한국수학사학회지 제17권 제2호(2004년 5월), 73-84

드 모르간 틀

충북대학교 수학과 · 금융수학연구소 **이승온**
solee@chungbuk.ac.kr

心齋 韓泰東 박사님의 80회 생신을 축하드리며 헌정합니다.

스톤은 스톤 쌍대성에 의하여 완비 불 대수는 극단적으로 비연결인 콤팩트 하우스도르프 공간에 대응되어 불 대수의 범주 **Bool**에서 단사 대상은 완비 불 대수인 사실에 의하여 0차원 콤팩트 공간의 범주 **ZComp**의 사영 대상은 극단적으로 비연결인 콤팩트 공간임을 증명하였고, 완전 정규 공간 X가 극단적인 비연결 공간이기 위한 필요충분조건은 X에서 실직선 $\mathbb{R}$로의 연속함수의 순서집합 $C(X, \mathbb{R})$이 데데킨트 완비인 사실[6]이 드 모르간 틀에서도 성립함을 증명하였다[2]. 이 논문에서는 드 모르간의 역사를 조사하고, 드 모르간 틀을 도입하여 극단적인 비연결 공간과의 관계와 드 모르간 틀과 불 대수 사이의 관계를 연구한다.

주제어 : 드 모르간, 드 모르간 틀, 극단적인 비연결 공간.

2000 Mathematical Subject Classification - 06A99, 54A99, 54D99

0. 서론

순서집합을 체계적으로 연구한 사람은 칸토어(Cantor, 1845~1918)이다. 칸토어가 주로 순서집합과 정렬집합에 대한 연구를 한 반면 데데킨트(Dedekind, 1831~1916)는 순서집합과 격자에 대한 연구를 하였으나 당시 수학자들에게 별로 호응을 얻지 못하고 1935년 이후 그의 결과들이 재평가되었다[11]. 순서집합의 완비화는 1937년 맥닐(MacNeill)에 의하여 구성되었다. 데데킨트 완비화와 맥닐 완비화를 비교하면, 집합론이 정립되지 않은 19세기 수학자들과 그 후의 수학자들 사이에 명백한 차이가 있다. 20세기 이전의 수학자들은 수 체계 및 관련된 분야에서 별로 벗어나지 못하였다.

순서집합, 특히 격자론은 집합과 명제들의 이론에서 시작되었는데, 라이프니츠(Leibniz, 1646~1716)가 처음으로 두 명제 p와 q의 논리곱을 pq로 나타내고 $pq=p$와 $p \Rightarrow q$가 동치임을 밝혔다. 그 후 불(Boole, 1815~1864)이 두 집합 x와 y의 교집합을 xy로, 서로 소인 두 집합의 합집합을 $x+y$로 표현했고 공집합을 0, 전집합을 1로 또 x의 여집합을 $1-x$로 나타내었다. 또한 불은 명제 계산의 수학화와 불 논리와 불 대수

관계의 기초를 이루었다[4]. 그 후 제번스(Jevons, 1835~1882)는 1864년에 x와 y가 서로 소가 아닌 경우의 합집합을 $x+y$로 정의하였다. 드 모르간(De Morgan, 1806~1871)은 1858년에, 퍼스(Peirce, 1839~1914)는 1867년에 독립적으로 오늘날 드 모르간 법칙으로 알려진 법칙을 증명하였다. 드 모르간은 1860년에 관계(relation)의 연구를 시작하고, 역 관계와 합성 관계를 정의하였고, 그 결과들은 슈뢰더(Schröder, 1841~1902)에 의하여 체계적으로 정리되었다. 그 후 퍼스는 1880년 분배 격자의 중요성을 처음 인지하였지만, 그는 모든 격자는 분배 격자로 생각하고 이론을 전개하였다. 분배 격자의 쌍대(dual) 격자도 분배 격자임은 1890년 슈뢰더가 처음 증명하였다[13].

라이프니츠가 처음 시도하였으나 실패한 이후 19세기 말에 논리곱과 논리합의 관계는 그들 사이의 분배 법칙과 드 모르간 법칙에 의해 완전히 해결되었다[11].

위에서 다룬 것은 모두 집합이나 명제를 대상으로 하고 있으며, 화이트헤드(Whitehead, 1861~1947)와 헌팅턴(Huntington, 1847~1952)이 각각 이들을 추상화하였다.

19세기 후반에 이르러 2가 논리보다 더 적합한 논리가 있을 것이라는 주장이 제기되었으며, 체르멜로(Zermelo, 1871~1953)의 선택 공리와 집합론의 역설을 해결하기 위한 시도 중 수학의 기초와 관련하여 중요한 세 가지 사조가 나타났다. 즉 힐베르트(Hilbert, 1862~1943)와 베르나이스(Bernays, 1888~1977)에 의한 형식주의, 러셀(Russell, 1872~1970)과 화이트헤드(Whitehead, 1861~1947)에 의한 논리주의, 브로우베르(Brouwer, 1882~1966)가 이끄는 직관주의가 그들이다[10].

1930년 브로우베르 논리의 수학화로 헤이팅(Heyting, 1898~1980) 대수가 도입되었고[7], 1958년 베나부(Bénabou)가 완비 헤이팅 대수(complete Heyting algebra), 즉 틀(frame)이 위상 구조를 연구하는데 적절한 격자임을 밝혔다[3].

불 대수는 헤이팅 대수 이외에도 유사 역원(pseudo complemented) 분배 격자, Post 대수, 드 모르간 대수, 루카시에비치(Lukasiewicz) 대수 등으로 일반화되어, 불 대수가 불 논리의 수학화이듯이 이들은 각각 중요한 논리들의 수학화이다[12]. 한편, 완비 격자 쪽으로는 완비 불 대수, 완비 헤이팅 대수, 연속 격자, 일관된(coherent) 격자 등으로 연구가 진행중이며, 순서 및 격자 이론은 그 자체의 연구와 병행하여 논리의 체계 혹은 수학화와 더불어 발전하였다[5].

1937년 스톤(M. H. Stone)은 극단적인 비연결 공간을 소개하였고 아래의 정리 2.2를 증명하였다. 1906년에 프레셰(Fréchet, 1878~1973)가 쓴 학위 논문에서 거리 공간과 수열 공간을 도입하여 수 체계의 위상을 추상화한 후, 1914년 하우스도르프(Hausdorff, 1868~1942)가 위상 공간(오늘의 하우스도르프 공간)을 도입함으로써 위상 수학이 시작되었다.

실수의 위상 구조와 고른(uniform) 구조가 실수의 순서 구조, 즉 데데킨트 완비성

(completeness)에 의하여 결정된다는 것은 잘 알려져 있다. 실제로 실수의 완비성과 실수가 데데킨트 완비인 것은 서로 동치이다. 거리 공간의 위상 구조는 실수의 순서 구조를 이용하여 정의된다. 그러나 위상 공간과 순서 구조 사이의 연결을 처음 밝힌 사람은 스톤이었다. 그는 우선 불 대수와 모든 원소가 멱등원 또는 제곱이 자신이 되는(idempotent)인 유니타리 환(unitary ring), 즉 불 환과 서로 동치임을 보였다. 환의 아이디얼 이론(ideal theory)을 불 대수에 옮겨 격자론에서 아이디얼 이론의 중요성을 처음으로 인지하였다. 스톤 쌍대성에 의하여 완비 불 대수는 극단적으로 비연결인 콤팩트 하우스도르프 공간(extremally disconnected compact Hausdorff space)에 대응되어 불 대수의 범주 **Bool**에서 단사 대상(injective object)은 완비 불 대수인 사실에 의하여 0차원 콤팩트 공간의 범주 **ZComp**의 사영 대상(projective object)은 극단적으로 비연결인 콤팩트 공간임이 증명된다. 따라서 스톤 쌍대성에 의하여 위상 수학과 순서 구조론은 새로운 전기를 맞게 된다.

1958년 글리슨(Gleason)은 Y가 콤팩트 하우스도르프 공간이면 콤팩트 하우스도르프 공간의 범주 **KHausSp** 안의 극소전사함수(minimal surjection) $f: X \to Y$가 위상 동형 사상임을 보였다. 그는 또한 **KHausSp**의 사영 대상은 극단적인 비연결 공간임을 보였고, 이를 국소 콤팩트 공간으로 확장시켰다. 1959년 레인워터(Rainwater)는 사영 공간과 이산 공간의 스톤·체크 콤팩트화(Stone-Čech compactification)의 관계를 연구했고 1967년 슈트라우스(Strauss)는 글리슨의 결과를 좀 더 일반적인 공간으로 확장시켰다[8].

한편, 완전 정규 공간 X가 극단적인 비연결 공간이기 위한 필요충분조건은 X에서 실직선 $\mathbb{R}$로의 연속함수의 순서집합 $C(X, \mathbb{R})$이 데데킨트 완비인 사실[6]이 드 모르간 틀에서도 성립함이 증명되었다[2].

이 논문에서는 드 모르간의 역사를 조사하고, 드 모르간 틀을 도입하여 극단적인 비연결 공간과의 관계와 드 모르간 틀과 불 대수 사이의 관계를 연구한다.

이 논문의 격자는 최대원 e와 최소원 0을 갖는 유계 격자를 의미하며 격자 준동형(lattice homomorphism)은 최대원과 최소원을 보존시키는 것을 의미한다. 그 외 이 논문에서 정의하지 않은 모든 용어는 [5], [8], [9]를 따른다.

1. 드 모르간

드 모르간(Augustus De Morgan)의 아버지는 인도에서 대령으로 복무를 하였고, 드 모르간은 그 기간 중에 태어났다. 그는 태어난 지 얼마 안되어 오른쪽 눈의 시력을 잃었으며, 생후 7개월만에 가족들과 함께 영국으로 돌아왔다. 그의 아버지는 드 모르

간이 10살이었을 당시 사망하였다.

드 모르간은 학교에서 그다지 뛰어난 점을 보이지 않았으며, 특히 그의 신체 장애로 인하여 다른 학생들과 어울려 운동을 하는 일이 없었다. 또한 급우들의 짓궂은 장난에 자주 놀림감이 되었다.

드 모르간은 1823년, 16살의 나이로 케임브리지 대학교 트리니티 대학(Trinity College Cambridge)에 입학하였다. 그는 그 곳에서 피콕(Peacock, 1791~1858)과 휘웰(Whewell)에게 수업을 받았으며, 이 세 명은 후에 오랜 친구가 되었다. 그는 문학사 학위를 받았으나, 문학석사 학위를 받기 위해서는 신학 시험을 통과해야 했으므로, (영국정교회의 일원이었음에도 불구하고 그는 신학 시험에 대해 극구 반대하였다) 그는 석사 학위 없이 케임브리지에 더 이상 머무를 수 없었다.

1826년 그는 런던에 있는 집으로 돌아왔고, 변호사가 되기 위한 공부를 하기 위하여 링컨 숙사(Lincoln's Inn)에 들어갔다. 1827년에 21살의 나이로 그는 당시 신생 대학이었던 런던 대학 수학 교수직을 신청하였으며, 딱히 수학에 관한 논문 및 저서가 없었음에도 불구하고 임용되었다.

1828년 드 모르간은 런던 대학의 첫 번째 수학 교수가 되었으며, "study of mathematics"라는 주제로 그의 첫 강의를 열었다. 그는 이념 충돌로 인해 1831년에 교수직을 사임하였고. 1836년에 다시 교수로 임명되었으나, 1866년에 같은 이유로 사임하였다. 'Elements of arithmetic'(1836)은 그의 두 번째 저서였으며, 여러 번 재판되었다.

1838년, 이전까지 불명확했던 수학적 귀납법이라는 용어에 대해서 엄격한 근거에 의한 정의를 내리고 이를 Penny Cyclopedia에 발표하였다. Penny Cyclopedia는 런던대학 개혁가들의 학회인 Society for the Diffusion of Useful Knowledge에 의해 출판되었다. 드 모르간의 유명한 저서인 'The Differential and Integral Calculus' 또한 같은 학회에서 출판되었다.

1849년 그는 복소수에 대한 기하학적 해석을 담고 있는 'Trigonometry and double algebra'를 출판하였다.

그는 대수학의 순수 상징적인 본질을 인지하고 일반적인 대수학보다 대수학 존재 자체에 대해 관심을 갖고 있었다. 그는 드 모르간의 법칙을 소개했으며 그의 커다란 업적은 수학적 논리의 개혁을 이룬 것이다.

드 모르간은 배비지(Charles Babbage, 1791~1871)와 가깝게 지냈으며, 배비지에게 처음으로 컴퓨터 프로그램을 만들어준 러블레이스(Lady Lovelace, 1815~1852)에게 개인 지도를 하였다.

또한 드 모르간은 해밀턴(William Hamilton, 1788~1856)과도 가깝게 지냈으며, 해

밀턴이 했던 것처럼 2차원 대수학을 3차원 대수학으로 확장하려고 시도하였다. 드 모르간이 해밀턴에게 보냈던 편지에서 그는 해밀턴과 또 다른 해밀턴(William Rowan Hamilton, 1805~1865) 경과의 서신왕래에 대해 언급했다. 그가 적기를,

> 당신도 알고 있듯이 나는 William Hamilton경과 당신은 상반된 인물이라는 생각을 갖고 있다. 내가 에든버러로 연구의 일부를 보내면 William Hamilton경은 내가 그로부터 그것을 훔쳤다고 말한다. 내가 당신에게 연구의 일부를 보내면 당신은 나로부터 그것을 받아 즉시 일반화하고 사회에 일반화된 결과를 발표하여 나로 하여금 그 정리의 두 번째 발견자가 되게 만든다.

1866년에 그는 런던수학회의 공동 발기인이었고, 첫 번째 대표자가 되었다. 드 모르간의 아들이며 또한 매우 유망한 수학자였던 조지(George)는 그 학회의 첫 번째 총무가 되었다. 같은 해에 드 모르간은 왕립 천문 학회(Royal Astronomical Society)의 회원으로 선출되었다. 그러나 드 모르간은 왕립 학회(Royal Society)의 일원이 된 것을 반기지 않았으며, 그의 이름이 왕립 학회에 관련하여 쓰여지는 것 또한 거부하였다. 그뿐 아니라 그는 에든버러 대학에서 수여한 명예 학위 또한 거부하였다. 히스트(Thomas Hirst, 1830-1892)가 쓴 글에 의하면

> 그의 능력은 의심할 여지가 없지만 드 모르간은 나를 두렵게 하는 냉담하고 독단적인 현학자이다.

맥파레인(Macfarlane)은 이렇게 말한다

> ... 드 모르간은 자신을 잉글랜드, 스코틀랜드, 웨일스, 아일랜드 중 어느 곳에도 속하지 않는 영국인이라고 생각한다.
>
> ... 그는 시골을 좋아하지 않았으며, 그의 가족들이 해변에서 여가를 즐기고 있을 때, 다른 과학자들이 British Association에서 즐겁게 토론을 하고 있을 때, 그는 무덥고 먼지투성이의 런던 도서관에 쳐 박혀 있었다. ... 마치 자연 철학자(physical philosopher)처럼, 그에겐 어떠한 일반적인 감흥도 없었다. 그의 태도는 그의 신체적 결함으로 보아서 당연한 것이다. 그는 자신이 관찰자가 되는 것도, 실험자가 되는 것도 원하지 않았기 때문이다. 그는 선거에 투표한 적이 없으며, 하원이나 웨스트민스터 사원 같은 곳을 방문한 적도 없다.

드 모르간은 숫자에 관한 색다른 현상에 흥미를 갖고 있었으며, 1864년에 그는 x^2년에 x살이라는 것을 기록한 바 있다. (그는 1849년에 43살이었다.) (1980년에 태어난 모든 사람들도 똑같은 사실을 말할 수 있다.)

2. 드 모르간 틀

우리는 이 절에서 드 모르간 틀을 도입하고 연구한다.

완비 격자 L이 헤이팅 대수일 때, L을 틀(frame)이라고 정의한다([3], [8]). 틀 L의 임의의 부분 집합 S에 대하여 $(\bigvee S)^* = \bigwedge \{s^* \mid s \in S\}$이다. (여기서 $s^* = \bigvee \{a \mid a \wedge s = 0\}$은 s의 유사 역원(pseudocomplement)이다.) 위상공간 X에 대하여 X의 위상 $\Omega(X)$는 틀이 된다.

실수의 집합 $\mathbf{R}$에 주어진 보통 위상 $\Omega(\mathbf{R})$의 원소 $p=(0, 1)$와 $q=(1, 2)$에 대해 $(p \wedge q)^* = ((0, 1) \cap (1, 2))^* = \varnothing^* = \mathbf{R}$이지만 $p^* \vee q^* = (0, 1)^* \cup (1, 2)^* = \mathbf{R} - \{1\}$이므로 $(p \wedge q)^* \neq p^* \vee q^*$가 된다. 즉, 불 논리의 $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (여기서 p와 q는 임의의 명제)와 일치하지 않는다.

또한 $u=(0, 1) \cup (1, 2)$에 대하여 $u^* = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$이므로 $u^{**} = (0, 2)$가 되어 $u \neq u^{**}$이다. 즉, 불 논리의 $\sim(\sim p) \equiv p$와 일치하지 않는다. 더욱이 $u \vee u^* \neq \mathbf{R}$이므로 $p \vee (\sim p) \equiv t$ (여기서 t는 항진 명제)도 성립하지 않는다.

이 절에서 우리는 불 논리와는 다른 논리 체계와 관계가 있는 드 모르간 틀을 도입하고 중요한 성질들을 조사한다.

2.1 보조 정리 [8]. 틀 L의 원소 x와 y는 다음을 만족시킨다.

(1) $x \leq x^{**}$

(2) $a \wedge x = 0 \Leftrightarrow a \wedge x^{**} = 0$

(3) $(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$

(4) $x^* = x^{***}$

(5) $x^{**} = x^{****}$

(6) 함수 $n : L \rightarrow L\ (x \mapsto x^{**})$는 L의 nucleus가 된다.
즉, 함수 n은 아래의 세 가지 식을 만족시킨다.
(i) $x \leq n(x)$
(ii) $n(x \wedge y) = n(x) \wedge n(y)$
(iii) $n(n(x)) = n(x)$

(7) $L_{**} = \{x^{**} \mid x \in L\}$은 불 대수이다.

위상 공간 X의 개집합 틀 $\Omega(X)$의 원소 U에 대하여 $U^{*}=\operatorname{int}(X-U)$이므로 $U^{**}=\operatorname{int}(X-\operatorname{int}(X-U))=\operatorname{int}\overline{U}$이다. 이때, $\operatorname{int}\overline{U}$는 X의 정칙 개집합(regular open subset)이므로 $\Omega(X)_{**}=\{U \mid U$는 X의 정칙 개집합$\}$이 된다.

2.2 정리. 틀 L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

(1) $x^{*}\vee x^{**}=e \quad (x\in L)$

(2) $(x\wedge y)^{*}=x^{*}\vee y^{*} \quad (x, y\in L)$

(3) $(x\vee y)^{**}=x^{**}\vee y^{**} \quad (x, y\in L)$

(4) L_{**}는 L의 부분 격자이다.

(5) $x\wedge y=0$이면 $x^{*}\vee y^{*}=e$이다 $(x, y\in L)$

(6) $x^{*}\in BL=\{x\in L \mid x$는 역원을 갖는다$\}$

증명. (1)⇒(2) $x\wedge y\le x, y$이므로 $(x\wedge y)^{*}\ge x^{*}\vee y^{*}$이다.

한편, $(x\wedge y)^{*}\wedge x\wedge y=0 \Rightarrow (x\wedge y)^{*}\wedge x^{**}\wedge y=0 \Rightarrow (x\wedge y)^{*}\wedge x^{**}\le y^{*}$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(x\wedge y)^{*}=(x\wedge y)^{*}\wedge e &=(x\wedge y)^{*}\wedge(x^{*}\vee x^{**})\\ &=[(x\wedge y)^{*}\wedge x^{*}]\vee[(x\wedge y)^{*}\wedge x^{**}]\\ &\le x^{*}\vee y^{*}\end{aligned}$$

(2)⇒(3) $x^{**}\vee y^{**}=(x^{*}\wedge y^{*})^{*}=(x\vee y)^{**}$이다.

(3)⇒(4) $L_{**}=\{x^{**} \mid x\in L\}$이고 L_{**}는 $\wedge$에 관하여 닫혀있다.

(4)⇒(1) x^{*}와 x^{**}가 L_{**}의 원소이므로 보조 정리 2.1 (7)에 의하여 $e=x^{*}\vee_{L_{**}}x^{**}$ $=x^{*}\vee_{L}x^{**}$이다.

(2)⇒(5) $x\wedge y=0$이므로 $x^{*}\vee y^{*}=(x\wedge y)^{*}=e$이다.

(5)⇒(6) $x\wedge x^{*}=0$이므로 $x^{*}\vee x^{**}=e$이다. 또한 $x^{*}\wedge x^{**}=0$이므로 $x^{*}\in BL$이다.

(6)⇒(1) $(x^{*})'=x^{**}$이므로 $x^{*}\vee x^{**}=e$이다.

2.3 정의. 틀 L이 정리 2.2의 여섯 가지 조건 중 하나를 만족시킬 때, 틀 L을 드 모르간 틀(De Morgan frame) 또는 극단적인 비연결 틀(extremally disconnected frame)이라 하고 DM으로 표시한다.

헤이팅 대수 L이 불 대수가 되기 위한 필요충분조건은 L의 임의의 원소 x에 대하여 $x=x^{**}$가 되는 것이다. 따라서 완비 불 대수는 DM 틀이 된다. 그러나 세 점으로 이루어진 사슬(chain) $(\{0, x, e\}, \leq)$은 DM 틀이지만 불 대수는 아니다. 일반적으로 완비 사슬 L은 DM 틀이지만 불 대수는 아니고, $L_{**}=\{0, e\}$이다. 한편 위의 예에서 보통 위상이 주어진 실수 공간의 개집합 틀 $\Omega(\mathbb{R})$은 DM 틀은 아니다.

무한 집합 X의 여유한 위상(cofinite topology) $\Omega(X)$는 DM이다. 즉 극단적인 비연결 틀이다. 그러나 위상공간 $(X, \Omega(X))$는 연결 공간이므로 극단적인 비연결 틀과 연결 공간 사이에는 서로 관계가 없다.

2.4 참고. 틀 L과 M에 대하여 다음을 만족한다.

(1) $h: L \to M$가 전사 조밀 틀 준동형이고 L이 DM이면 M도 DM이다.

(2) L이 DM일 때, L의 임의의 원소 a에 대하여 $\downarrow a$도 DM 틀이다.

(3) L의 임의의 원소 x와 y에 대하여 $x < y$이면 $x^{**} < y$이다.

(4) L 정칙 DM이면 L 0-차원이다.

증명. (1) M의 원소 a와 b에 대하여 $a \wedge b=0$이라 하자. $h(x)=a$, $h(y)=b$인 L의 원소 x와 y가 존재한다. $h(x \wedge y)=0$이고 h는 조밀 틀 준동형이므로 $x \wedge y=0$이다. L이 DM 틀이므로 $x^* \vee y^*=e$가 되고 $e=h(x^*) \vee h(y^*) \leq h(x)^* \vee h(y)^*$이므로 $a^* \vee b^*=e$이다.

(2) $u_a: L \to \downarrow a\,(x \mapsto x \wedge a)$는 틀 준동형이다. L의 임의의 원소 x에 대하여 $u_a(x^*)$는 $\downarrow a$에서 $u_a(x)$의 유사 역원이 된다. $u_a(x^*)=(u_a(x))$라고 표시하자. 임의의 $y \in \downarrow a$ 에 대하여 $u_a(y^*)=(u_a(y))=(y)$이고 L이 DM이므로 $y^* \in L$는 역원을 갖는다. 따라서 (y) 도 $\downarrow a$ 에서 역원을 갖는다.

(3) L에서 $x < y$이면 $x \wedge a=0$, $y \vee a=e$인 L의 원소 a가 존재하고 $x^{**} \wedge a=0$이므로 $x^{**} < y$가 된다.

(4) 임의의 $a \in L$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a &= \bigvee \{ x \mid x < a\} \le \bigvee \{ x^{**} \in BL \mid x < a\} \\ &\le \bigvee \{ x^{**} \in BL \mid x^{**} < a\} \\ &\le \bigvee \{ x \mid x < a \mid x \in BL\} \\ &\le a \end{aligned}$$

그러므로 $a = \bigvee \{ x^{**} \mid x < a\} = \bigvee \{ x \mid x \le a,\ x \in BL \} \le a$가 된다.

따라서 L은 0-차원 틀이다.

2.5 정리. 0-차원 틀 L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

(1) L은 DM이다.

(2) $L_{**} = BL$

(3) BL은 틀이다. 따라서, BL은 완비 격자이다.

증명. (1)⇒(2) 정리 2.2의 (6)에 의하여 $L_{**} = \{ x^* \mid x \in L\} \subseteq BL$이다. 역으로, BL의 임의의 원소 x에 대하여 $x^* = x'$이므로 $x^{**} = x'' = x \in L_{**}$가 되어 $BL \subseteq L_{**}$이다. (여기서 x'은 x의 역원)

(2)⇒(3) L_{**}는 틀이고 $BL = L_{**}$이므로 BL도 틀이다.

(3)⇒(1) $n_0 : L \to L\,(a \mapsto n_0(a) = \bigvee_{BL} \{ x \in BL \mid x \le a\})$가 L에서 prenucleus[1]가 되므로 $Fix(n_0) = BL$이다. L의 원소 a를 택하면 다음이 성립한다.

$$a \le n_0(a) \Rightarrow n_0(a)' = n_0(a)^* \le a^* \Rightarrow a^* \wedge n_0(a) \le n_0(a^* \wedge a) = n_0(0) = 0$$

그러므로 $a^* \le n_0(a)^* = n_0(a)'$ 이다.

따라서 $n_0(a)' = a^*$가 된다. 즉 $a^* \in BL$이므로 L은 DM이다.

3. 극단적인 비연결 공간

드 모르간 틀의 또 다른 이름은 극단적인 비연결 틀이다. 위상 공간 X의 개집합 틀 $\Omega(X)$가 DM이 되기 위한 필요 충분 조건은 위상 공간 $(X, \Omega(X))$가 극단적인 비연결 공간이 되는 것이다. 하우스도르프 공간이 아닌 위상 공간에서는 극단적인 비연결 공간과 비연결 공간은 서로 관계가 없으므로 극단적인 비연결이라는 이름은 비교적 적합하지 않다고 볼 수 있다. 그러나 하우스도르프 공간에서는 극단적인 비연결 공간은 완전 비연결(totally disconnected) 공간이 되고, 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

3.1 정의. 위상공간 $(X, \Omega(X))$의 임의의 열린 부분 집합 A에 대하여 $\overline{A}$ 도 열린 부분 집합이면, $(X, \Omega(X))$를 극단적인 비연결 공간(extremally disconnected space)이라고 한다.

3.2 예. (1) 두 점 이상으로 이루어진 이산 공간은 극단적으로 비연결인 비연결 공간이다.

(2) 비이산 공간은 극단적인 비연결인 연결 공간이다.

(3) 여유한 위상을 가지는 무한 공간은 극단적인 비연결인 연결 공간이다.

(4) 여가산 위상(cocountable topology)을 갖는 비가산 공간은 극단적인 비연결인 연결 공간이다.

(5) 보통 위상이 주어진 실수 공간 $(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{R}))$은 극단적인 비연결이 아닌 연결 공간이다.

연결 공간과 비연결 공간의 관계와 달리 연결 공간과 극단적인 비연결 공간, 그리고 비연결 공간 사이에는 아무 관련이 없다. 그러나 극단적인 비연결 공간 $(X, \Omega(X))$와 개집합 틀 $\Omega(X)$ 사이에는 다음의 관계가 있다.

3.3 보조 정리 위상 공간 X에 대하여 다음은 서로 동치이다.

(1) X는 극단적인 비연결 공간이다.

(2) X의 개집합 A와 B에 대하여 $A \cap B = \emptyset$이면 $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$이다.

(3) X의 폐집합 A와 B에 대하여 $A \cup B = X$이면 $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) = X$이다.

3.4 정리. 위상공간 X의 개집합 틀 $\Omega(X)$가 DM 틀이 되기 위한 필요충분조건은 위상공간 $(X, \Omega(X))$가 극단적인 비연결 공간이 되는 것이다.

증명. $\Omega(X)$가 DM 틀이면 정리 2.2의 1)에 의하여 $\Omega(X)$의 임의의 원소 U는 $U^{*} \vee U^{**} = X$를 만족시킨다. 즉 $\operatorname{int}(X-U) \bigcup \operatorname{int}(\overline{U}) = X$이므로 다음을 얻는다.

$$(X - \operatorname{int}(X-U)) \bigcap (X - \operatorname{int}(\overline{U})) = \varnothing$$

따라서 $\overline{U} \subseteq \operatorname{int}(\overline{U})$이므로 $\overline{U} \in \Omega(X)$가 된다.

역으로 임의의 $G \in \Omega(X)$에 대하여, 보조정리 3.3을 이용하면 $G^{*} \vee G^{**} = \operatorname{int}(X-G) \bigcup \operatorname{int}(\overline{G}) = X$이므로 $\Omega(X)$는 DM 틀이다.

참고 문헌

1. Banaschewski, B., "Completion in Pointfree Topology," *Lecture Notes in Mathematics & Applied Mathematics* No 2/96, University of Cape Town, 1996.
2. Banaschewski, B. · Hong, S.S., "Completeness properties of function rings in pointfree topology," *Comment. Math. Univ. Carolina* 44, 2(2003), 245-259.
3. Bénabou, J., "Treillis, locaux et paratopologies, séminaire Ehresmann," *Topologie et Géométrie Différentielle* 1re année(1957-8), exposé 2.
4. Bourbaki, N., *Elements de mathematique*, Theorie des ensembles, Chapitres 1 et 2. Troisieme edition, Hermann, Paris, 1966.
5. Gierz, G. · Hofmann, K.H. · Keimel, K. · Lawson, J.D. · Mislove, M. · Scott, D.S., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, New York, 1980.
6. Gillman, L. · Jerison, M., *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand, 1960.
7. Heyting, G., *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.
8. Johnstone, P.T., *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
9. Lee, S.O., "Countably Approximating 틀," Commun. Korean Math. Soc. 17(2002), No. 2, 295-308.
10. 이승온 · 김혁수 · 박진원 · 이병식, "직관주의 논리," 한국수학사학회지 제12권 제1호(1999), 32-44.
11. 홍성사 · 홍영희, "순서와 위상 구조의 관계," 한국수학사학회지 제10권 제1호(1997), 19-32.
12. 홍영희, "수학적 구조와 격자론," 한국수학사학회지 제15권 제2호(2002), 175-181.
13. 홍영희, "격자론의 기원," 한국수학사학회지 제12권 제2호(1999), 15-23.

De Morgan Frames

Dept. of Mathematics, Chungbuk National Univ.
Research Institute of Mathematical Science **Seung On Lee**

Stone introduced extremally disconnected spaces as the image of complete Boolean algebras under his famous duality between **Bool** and **ZComp** and they turn out to be projective objects in various categories of Hausdorff spaces and completely regular ones are exactly those X with Dedekind complete $C(X, \mathbb{R})$. In the pointfree setting, extremally disconnected frame (= De Morgan frame) are those with De Morgan condition. In this paper, we investigate a historical aspect of De Morgan frame together with that of De Morgan.

Key words: De morgan, De Morgan frame, extremally disconnected space.