그리고 이와 같은 구조체들에 관한 전자기적 산란문제의 해석을 위하여, 다양한 수치해석 기법 중 모멘트법(MoM)을 보편적으로 가장 많이 사용해 왔

었다. 그 이유는 해석구조가 파장 정도의 크기의 내외가 되는 경우, MoM이 다른 수치해석기법들에 비해 비교적 계산량이 적게 드는 효율적인 방법으로 알려져 있기 때문이다. 일반적으로 MoM 해석의 경우에 있어 적분방정식의 kernel에 해당하는 그린함수의 유도 및 계산이 필수적으로 요구된다. 그런데 마이크로스트립 구조체에 의한 공간영역(spatial domain) 그린함수(Green's function)는 Sommerfeld integral(SI)로 불리는 적분식 형태로 표현되고, 이러한

「본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문임.」

금오공과대학교 전자공학부(School of Electronic Engineering, Kumoh National Institute of Technology)

\*LG 이노텍 부품연구소(LG Innotek)

· 논문 번호 : 20040309-027

· 수정완료일자 : 2004년 3월 30일

SI의 적분은 해석적 계산(analytical evaluation)이 불가능하다. 이와 같은 SI를 수치적분(numerical integration)을 할 경우, SI의 피적분 함수에 포함되어 있는 Hankel 함수의 고진동 특성으로 인해 많은 계산 시간이 소모된다는 단점이 있다. 최근 이와 같이 많은 계산시간을 필요로 하는 수치적분을 하지 않고도 그린함수 값을 구할 수 있는 다양한 closed-form Green's function(CGF) 방법들이 제안되었다<sup>[1]-[3]</sup>. 또한 이러한 CGF를 사용하여 MoM 행렬 요소들을 계산할 경우, 소요되는 계산 시간을 효과적으로 줄이기 위한 방법들도 CGF의 연구와 병행하여 제안되었다<sup>[4]-[6]</sup>. 기존의 CGF<sup>[1]-[3]</sup>를 사용한 MoM 행렬 요소는 해석적 계산이 불가능한 다중 적분식(multiple integral)의 형태로 표현되어지는데, 참고문헌 [4]에서는 CGF를 Taylor 급수전개로 근사화하여 행렬 요소들을 해석적으로 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 그러나 참고문헌 [4]의 방법은 Taylor 급수전개의 5차 근사화(fifth-order approximation)로 인하여 행렬요소를 구하기 위해 계산하여야 할 항의 개수가 너무 많다는 것이 문제점으로 지적될 수 있다. 그 이후 참고문헌 [5]와 [6]에서는 이러한 CGF의 근사화 없이 행렬 요소를 단일적분(1-D integration)으로 구할 수 있는 효율적인 방법들을 제안하였다.

가장 최근 기존의 CGF<sup>[1]-[3]</sup>들이 초월함수인 복소지수 함수의 합 형태로 표현되는 것과는 달리, 대수적(algebraic) 함수의 합 형태로 CGF의 표현이 가능한 새로운 형태의 CGF가 제안되었다<sup>[7],[8]</sup>. 본 논문에서는 편의상 참고문헌 [7]과 [8]에서 제안된 CGF를 기존의 CGF<sup>[1]-[3]</sup>와 구분하기 위해, 참고문헌의 제목에서와 같이 "새로운(new) CGF"로 부르기로 한다. 이러한 CGF<sup>[7],[8]</sup>가 MoM에 사용될 경우, 행렬 요소 까지도 Closed-form으로 구할 수 있다는 것이 "새로운 CGF"의 주된 이점이다. 즉, 행렬 요소를 구하는 과정에서 CGF의 근사화 과정이나 어떠한 수치계산 없이도 해석적으로 구할 수 있다는 점이다. 그러나 참고문헌 [8]의 방법을 사용할 경우, MoM 행렬의 한 요소를 closed-form으로 구한 최종 표현식이 무려 1,300여 개 항들의 합으로 표현되어 짐을 알 수 있었다. 그러므로 이 방법은(행렬요소의 해석적 계산 결과로) 수치계산(numerical evaluation) 경우와는 달리 수렴도 조사가 필요 없다는 이점을 제외하고는, 오

히려 참고문헌 [5] 및 [6]의 경우보다도 계산시간이 더 많이 소요되어질 수 있음을 예측할 수 있다. 또한 참고문헌 [7]의 방법으로 새로운 CGF의 값을 구할 경우, 동일한 마이크로스트립 구조라 할지라도 사용 주파수 범위가 넓어짐에 따라 매번 CGF 유도에 필요한 매개변수들의 값을 사전에 조사하여 결정해야 하는 번거로운 문제점도 있음을 알 수 있었다. 그러므로 본 논문에서는 MoM 행렬 요소의 해석적 계산을 위하여, 동일한 마이크로스트립 구조의 경우 사용 주파수 범위가 넓어지더라도 한 번 조사된 매개변수로 새로운 CGF를 구할 수 있는 견실한(robust) 방법과 행렬요소의 표현항 개수를 줄일 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

## II. 새로운 CGF 유도를 위한 견실한 방법

일반적으로 평판 마이크로스트립 구조체의 그린함수는 식 (1)과 같이 SI의 형태로 표현되어진다.

$$G(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho \tilde{G}(k_\rho) dk_\rho \quad (1)$$

여기에서  $H_0^{(2)}$ 는 2종 Hankel 함수이고,  $\tilde{G}(k_\rho)$ 는 파수영역(spectral domain) 그린함수이다.  $\tilde{G}(k_\rho)$ 는 closed-form으로 구해지나 식 (1)의 적분 식은 해석적 적분이 불가능하므로 기존의 CGF 방법<sup>[1]-[3]</sup>에서는  $\tilde{G}(k_\rho)$ 를 복소  $k_x$ -평면상의 근사화 적분경로를 따라 샘플링한 후, Prony 법<sup>[1]</sup>이나 GPOF 법<sup>[3]</sup>을 이용해 복소지수 함수의 합 형태로 근사화 한다. 그런 다음 식 (2)의 Sommerfeld 항등식을 사용하여 공간영역(spatial domain) 그린함수  $G(k_\rho)$ 를 CGF 형태로 표현하게 된다.

$$\frac{e^{-jk_\rho r}}{r} = \frac{1}{j2k_{z0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_\rho |z|} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (2)$$

이와는 달리 새로운 CGF 방법<sup>[7],[8]</sup>에서는 기존 방법에서 사용되는 Sommerfeld 항등식 대신에 식 (3)과 같은 Bessel 함수의 적분 공식을 이용하게 된다. 따라서 기존 CGF 방법<sup>[1]-[3]</sup>에서  $\tilde{G}(k_\rho)$ 를 복소  $k_x$ -평면상에서 근사화 하는 것과는 달리, 그림 1과 같은 복소  $k_\rho$ -평면의 근사화 적분경로를 따라서 복소 지수함수의 합으로 근사화 해야 한다.

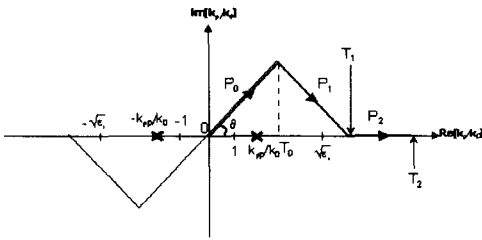


그림 1. 복소  $k_p$ -평면상에서의 근사화 적분경로들  
Fig. 1. The approximation paths on the complex  $k_p$ -plane.

$$\frac{w}{(w^2 + \rho^2)^{3/2}} = \int_0^\infty e^{-k_p w} k_p J_0(k_p \rho) dk_p \quad (3)$$

또한, 새로운 CGF 방법을 이용해 구해진 공간영역 그린함수 표현식은 MoM 행렬 요소를 참고문헌 [4]에서와 같이 Taylor 급수 전개에 의한 근사화 방법을 사용하지 않으면서도 해석적으로 계산할 수 있다는 장점을 갖는다<sup>[8]</sup>.

새로운 CGF를 유도하는 과정을 간략히 살펴보면 다음과 같다. 먼저,  $\tilde{G}(k_p)$ 를 그림 1과 같은 복소  $k_p$ -평면상의 근사화 적분경로를 따라 샘플링하고 GPOF 법과 2-단계 근사화 방법<sup>[3]</sup>을 이용해 복소 지수함수의 합 형태로 근사화 한다. 그리고 복소 지수의 합 형태로 근사화 된 파수영역 함수를 식 (3)의 항등식을 사용하여 공간영역 그린함수를 CGF로 표현하게 된다.

참고문헌 [7], [8]에서는  $P_0, P_1$ 의 두 개의 근사화 적분경로만을 고려한 2단계 근사화 방법을 사용하였다. 이와 같이 2단계 근사화 방법을 이용해 파수영역 그린함수를 복소 지수함수의 합 형태로 근사화 하더라도 공간영역 그린함수를 closed-form 형태로 표현할 수는 있다. 그러나 근사화 과정에서 2단계 근사화 적분경로의 종단점( $T_1$ ) 보다 큰 영역에서의 파수영역 그린함수를 고려할 수 없게 되므로, 사용 주파수 범위가 변하거나, 혹은 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수 각각의 경우에 대하여 매년 2단계 근사화에 필요한 매개변수들( $\theta, T_0, T_1$ )을 새롭게 결정해야 하는 번거로움을 갖게 된다<sup>[9]</sup>. 특히 근사화 매개변수로 경로  $P_0$ 의 기울기( $\tan \theta$ )의 선택이 매우 임계적인(critical) 문제점이 있다<sup>[9]</sup>.

먼저 파수영역에서 근사화된 그린함수의 정확도

를 매년 사전 조사해야 하는 번거로운 문제점을 해결하기 위하여, 그림 1에서와 같이 3단계 근사화 적분 경로를 사용하고자 한다. 3단계 근사화 적분경로를 이용하게 되면  $k_p$ 가 큰 파수영역 그린 함수 값을 최대한 고려해 넣을 수 있어 주파수의 변화 또는 그린함수의 종류에 관계없이 동일한 파라미터를 사용할 수 있는 장점을 갖게될 것으로 사료된다.

다음으로 매개변수  $\theta$ 의 선택이 매우 임계적인 문제점을 해소하기 위하여 참고문헌 [10]에 제시된 SI의 asymptotic 적분법을 고려해 보고자 한다. 그 이유는 steepest descent path(SDP) 방법을 사용할 경우 saddle point가  $k_p=0$  즉, 원점에 위치하고 있기 때문이다. 참고문헌 [10]을 근거로 하여 SDP는  $\tan \theta=1$ 임을 쉽게 알 수 있어, 기존 방법<sup>[7],[8]</sup>에서  $\tan \theta$ 를 1/10으로 선택한 것과는 달리 본 논문에서는  $\tan \theta$ 를 1로 선택하고자 한다. 그러므로 본 논문에서 사용될 3단계 근사화 적분 경로의 방정식은 식 (4)와 같다.

$$P_2 : k_p/k_0 = t, \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad (4a)$$

$$P_1 : k_p/k_0 = t + jT_0 \left( \frac{T_1 - t}{T_1 - T_0} \right), \quad T_0 \leq t \leq T_1 \quad (4b)$$

$$P_0 : k_p/k_0 = (1 + j)t, \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (4c)$$

### 2-1 근사화 매개변수의 최적의 선택 방법

3단계 근사화의 나머지 매개변수  $T_0, T_1$  및  $T_2$ 의 선택도 매우 중요하다. 그 이유는 이러한 매개변수의 적합한(부적합한) 선택이 정확한 CGF 유도에 좋은(나쁜) 영향을 미치기 때문이다.

이러한 매개변수의 선택방법을 설명하기 위해 참고문헌 [1]의  $\epsilon_r=12.6$ 인 마이크로스트립 구조체에 대한 CGF의 유도를 예로 들어 설명하고자 한다. 왜냐하면  $\epsilon_r=12.6$ 은 MMIC와 같은 다층 평판 구조체에서 널리 사용되고 있는 GaAs의 유전상수에 해당되기 때문이다.

기존 CGF 방법<sup>[7],[8]</sup>에서는 quasi-static 기여(즉,  $k_p$ 가 무한대로 접근할 때  $\tilde{G}(k_p)$ 의 극한값)를 사전처리 하지 않았으므로, 매우 큰  $k_p$ 에 대한  $\tilde{G}(k_p)$ 의 기여를 고려해 넣을 수 있도록 최대한 큰 값을 선택하고자 한다. 본 논문에서는  $T_2$ 를 2000으로 선택한다.

다음  $T_0$ 는 1보다 작게,  $T_1$ 은  $\sqrt{\epsilon_r}(=12.6)$ 보다 큰 값을 선택하고자 한다. 모든 마이크로스트립 구조체의 surface wave pole(SWP)  $k_{pp}$ 는 항상  $1 < k_{pp}/k_0 < \sqrt{\epsilon_r}$  인 영역 내에 존재하기 때문이다. 즉,  $k_{pp}$ 의 존재 영역이 포함되는 근사화 경로를 따라서  $\tilde{G}(k_p)$ 가 단조(monotonous) 변화를 취하지 않으므로 근사화에 어려움이 있기 때문이다. 그러므로 본 논문의 방법에서는 경로  $P_1$ 만 SWP의 영향을 받는 것과는 대조적으로, 기존 방법<sup>[7],[8]</sup>에서와 같이  $T_0$ 를 1보다 크게 선택을 할 경우, 경로  $P_1$  및  $P_2$  모두가 SWP의 영향을 받게 된다. 최적의  $T_0$  및  $T_1$ 을 선택하기 위해 관심을 가지는 주파수 영역의 중심 주파수에서 단 한 번 사전조사가 필요하다. 참고문헌 [1]의 해석구조에 대해 본 논문에서는 사전 조사를 통해  $T_0$ 를 0.5,  $T_1$ 을 20으로 선택하기로 한다.

이와 같이 선택된 3단계 근사화 경로를 따라서 GPOF 법을 사용하여  $\tilde{G}(k_p)$ 를 복소 지수 함수의 합으로 근사화한 후 식 (3)의 항등식을 사용하면 본 논문에서의 CGF가 식 (5)와 같이 유도된다.

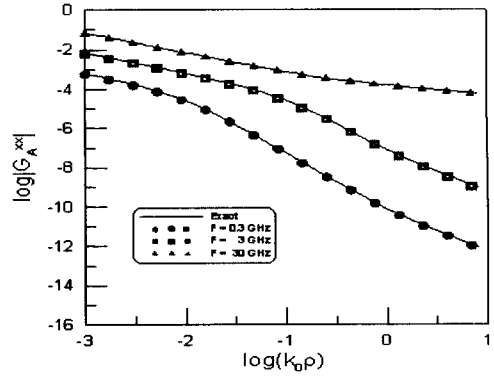
$$G(k_p) = 2 \left[ \sum_{i=1}^{M_0} \frac{a_{2i} b_{2i}}{(b_{2i}^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{i=1}^{M_1} \frac{a_{1i} b_{1i}}{(b_{1i}^2 + \rho^2)^{3/2}} + \sum_{i=1}^{M_2} \frac{a_{0i} b_{0i}}{(b_{0i}^2 + \rho^2)^{3/2}} \right] \quad (5)$$

여기에서  $a_{0i}, a_{1i}$  및  $a_{2i}(b_{0i}, b_{1i}$  및  $b_{2i})$ 는 각각 경로  $P_0, P_1$  및  $P_2$ 를 따라서 근사화 하는 과정에서 얻어진 복소 계수(복소 지수)들이고,  $M_0, M_1$  및  $M_2$ 는 복소 지수 함수의 개수들이다.

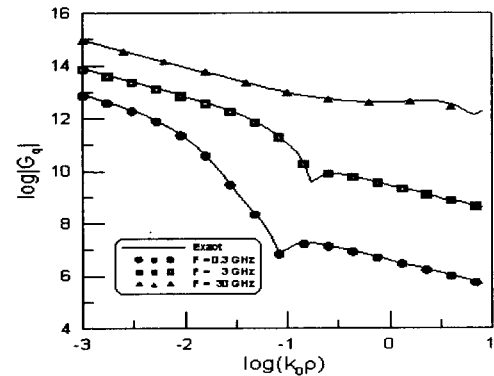
### 2-2 본 논문의 CGF 계산결과

본 논문이 제안한 방법의 타당성과 CGF의 정확성을 확인해 보기 위하여, 서로 다른 세 주파수(0.3 GHz, 3 GHz 및 30 GHz)에서 유도된 식 (5)의 CGF의 계산결과 및 식 (1) 형태인 SI의 수치적분 결과를 그림 2에 비교하여 각각 점선 및 실선으로 제시하였다.

본 논문의 CGF 계산 결과 상대오차가 1% 미만임을 알 수 있었으며, 그 결과 그림 2에서와 같이 본 논문(점선)의 결과와 수치적분(실선)의 결과가 거의 일치하는 것으로 보여진다.



(a) 벡터 포텐셜  
(a) Vector potential



(b) 스칼라 포텐셜  
(b) Scalar potential

그림 2. 공간영역 그린함수들의 크기( $\epsilon_r=12.6, h=1$  mm, 실선: 수치 적분, 점선: CGF)  
Fig. 2. The magnitude of the spatial domain Green's functions( $\epsilon_r=12.6, h=1$  mm, solid line: numerical integration, dotted line: CGF).

본 논문의 결과를 통해 강조하고 싶은 점은 단 한 번 선택된 동일한 매개변수(즉,  $\theta=1, T_0=0.5, T_1=20$  및  $T_2=2000$ )로 비교적 넓은 주파수 범위에서까지 CGF 유도가 가능했다는 것이고, 또한 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수에 관한 CGF를 각각 유도하는데 있어 동일한 매개변수를 사용했다는 점이다. 그러므로 본 논문의 방법이 기존 방법<sup>[7],[8]</sup>에 비해 견실한 접근 방법인 것으로 판단된다.

### III. MoM Formulation

마이크로스트립 구조를 해석하기 위해 Mixed

Potential Integral Equation(MPIE)을 세우고 이를 모멘트법(MoM)을 사용하여 행렬방정식으로 구하면, 행렬 요소는 전형적으로 식 (6)과 같이 표현되어진다.

$$\langle T_{xm}, G_{xx}^A * B_{xk} \rangle + \frac{1}{w^2} \langle T_{xm}, \frac{\partial}{\partial x} (G_q * \frac{\partial}{\partial x} B_{xk}) \rangle \quad (6)$$

여기에서  $\langle, \rangle$ 은 testing에 해당하는 inner product를, \*은 convolution integral을 의미한다. 식 (6)은 행렬요소중  $k$ 번째  $x$ -방향 전류셀에 의한 전체의  $x$ -성분을  $m$ 번째  $x$ -방향 테스트 셀에 대하여 inner product 했을 때의 경우를 예로 제시한 것이다. 그리고 식 (6)에서  $T_{xm}$ 은 testing 함수이고,  $G_{xx}^A$  및  $G_q$ 는 각각 벡터 및 스칼라 포텐셜을 의미하며,  $B_{xk}$  및  $\partial B_{xk}/\partial x$ 는 전류의 연속 방정식에 의해 각각 전류셀 및 전하셀의 기저함수를 의미한다.

### 3-1 기존 MoM의 문제점

일반적으로 기존의 MoM 해석의 경우, 기저함수와 testing 함수를 동일하게 선택하는 Galerkin 방법이 가장 널리 사용되고 있다. 이 절에서는 참고문헌 [8]에서 제시한 방법을 요약하여 간략하게 소개한 후, 기존 MoM의 문제점을 논의해 보고자 한다.

먼저 식 (6)을 적분식의 형태로 표현하면 식 (7)과 같이 된다.

$$\langle T_{xm}, G_{xx}^A * B_{xk} \rangle = \int \int_{d_r} dx dy T_{xm}(x, y) \left[ \int \int_{d_a} G_{xx}^A(x-x', y-y') B_{xk}(x', y') dx' dy' \right] \quad (7)$$

행렬 요소를 closed-form으로 구하기 위해 먼저, 식 (7)의 변수를 치환( $u=x-x', v=y-y'$ )하고 적분 순서를 바꾸어 정리하면 식 (8)과 같다.

$$\langle T_{xm}, G_{xx}^A * B_{xk} \rangle = \int \int dudv G_{xx}^A(u, v) \left[ \int \int T_{xm}(x, y) B_{xk}(x-u, y-v) dx dy \right] \quad (8)$$

식 (8)의 두 번째 적분식은 기저함수  $B_{xk}$ 와 testing 함수  $T_{xm}$ 의 곱이 피적분 함수(integrand)인 적분식으로 correlation 함수  $f(u, v)$ 로 불리기도 한다<sup>[4]</sup>. 기저함수  $B_{xk}$  및 testing 함수  $T_{xm}$ 를 동일한 지붕 기저함수(rooftop basis function)로 선택하는 Galerkin 법을 사용할 경우,  $f(u, v)$ 는 식 (9)와 같이  $u, v$ 에 관한

다항식으로 구해진다.

$$f(u, v) = \int \int T_{xm}(x, y) B_{xk}(x-u, y-v) dx dy = k_1 u^3 v + k_2 u^2 v + k_3 uv + k_4 v + k_5 u^3 + k_6 u^2 + k_7 u + k_8 \quad (9)$$

식 (9)에서 알 수 있듯이 Galerkin 방법을 이용한 경우에  $f(u, v)$ 는 8개의 항을 갖는 다항식으로 표현된다. 그러므로 행렬요소는 식 (8)에서 보는 바와 같이  $f(u, v)$ 와 식 (5) 형태의 CGF와 곱해진 항들을 피적분 함수로 하고 적분 변수가  $u$ 와  $v$ 인 적분식들로 표현되어짐을 알 수 있다. 행렬요소를 구하기 위한 이와 같은 적분식들은 부록에 제시된 적분공식들 ((A1)~(A5))을 사용하여 closed-form의 형태로 구해질 수 있다. 또한, 식 (6)의 둘째 항도 유사한 과정을 통해 closed-form 형태로 유도되므로 모멘트 행렬요소 전체를 수치적분 하지 않고도 해석적 계산에 의해 구할 수 있게 된다. 그러므로, 모멘트 행렬 요소의 해석적 계산으로 인하여 수렴도 조사가 필요하지 않게 되고, 수치계산에 비하여 계산시간도 줄일 수 있는 이점을 갖게 된다.

그러나 위의 방법을 이용해 단일 행렬요소를 해석적분에 의해 계산하는데 필요한 계산량을 살펴보면 다음과 같다. 우선, 식 (6)의 계산에 필요한 적분식의 개수는 14개(첫 항에 포함된 적분식은 8개이고 둘째 항에 포함된 적분식은 6개)이다. 그리고 각 적분식의 해석 적분은 평균적으로 6개 항의 합으로 표현되어진다. 또한, closed-form 그린함수의 항 개수만큼 연산이 이루어져야 하므로 전체 계산량은 이들의 수를 모두 곱한 양만큼이 된다. 예를 들어, 참고문헌 [7]에서 제시된 CGF의 항 개수(16개)를 사용하여 전체 계산량을 구해 보면 대략 1,300개 정도의 항들이 계산되어야 함을 알 수 있다. 그러므로, MoM 행렬 요소의 계산에 기존 방법을 이용하는 경우, 수렴도 조사는 필요하지 않게 되지만 상당히 많은 양의 항들이 계산되어야 함을 알 수 있다. 또한, 식 (9)의 각 항들이 포함된 적분식을 계산하기 위해서는 개별 항들마다 별도의 부 프로그램(sub routine)이 필요하게 된다. 따라서, 컴퓨터 프로그래밍 작업이 번거로워짐과 동시에 여러 발생 가능성이 항 개수가 적은 경우에 비해 상대적으로 높아지게 된다.

### 3-2 본 논문의 MoM

본 논문에서는 행렬 요소계산을 위해 사용되어지는 적분식 개수를 줄이기 위해 unidimensional rectangular pulse test 함수(일명 razor testing function)<sup>[11]</sup>의 사용을 고려해 보고자 한다. 먼저 전하 셀을  $h_x \times h_y$ 로 분할했다고 가정하고, 두 개의 전하 셀로 구성된  $k(m)$ 번째 전류셀의 중심좌표를  $(x_{k(m)}, y_{k(m)})$ 으로 표현하기로 한다. 기저함수는 기존의 방법과 마찬가지로 지붕기저함수를 사용하고, razor testing 함으로써 구해진 correlation 함수  $f_s(u, v)$ 는 8개의 항으로 표현되어지는 Galerkin 방법의 경우와 달리 식 (10)과 같이 3개의 항을 갖는 다항식이 된다.

$$f_s(u, v) = \int_{x_m^-}^{x_m^+} T_{xm}(x) B_{sk}(x-u, y_m-v) dx = \nu_2 u^2 + \nu_1 u + \nu_0 \quad (10)$$

여기에서  $x_m^+$  및  $x_m^-$ 는  $m$ 번째 testing 전류 셀을 구성하고 있는 2개의 전하 셀에 대한 중심좌표로, 각각  $x_m - h_x/2$  및  $x_m + h_x/2$ 에 해당된다. 그리고  $T_{xm}$ 은 중심좌표가  $(x_m, y_m)$ 인  $m$ 번째 testing 전류 셀의 razor 함수로 식 (11)과 같이 표현되며,  $B_{sk}$ 는 중심좌표가  $(x_k, y_k)$ 인  $k$ 번째 원천 전류셀의 rooftop 기저함수로 식 (12)와 같이 표현된다. 식 (10)에서의 계수  $\nu_2, \nu_1$  및  $\nu_0$ 는 식 (11)과 (12)를 식 (10)에 대입하고 도식적인 방법을 통해 correlation 함수  $f(u, v)$ 를 구하는 과정에서 쉽게 얻어지는 계수들이다.

$$T_{xm}(x) = T_x(x-x_m) = \begin{cases} 1, & |x-x_m| < \frac{h_x}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (11)$$

$$B_{sk}(x-u, y_m-v) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_k-u|}{h_x}, & |x-x_k-u| < h_x \\ & \& \\ & |y_m-y_k-v| < h_y/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12)$$

또한, 본 논문에서의 방법은 식 (6)의 두 번째 항을 계산하는 과정에서 correlation 함수 유도의 필요성이 없음을 쉽게 이해할 수 있으므로, 식 (6)은 최종 식 (13)과 같이 표현되어진다.

$$\iint G_{xx}^A(u, v) \cdot f_s(u, v) dudv + \frac{1}{w^2} \left[ \iint G_o \cdot \frac{\partial}{\partial x} B_{sk} dx' dy' \right]_{x_m^-}^{x_m^+} \quad (13)$$

식 (13)의 첫 항은 벡터장의 rotational 부분에 의한 결과이고, 둘째 항은 irrotational 부분(즉,  $-\nabla V$ )으로 razor testing(즉, testing 전류셀을 따라 선적분한)한 결과로 각 전하셀 중심( $x_m^-, x_m^+$ )에서의 스칼라 포텐셜 값에 대한 2중 적분식으로만 표현되어진다. 본 논문의 방법인 식 (13)으로 표현되어지는 행렬 요소를 구하는 과정에서 취급해야 하는 대표적인 적분식의 형태는 3가지로 식 (14)와 같다.

$$\iint \frac{u^k}{(b_i^2 + u^2 + v^2)^{3/2}} dudv, \quad k=0, 1, 2 \quad (14)$$

식 (14)의 적분식들은 부록에 수록된 적분 공식들을 사용하여 5개항들의 합 형태로 표현되는 closed-form으로 유도되어진다. 그러므로 기존의 Galerkin 방법으로 행렬 요소를 계산할 경우 약 1,300개 정도의 항을 계산해야 하는 것과는 달리, 본 논문의 방법에서는 약 300개(약 23%) 정도의 항들만 계산하면 됨을 알 수 있다.

### IV. 수치해석 결과 및 검토

그림 3은 본 논문에서 유도한 새로운 closed-form 표현식과 MoM 행렬요소의 해석적 계산방법의 타당성을 확인하기 위해서 해석하고자 선택한 마이크로 스트립 구조이다. 접지면 위에 위치한 폭이 좁은 마이크로 스트립 선로를 나타내고 있으며, 유전체 기판의  $\epsilon_r$ 은 4.0, 두께  $d$ 는 0.203 mm이고, 선로의 폭  $w$ 은 0.812 mm, 길이  $l$ 은 12 cm이다. 그리고 동축선 급전에 의한 입력 전류원은 주파수가 1 GHz이고, 선로의 왼편 끝점으로부터 1 cm 오른쪽( $x=0$ )에 위치하게 된다.

먼저 본 논문이 제안한 “새로운 CGF” 방법의 타당성을 한 번 더 확인하기 위하여, 그림 3의 해석 구조에 대해 벡터 및 스칼라 포텐셜 그린함수를 본 논

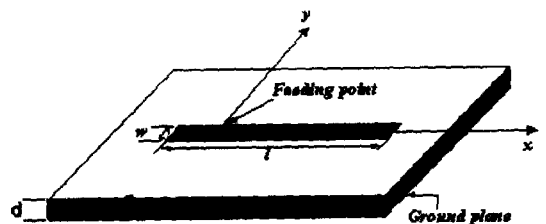
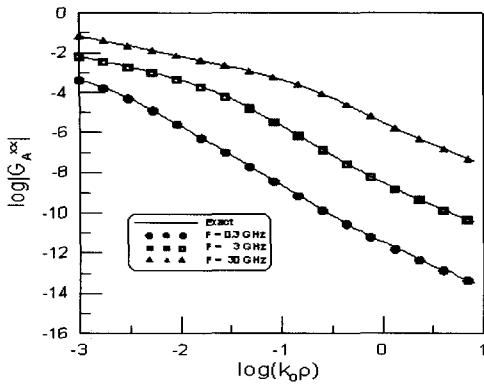
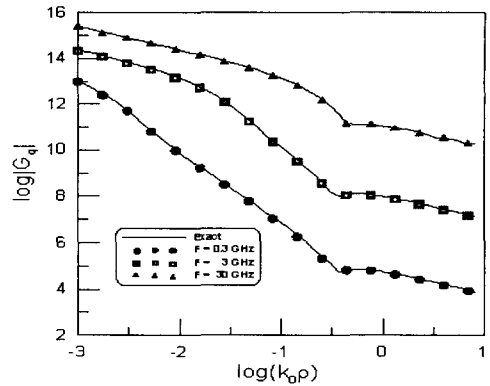


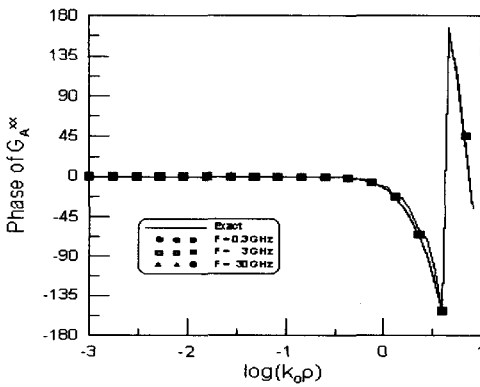
그림 3. 동축선 급전된 마이크로 스트립 선로  
Fig. 3. Microstrip line fed by coaxial.



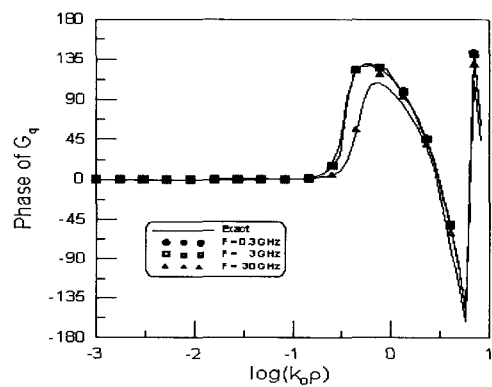
(a) 그린함수의 크기  
(a) Magnitude of the Green's function



(a) 그린함수의 크기  
(a) Magnitude of the Green's function



(b) 그린함수의 위상  
(b) Phase of the Green's function



(b) 그린함수의 위상  
(b) Phase of the Green's function

그림 4. 공간영역 벡터 포텐셜 그린함수의 크기 및 위상 ( $\epsilon_r=4.0$ ,  $h=0.203$  mm, 실선: 수치 적분, 점선: CGF)

Fig. 4. Magnitude and phase of the spatial domain vector potential Green's function ( $\epsilon_r=4.0$ ,  $h=0.203$  mm, solid line: numerical integration, dotted line: CGF).

그림 5. 공간영역 스칼라 포텐셜 그린함수의 크기 및 위상 ( $\epsilon_r=4.0$ ,  $h=0.203$  mm, 실선: 수치 적분, 점선: CGF)

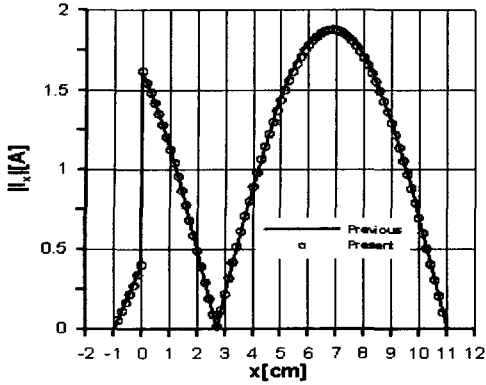
Fig. 5. Magnitude and phase of the spatial domain scalar potential Green's function ( $\epsilon_r=4.0$ ,  $h=0.203$  mm, solid line: numerical integration, dotted line: CGF).

문의 CGF 계산결과(점선)와 수치적분 결과(실선)를 비교하여 그림 4 및 5에 제시하였다. 그림들에서 볼 수 있는 바와 같이, 두 결과가 원천점과 장점간의 거리에 관계없이 그린함수의 크기뿐만 아니라 위상까지도 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

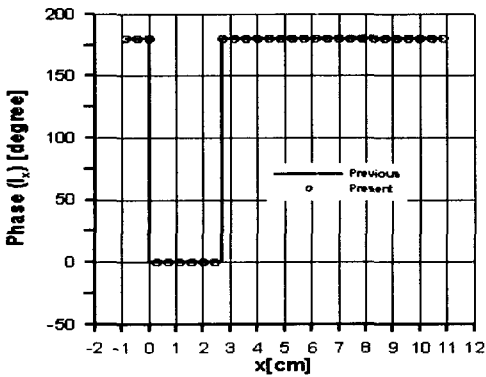
다음으로 본 논문이 제안한 MoM 방법의 타당성을 확인하기 위하여, 기존의 MoM<sup>[8]</sup>으로 해석된 선로상의 전류 분포(실선)와 본 논문의 방법으로 구해진 전류 분포(점선)를 비교하여 그림 6에 제시하였다. 그림 6에서 확인할 수 있듯이 본 논문에서 유도한

MoM 행렬 요소를 이용해 계산된 전류분포가 기존의 논문에서의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한, 본 논문의 MoM에서 사용된 기저함수의 개수는 48개로써, 기존 논문<sup>[8]</sup>에서 사용된 40개와 큰 차이가 없었다.

본 논문이 제안한 MoM의 수치계산의 효율성 (computational efficiency)을 좀 더 자세히 알아보기 위해서 그림 7에, 사용된 기저함수의 개수에 따라 본 논문의 방법과 기존의 방법으로 해석할 경우 소요되는 CPU 시간을 비교하여 제시하였다. 계산에



(a) 표면 전류의 크기  
(a) Magnitude of the current



(b) 표면 전류의 위상  
(b) Phase of the current

그림 6. 마이크로스트립 선로상의 표면 전류분포  
Fig. 6. Current distribution on the microstrip line.

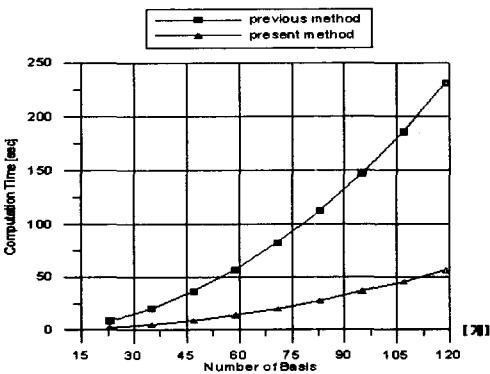


그림 7. 기저함수의 개수에 따른 CPU 시간  
Fig. 7. The CPU time versus the number of the basis functions.

사용된 컴퓨터는 Intel® Pentium® 4 CPU(667 MHz),

512 Mb의 메모리가 내장되어 있는 개인용 PC이다. 그림 7을 통해, 기저함수가 45개인 경우 계산시간이 4배 정도 차이가 남을 알 수 있고, 기저함수의 개수가 증가함에 따라 급격한 계산시간의 차이가 남을 볼 수 있다.

## V. 결 론

본 논문에서는 먼저 공간영역 그린함수를 새로운 CGF 형태로 유도하는 건설한 접근방법을 제안하였다. 즉, 일정한 매개변수를 사용하여 기존의 방법<sup>[7]</sup>(2배의 주파수 범위) 보다 넓은 주파수 범위(100배 주파수 범위)까지 CGF 유도가 가능하였다. 이와 같은 개선된 결과는 본 논문에서 3단계 근사화 방법 및 SDP 적분 방법과 같은 이론적인 근거에 바탕을 둔 최적의 근사화 경로를 선택한 때문이라고 사료된다.

그리고 MoM 행렬요소를 해석적 계산하는 과정에서 필요한 계산량을 줄이기 위해 razor test 함수를 이용하는 MoM을 이용하여 동축선으로 급전되는 마이크로스트립 선로의 전류분포를 해석해 보았다. 그 결과, 행렬요소 계산에 필요한 계산량을 기존의 방법에 비해 23% 정도로 줄일 수 있음을 알 수 있었고, 계산시간에 있어서는 4배 정도로 본 논문의 방법이 빠름을 알 수 있었다. 특히 기존의 결과와 비교해 보았을 때 본 논문의 방법이(기저함수의 개수에 따른)수렴도는 40~50개로 비슷하면서도 정확도(accuracy)의 손실이 없음을 확인할 수 있었다. 또한 전류셀(기저함수)의 개수가 증가함에 따라 급격한 계산시간의 차이가 남을 알 수 있었다.

결론적으로, 본 논문의 방법은 마이크로스트립과 같은 다층 평판 구조체의 전자기적 산란문제를 해석하는데 있어 실용적이면서도 매우 빠른 algorithm을 제공하는 방법으로 사료되어, 관련 소프트웨어(예로, Ansoft Ensemble) 개발에 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

## 부 록

본문의 해석적 적분에 필요한 적분 공식들을 정리하면 다음과 같다.

$$(A-1) \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 + a^2)^3}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}}$$



$$(A-2) \quad I_0 = \int \frac{1}{(u^2 + c^2)R} du = \frac{1}{vc} \arctan\left(\frac{uv}{cR}\right)$$

$$(A-3) \quad I_1 = \int \frac{u}{(u^2 + c^2)R} du \\ = \frac{\ln(R-v) - \ln(R+v)}{2v}$$

$$(A-4) \quad I_n = \int \frac{u^n}{(u^2 + c^2)R} du \\ = K_{n-2} - c^2 I_{n-2}$$

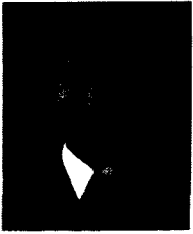
$$(A-5) \quad K_0 = \int \frac{1}{R} du = \ln(u+R)$$

여기에서,  $R = \sqrt{u^2 + v^2 + c^2}$

### 참 고 문 헌

- [1] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang and G. E. Howard, "A closed-form spatial Green's function for thick microstrip substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, no. 3, pp. 588-592, Mar. 1991.
- [2] M. I. Aksun, R. Mittra, "Derivation of closed-form Green's functions for a general microstrip geometry", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, no. 11, pp. 2055-2062, Nov. 1992.
- [3] M. I. Aksun, "A robust approach for derivation of closed-form Green's functions", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 5, pp. 651-658, May 1996.
- [4] L. Alatan, M. I. Aksun, K. Mahadevan and M. T. Birand, "Analytical evaluation of the MoM matrix elements", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 4, pp. 519-525, Apr. 1996.
- [5] L. Tarricone, M. Mongiardo and F. Cervelli, "A quasi-one-dimensional integration technique for the analysis of planar microstrip circuits via MPIE/MoM", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, no. 3, pp. 517-523, Mar. 2001.
- [6] Y. S. Lee, E. J. Kim and Y. K. Cho, "Efficient computation of MoM matrix elements in analysis of general microstrip structure", *IEICE Trans. on Electronics*, vol. E85-C, no. 12, pp. 2109-2116, Dec. 2002.
- [7] Y. Ge, K. P. Esselle, "New closed-form greens functions for microstrip structures-theory and results", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 6, pp. 1556-1560, Jun. 2002.
- [8] Y. Ge, K. P. Esselle, "A new, closed-form, spatial-domain greens function for layered structures and its application to the method of moments", *Microwave and Optical Tech. Letters*, vol. 32, no. 3, pp. 229-231, Feb. 2002.
- [9] E. J. Kim, Y. S. Lee, J. H. Ko and Y. K. Cho, "A robust approach for the derivation of closed-form green's functions for microstrip structures", *Proceedings of ISAPE-03*, Beijing, China, pp. 827-830, Oct. 2003.
- [10] K. A. Michalski, C. M. Butler, "Evaluation of Sommerfeld integrals arising in the ground stake antenna problem", *IEE Proceedings*, vol. 134, Pt. H, no. 1, pp. 93-97, Feb. 1987.
- [11] J. R. Mosig, F. E. Gardiol, "General integral equation formulation for microstrip antennas and scatterers", *IEE Proceedings*, vol. 132, pt. H, no. 7, pp. 424-432, Dec. 1995.

김 의 중



1996년 2월: 금오공과대학교 전자통신공학과 (공학사)  
1998년 2월: 금오공과대학교 전자공학과 (공학석사)  
2001년~현재: 금오공과대학교 전자통신공학과 박사과정  
[주 관심분야] Closed-form Green's

function method, scattering problems in antennas, waveguide filter

이 영 순



1979년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)  
1981년 2월: 한국과학기술원 전자공학과 (공학석사)  
1996년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학박사)  
1981년~현재: 금오공과대학교 전

자공학부 교수

[주 관심분야] electromagnetic theory, scattering problems in antennas, waveguide discontinuities, aperture coupling, microwave circuit.

이 상 준



1997년 2월: 금오공과대학교 전자통신공학과 (공학사)  
1999년 2월: 금오공과대학교 전자통신공학과 (공학석사)  
1999년~2002년: KEC 종합연구소  
2003년~현재: LG이노텍 부품연구소

[주 관심분야] RF 수동 소자, 전자파 수치해석, 무선 통신 시스템