

논문 2004-41SC-2-1

# 시간지연을 갖는 2차 시스템의 LQ-PID 제어기 동조

(LQ-PID Controller Tuning for the Second-Order System with Time-Delay)

박택선\*, 서병설\*\*

(Taek-Seon Park and Byung-Suhl Suh)

## 요약

본 논문은 시간지연을 갖는 2차 시스템에서 시간영역의 설계사양을 만족하는 최적 강인 LQ-PID제어기 설계방법을 제안한다. 시간지연을 갖는 2차 시스템의 LQR 해를 이용한 LQ-PID제어기 파라미터는 설계사양을 만족하는 가중치함수의 가중치요소 Q와 R에 의해 결정되고, Q와 R의 선정은 시간영역에서의 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 설계파라미터들 선정에 의해 결정되어진다.

## Abstract

This paper presents an optimal robust LQ-PID controller design method for the second order system with time-delay to meet design specifications. By LQR formulation of the second order system with time-delay, the tuning parameters of PID controller are related by weighting factors Q and R of cost function. The selection of weighting factors Q and R are chosen to satisfy such the design specifications as overshoot and settling time.

**Keywords :** LQR, PID, Time-Delay

## I. 서론

PID제어기는 제어이론의 많은 발전이 있었음에도 불구하고 거의 50년 동안 산업현장에서 사용되어지고 있다. 그 이유는 구조가 간단하고 제어기술자들이 쉽게 적용할 수 있기 때문이다. PID 제어기 설계 혹은 동조는 Z-N[1](1942) 방법이 많이 사용되어지고 있다. 그러나 이 동조규칙은 고성능의 제어를 요구하는 시스템에서는 적합하지 않다고 알려져 왔다. 그래서 Hang<sup>[2]</sup>(1991)등

은 Z-N<sup>[1]</sup>방법의 오버슈트를 줄이는 동조 방법과 Ho<sup>[3]</sup>(1995)등은 이득과 위상여유를 설계사양에 만족하는 동조 방법 등 향상된 PID동조 방법들을 제안했다. 최근에는, 제어기술자들의 주요 관심사는 성능뿐만이 아니라 강인성이 보장된 제어기를 설계하는데 있다. 그래서 LQG-LTR<sup>[4]</sup>과 H $\infty$ <sup>[5]</sup>와 같은 강인성과 최적성을 갖는 PID 제어기 설계 방법이 연구되었다. H $\infty$ 를 PID에 적용시키기 위한 노력으로 Grimble<sup>[6]</sup>(1994)은 H $\infty$ 제어기를 PID 제어기 구조로 해석함으로써 강인성을 이룰 수 있는 PID 제어기에 대한 연구를 하였고, LQR의 강인성을 이용한 LQ접근방법으로는 Lin<sup>[7]</sup>(2001)등이 빠른 온도공정 시스템에 제어기의 일부를 LQR을 이용한 PI 제어기를 제안하였으며 Suh<sup>[8]</sup>(2002)는 2차 시스템을 시간영역에서 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 설계 파라미터로 Q값을 결정하여 효과적으로 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 LQ-PID 동조방법을 제안했다. 그러나 이 방법은 시간지연을 고려하지 않았기 때문

\* 정회원, 삼성전자(주) Device Solution Network  
(Device Solution Network, Samsung Electronics Co., Ltd)

\*\* 정회원, 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부  
(Division of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University)

※ This work was supported by the research fund of Hanyang University(HY-2002-I)

접수일자: 2003년4월25일, 수정완료일: 2003년12월18일

에 일반적으로 시간지연이 존재하는 공정제어 시스템에 적용하지 못한다. 이에 대해 조금 앞서 시간지연을 갖는 플랜트를 고려하여 He<sup>[9]</sup>(2000)등은 LQR 접근방법으로 PI/PID 제어기 설계를 제시하였다. 그러나 1차 시스템을 고려하여 사실상 PI제어기 동조이고 시스템의 어떠한 극(pole)값과 영점인 미분계수(Kd)가 일치하는 특수한 조건에서만 PID제어기 설계가 가능하다. 또한 성능을 조절할 수 있는 설계 파라미터인 감쇠비  $\zeta$ , 고유주파수  $w_n$ 와 Q값과의 관계를 유도하였지만 파라미터 결정시 도표와 근사화기법등을 사용하여야 하는 번거로움이 있다. 그래서 본 논문에서는 Suh<sup>[8]</sup>(2002)가 고려하지 못한 시간지연이 포함된 2차 시스템을 LQR구조의 PID제어기로 해석하고 He<sup>[9]</sup>등이 제안한 LQ-최적화기법을 활용하여 제어기를 설계한다. 또한 설계파라미터인  $b, r, w_n$ 와 Q값과의 관계를 유도하고 시간영역에서 주어진 설계사양 즉, 오버슈트와 정착시간을 만족시킬 수 있는 구체적이고 해석적인 파라미터 결정 방법을 제시함으로써 시간지연 시스템을 위한 새로운 LQ-PID 제어기 동조방법을 제안한다.

## II. 시간지연 2차 시스템의 LQR 해

다음의 시간지연을 갖는 2차 선형시스템을 고려하자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t-L) \quad (1)$$

여기서,  $y(t)$ 는 출력변수,  $u(t-L)$ 는  $L$ 의 시간지연을 갖는 제어변수, 그리고  $a, b, c$ 는 시스템 계수이다. 초기 조건  $y(0)$ 와  $\frac{dy(0)}{dt}$ 는 명시되어진다. 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 상태변수  $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그러면 식(1)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-L) \quad (3)$$

$$\text{여기서, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

LQR로 해석하기 위해서 식(4)와 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Qx + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서  $Q$ 는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고,  $R$ 은 양의 한정(positive definite) 대칭행렬인 제어가중행렬이다.  $t < 0$  일때,  $u(t) = 0$ 이다. LQR문제는 가격함수 식(4)을 최소화 시키는  $u(t)$ 를 찾는 것이다. 여기서 He<sup>[9]</sup>등의 시간지연 시스템의 LQR의 해를 이용하여 식(3)의 입력  $u$ 를 2단계로 분리한다.

$$(i) 0 \leq t < L, \quad u(t-L) = 0$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad 0 \leq t < L \quad (5)$$

$$(ii) t \geq L, \quad \hat{u}(t) = u(t-L)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\hat{u}(t), \quad t \geq L \quad (6)$$

이러한 변환을 통하여 식(5)와(6)은 시간지연이 없는 시스템으로 생각할 수 있고, LQR의 해를 구할 수 있다. 식(6)의 LQR의 해는 다음과 같다.

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^TKx(t), \quad t \geq L \quad (7)$$

$$= -Gx(t), \quad t \geq L \quad (8)$$

여기서  $G$ 는 제어게인 행렬이고,  $K$ 는 양의 반한정 대칭행렬이고 다음 Riccati 식의 해이다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (9)$$

식(8)에서  $\hat{u}(t)$ 는  $t \geq L$ 에서의 입력이므로  $t \geq 0$ 로 변환하면 다음 식과 같다.

$$u(t) = \hat{u}(t+L) = -Gx(t+L), \quad t \geq 0 \quad (10)$$

(10)식을 보면, (8)식부터 구해진 제어법칙  $\hat{u}(t)$ 는 시간  $t \geq L$ 에서의 입력이라도 회복된  $u(t)$ 는 실제적으로  $t \geq 0$ 에서의 시스템(3)의 제어입력이다. 그러나 (10)식의  $x(t+L)$ 는 시간  $t$ 에 직접 이용할 수 없다. 따라서 식 (5)~(8)에 의해 다음과 같이  $x(t)$ 로 변환할 수 있다.

(i)  $0 \leq t < L$  일 때

$$x(t+L) = e^{Act}x(L) = e^{Act}e^{A(L-t)}x(t) \quad (11)$$

(ii)  $t \geq L$  일 때

$$x(t+L) = e^{Act}x(L) = e^{AcL}x(t) \quad (12)$$

여기서,  $Ac = A - BR^{-1}B^TK$  이다.

식(11)와(12)을 식(10)에 대입하면 다음과 같다.

$$u(t) = -Ge^{Act}e^{A(L-t)}x(t), \quad 0 \leq t < L \quad (13)$$

$$u(t) = -Ge^{AcL}x(t), \quad t \geq L \quad (14)$$

위 식에서  $u(t)$ 가  $0 \leq t < L$  에서는 시간에 따라 변하고,  $t \geq L$  에서는 일정하다. 그러나  $t=L$  인 시점에서 식 (13)과 (14)의 값이 일치 하다는 것을 확인할 수 있다. 즉, 입력이 연속이다. 그리고 출력이  $t \geq L$  이후에 발생하므로, 즉 설계사양을  $t \geq L$ 의 제어입력  $u(t)$ 에서 결정을 하면 그림1과 같이 상태출력은  $x(t-L)$ 로

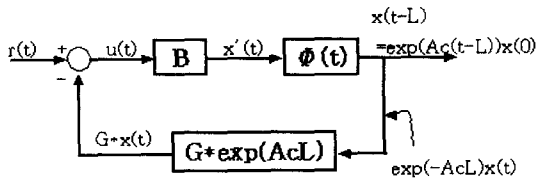


그림 1. 시간지연을 갖는 LQR제어기.  
Fig. 1. LQR Controller with Time-Delay.

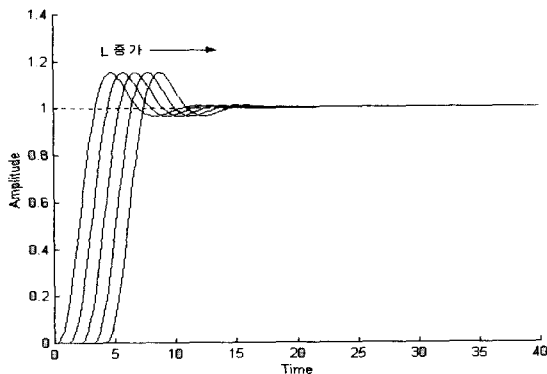


그림 2. L 증가에 따른 시스템 응답.  
Fig. 2. system response for rising L.

시간지연이 발생하고, 또 피드백 되는 상태도 시간지연이 발생하지만 (14)식에서의  $e^{AcL}$ 에 의해서  $e^{-AcL}$ 은 소거되고 실제로는 (15)식과 같이 시간지연이 없는 케환신호와 같이 된다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (15)$$

즉, 피드백 되어 만들어지는 시스템의 특성방정식이 결과적으로 시간지연이 없는 특성방정식과 같게 된다. 그 결과 그림2 에서 보듯이 시간지연의 증가에 따른 응답이 Smith이론<sup>[10]</sup> 과 같이 출력은 지연되더라도 그 시스템의 성능특성곡선은 같다.

### III. LQR구조의 PID 제어기

앞의 식(1)-(15)로부터 실제 케환신호는 식(15)와 같음을 확인 할 수 있다. 여기서 식(9) Riccati의 해인 K의 성분들을 다음과 같이 놓으면,

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(15)식의 최적제어법칙은 PID제어기 형태가 된다.

$$u(t) = -\frac{c}{R} \left( K_{22} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21}y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (17)$$

기존의 PID제어기의 형태는,

$$u(t) = -K_c \left( y(t) + \tau_D \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (18)$$

이들  $K_{ij}$ 의 성분들과 비례이득  $K_c$ 와 시정수  $\tau_I$  그리고  $\tau_D$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$K_{20} = \frac{RK_c}{c\tau_I}, \quad K_{21} = \frac{R}{c} K_c, \quad K_{22} = \frac{RK_c\tau_D}{c} \quad (19)$$

상태가중행렬 Q를 식(20)와 같이 놓고

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Riccati 방정식(9)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{00} = \frac{c^2}{R} K_{20}^2 \quad (21)$$

$$Q_{11} = \frac{c^2}{R} K_{21}^2 + 2bK_{21} - 2K_{10} \quad (22)$$

$$Q_{22} = \frac{c^2}{R} K_{22}^2 + 2aK_{22} - 2K_{21} \quad (23)$$

$$0 = \frac{c^2}{R} K_{20} K_{22} + a K_{20} - K_{10} \quad (24)$$

PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는  $K$ 를  $Q$ 에 관한 식으로 나타내면,

$$K_{20} = \frac{\sqrt{RQ_{00}}}{c} \quad (25)$$

$$K_{21}^2 + \frac{4bR}{c^2} K_{21} + \left( \frac{4b^2 R^2}{c^4} - \frac{2R}{c^2} Q_{11} \right) K_{21} - \left( \frac{4bR^2}{c^4} Q_{11} + \frac{8R^2}{c^4} Q_{00} \right) K_{21} + \left( \frac{R^2}{c^4} Q_{11}^2 - \frac{4R^2}{c^4} Q_{00} Q_{22} - \frac{4a^2 R^3}{c^6} Q_{00} \right) = 0 \quad (26)$$

$$K_{22} = \sqrt{\frac{2R}{c^2} K_{21} + \frac{RQ_{22}}{c^2} + \frac{a^2 R^2}{c^4} - \frac{aR}{c^2}} \quad (27)$$

식(25)는 식(21)을  $K_{20}$ 에 의한 표현이고 식(26)은 식(21),(23),(24)을 식(22)에 대입하여  $K_{21}$ 에 대해서 정리한 식이고 식(27)은 식(23)을  $K_{22}$ 에 대한 식이다.

$K_{20}, K_{21}, K_{22}$ 는 식 (25),(26),(27)에서  $a, b, c$ 가 시스템의 계수임을 고려할 때 PID 제어기 동조 파라미터들을 LQR의 가중치 요소  $Q$ 와  $R$ 에 관한 식으로 나타낼 수 있다. 다음은 시간영역에서 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족할 수 있는  $Q, R$ 의 구체적인 선정 위하여 Suh[8]의 방법을 시간지연 시스템으로 확장하여 다음 장에서 제안한다. 앞서 제시한 LQ-PID제어기는 출력궤환을 갖는 LQR 구조이기 때문에 설계사양을 만족시키는 성능과 강인성을 보장시킬 수 있다.

#### IV. 가중치 요소 Q와 R의 선정

시간영역에서의 설계사양인 오버슈트, 상승시간, 정착시간 등은 2차 시스템에서 감쇠비  $\zeta$ (damping ratio), 고유주파수  $w_n$ (natural frequency)의 의존적인 관계로 잘 유도되어 있다. 그러나 이들 관계는 3차 이상의 시간지연 시스템에서는 사용 할 수 없음을 잘 알려져 있다. 그래서 본 논문은 시간지연을 갖는 3차 시스템을 시간영역에서 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있도록 LQR의 가격함수의 가중치요소  $Q$ 와  $R$ 의 선정방법을 다음과 같이 제시한다.

식(28)과 같은 시간지연을 갖는 3차 목적함수(Target function)를 고려하자.

$$T(s) = \frac{w_n^3}{s^3 + \alpha w_n s^2 + \beta w_n^2 s + w_n^3} e^{-Ls} \quad (28)$$

Suh[8]가 제시한 것과 같이 식(28)의 응답이 오버슈

트(overshoot)를 갖기 위해서는 식(28)의 근이  $s$ -평면에서 하나의 실수극점과 두 개의 복소극점으로 존재해야하므로 다음 식(29)과 같이 표현할 수 있다.

$$T(s) = \frac{w_n^3}{\left(s + \frac{1}{r} w_n\right)(s^2 + p w_n s + r w_n^2)} e^{-Ls} \quad (29)$$

식(29)은 실수근과 복소근이  $w_n$ 에 의한 관계식으로 되어 있으므로 계수  $p, r$ 값이 고정되면  $w_n$ 이 변해도 감쇠비가 일정하게 되어 오버슈트가 일정하게 된다.

그림 3에서 볼 수 있듯이  $w_n$ 이 증가하는 방향으로 변화하면  $s$ -평면상의 극점들이 원점과 멀어져서 응답 속도가 빨라지므로  $w_n$ 에 의해서 상승시간과 정착시간을 조절 할 수 있다. 또한 그림4 에서 볼 수 있듯이 식(29)의  $w_n$ 을 고정시키고  $p, r$ 값을 변화시키면 오버슈트를 조절할 수 있다. 그림 4는 편리상 식(29)의  $r$ 값을 고정하고 계수  $p$ 만을 변화시켜 오버슈트의 변화를 나타내는 응답이다.

다음은, 정착시간에 의존하는 고유주파수  $w_n$  설계 파라미터로 활용하기 위해서는  $w_n$ 에 대한 정규화된 그래프를 이용해야 한다. 왜냐하면 그림 3에서 보듯이  $w_n$ 의 변화에 따라 정착시간  $t_s$ 가 변화하기 때문이다.

그래서 식(28)의 분모 분자에  $w_n^3$ 로 나누고,  $\hat{s} = s/w_n$ 으로 놓으면,

$$T(s) = \frac{1}{\hat{s}^3 + \alpha \hat{s}^2 + \beta \hat{s} + 1} e^{-Ls} \quad (30)$$

식(28)을 식(30)과 같이  $w_n$ 에 대해서 정규화된 식으로 나타낼 수 있다. 이때 정규화 시간  $w_n t$ 를 축으로 하는 응답으로부터 설계사양에 만족하는 정착시간을 고유주파수로 조절할 수 있다. 좀더 구체적으로 설명하면, 그림 5와 같은 정규화된 시스템의 계단응답을 고려하자 그림 5에서  $t_{ms}$ 는 정규화된 전달함수의 정착시간이라 하고 정착시간은 정상상태값의  $\pm \epsilon\%$  이내에 도달하여 넘지 않는데 걸리는 시간으로 정의한다. 그리고 설계사양인 정착시간은  $t_s$ 이라 한다. 그러나 시스템의 응답이  $L$ 만큼 시간지연 있기 때문에  $t \geq L$ 에서 설계사양을 결정하기 위해서는 새로운 정규화 된 정착시간  $T_{ms} = t_{ms} - L$ 라고 하고, 새로운 정착시간은  $T_s = t_s - L$ 라고 놓는다. 그리고 고유주파수를 결정하

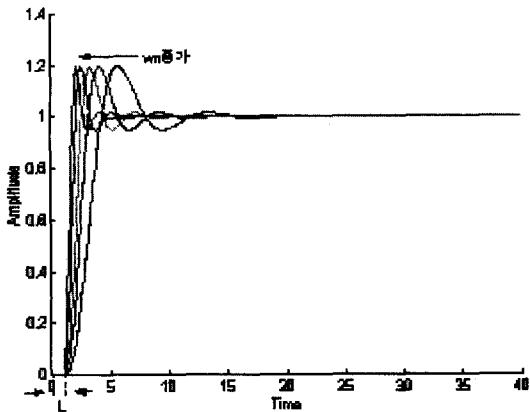


그림 3.  $w_n$ 의 변화에 따른 시간지연 3차 시스템의 계단응답.

Fig. 3. Step response of time-delay third-order system for  $w_n$ .

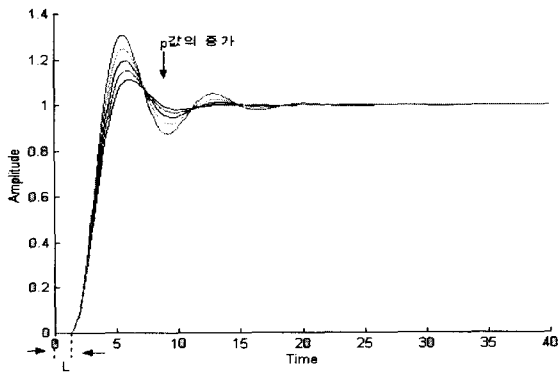


그림 4.  $p$ 값의 변화에 따른 시간지연 3차 시스템의 계단응답.

Fig. 4. Step response of time-delay third-order system for  $p$ .

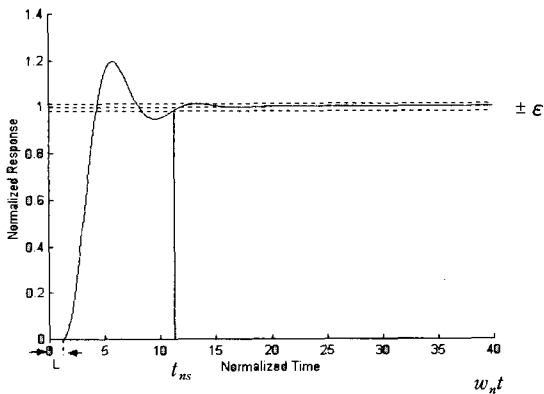


그림 5. 정규화된 시간지연 3차 시스템의 계단응답.

Fig. 5. Step response of a normalized time-delay third-order transfer function.

기 위해서는  $T_s = \frac{T_{ns}}{w_n}$ 의 관계를 이용하자. 여기서  $t_{ns}$ 는 그림5에서 정규화된 전달함수의 정상상태응답이  $\pm\epsilon\%$ 이내에 도달하는 시간을 발견함으로써 결정되고, 정착시간  $t_s$ 는 시스템의 설계사양에 의해서 주어지기 때문에  $w_n$ 의 값이 구하여진다.

지금까지 시간지연 3차 시스템에서 식(29)의  $p, r$ 계수에 의해 오버슈트를 결정하고 설계사양에 부합하는 정착시간을 고유주파수에 의해서 적절히 조절할 수 있음을 보였다. 그래서 다음으로 이들 설계파라미터들인  $p, r$ 과  $w_n$ 이 LQR의 가중치 요소  $Q$ 와  $R$ 과의 상호관계를 유도하겠다.

앞 절에서 설계사양을 출력이 발생하는  $t \geq L$ 일때에 결정한다. 그래서 시간지연을 갖는 시스템의 LQR의 실제 케환제어법칙은  $u(t) = -Gx(t)$ 임을 확인했다. 이를 특성방정식을 고려할 수 있는 페루프 상태공간식으로 나타내면,

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t) \quad (31)$$

그리고 식(31)은 식 (7),(8)과(16)에 의해서 페루프 시스템행렬  $A_c$ 는 식(32)으로 표현된다. 그리고 페루프 시스템의 특성방정식은 식(33)로 구하여진다.

$$A_c = A - BG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c^2}{R}K_{20} & -b - \frac{c^2}{R}K_{21} & -a - \frac{c^2}{R}K_{22} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Delta = s^3 + (a + \frac{c^2}{R}K_{22})s^2 + (b + \frac{c^2}{R}K_{21})s + \frac{c^2}{R}K_{20} \quad (33)$$

여기서, 시간영역의 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족하는 응답을 설계하는 문제는 설계파라미터인  $p, r$ 과  $w_n$ 에 의해 결정되어진 식(29)의 특성방정식과 식(33)의 페루프 시스템의 특성방정식이 같도록 식(33)의 PID 제어기 파라미터를 정하는 극점 배치 문제로 생각할 수 있다. 식(34)은 식(29)의 특성방정식이다.

$$\Delta = (s + \frac{1}{r}w_n)(s^2 + pw_n s + rw_n^2) \quad (34)$$

그리고 식(33)의 PID 제어기 파라미터들은 LQR의 가중치요소  $Q$ 와  $R$ 에 의한 관계식이 되어야 함으로 식(33)의  $K_{20}, K_{21}, K_{22}$ 에 식(25)~(27)을 대입하고 식(33)과 식(26)의 계수들을 비교하면 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$w_n^2 = \frac{c\sqrt{RQ_{00}}}{R} \quad (35)$$

$$(r + \frac{b}{r})w_n^2 = b + \frac{c^2}{R} K_{21} \quad (36)$$

$$(p + \frac{1}{r})w_n = a + \frac{c^2}{R} \left( \sqrt{\frac{2R}{c^2} K_{21} + \frac{RQ_{22}}{c^2} + \frac{a^2 R^2}{c^4}} - \frac{aR}{c^2} \right) \quad (37)$$

식(20)의  $Q$ 를 설계파라미터  $b, r, w_n$ 에 관한 식으로 나타내기 위해서 식(21)~(27), 식(35)~(37)을 이용하면 아래와 같은 식이 유도된다.

$$Q_{00} = \frac{Rw_n^6}{c^2} \quad (38)$$

$$Q_{11} = \frac{R}{c^2} \left[ (r + \frac{b}{r})w_n^2 - b \right] \left[ 2b + \left\{ (r + \frac{b}{r})w_n^2 - b \right\} - 2w_n^2 \sqrt{\frac{R^2}{c^4} \left[ 2 \left\{ (r + \frac{b}{r})w_n^2 - b \right\} + a^2 \right] + \frac{R}{c^2} Q_{22}} \right] \quad (39)$$

$$Q_{22} = \frac{R}{c^2} \left\{ \left( p + \frac{1}{r} \right) w_n \right\}^2 - \frac{R}{c^2} \left[ a^2 + 2 \left\{ (r + \frac{b}{r})w_n^2 - b \right\} \right] \quad (40)$$

여기서  $a, b, c$ 는 시스템의 계수이고  $p, r$ 는 식(29)의 계수로서 오버슈트를 조절하는 설계파라미터이고,  $w_n$ 은 정착시간을 조절하는 설계파라미터이다. 그리고  $R$ 은 입력의 에너지량을 나타내는 역할을 하고 있어서 순시응답에는  $Q$ 가 영향을 주기 때문에 본 연구에서는 편의상  $R=1$ 로 정한다. 그러면 식(38)~(40)에 의해서 식(20)의  $Q_{00}, Q_{11}, Q_{22}$ 가 구해진다.

그러므로 LQR의 가중치 요소  $Q, R$ 은 정착시간 설계파라미터인  $w_n$ 와 오버슈트 설계파라미터  $p, r$ 에 의해서 선정됨을 알 수 있다. 따라서 설계파라미터인  $p, r, w_n$ 에 의해서 결정된  $Q, R$ 을 Riccati 방정식에 대입하여  $K$ 을 구하고 LQR의 궤환제어법칙을 이용하면 PID 제어기 계수가 결정되고, 이는 시간영역에서 설계사양을 만족하는 LQ-PID 제어기 동조를 할 수 있게 된다.

본 논문에서 제안한 시간지연 시스템의 LQ-PID제어기 동조 방법을 다음과 같이 요약할 수 있다.

설계사양으로 정착시간(setting time)  $t_s$  와 오버슈트가 주어진다.

단계 1. 오버슈트를 결정을 위해서 Suh[11]방법을 이용,  $p, r$ 값 선정

단계 2. 정착시간을 만족하는 고유주파수  $w_n$  결정한다. 여기서  $w_n$  결정방법은 지연시간 이후의 정규화 정착시간( $T_{ns}$ )과 정착시간( $T_s$ )을 다음과 같이 놓는다.

$T_{ns} = t_{ns} - L, T_s = t_s - L$  그리고  $w_n$ 은  $T_s = \frac{T_{ns}}{w_n}$ 의 관계에 의해 결정된다.  $t_{ns}$ 는 정규화 그래프에서 정해지고  $t_s$ 는 설계사양에서 주어지면  $w_n$ 이 결정된다.

단계 3. 앞에서 결정한  $p, r, w_n$ 과  $R=1$ 을 식(38)~(40)에 대입하여 PID 파라미터를 결정한다.

## V. 예 제

다음과 같은 시간지연 2차 시스템을 고려하자

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t-1.64)$$

출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 시스템의 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-1.64)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

시간영역에서의 설계사양인 정착시간은 정상상태 응답의 약  $\pm 0.1\%$  정도로 도달하는 시간으로 고려하여 정착시간  $t_s=3$ 로 주어졌다. 그리고  $p=0.9$ 과  $r=1.4122$ 로 주어졌다.  $w_n$ 에 정규화된 그래프에서  $t_{ns}=8.5$ 이다. 여기서 출력이 발생하는  $L$ 이후에 설계사양을 결정하기 때문에 새로운 정착시간( $T_s = t_s - L$ )과 고유주파수 정규화시간( $T_s = t_s - L$ )를 고려하여  $w_n=5 \text{ rad/s}$ 로 정할 수 있다.  $w_n$ 이 결정되면 식(20)의  $Q$ 가 결정된다. 이때  $R=1$ 로 결정한다. 그리고 식(9) Riccati 방정식에 의해서  $K$ 값이 결정된다.

$$Q = \begin{bmatrix} 15625 & 0 & 0 \\ 0 & 611 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 6404.7 & 1005.1 & 125 \\ 1005.1 & 281 & 49.2 \\ 125 & 49.2 & 5 \end{bmatrix}$$

식(7),(8)에 의해 제어게인행렬은 다음과 같다.

$$G = [ 125 \quad 49.24 \quad 5.04 ]$$

그림 6와 같이 PID제어기의 응답곡선은 Z-N과 He방법보다 오버슈트, 상승시간, 정착시간이 개선되었고 설계사양에 만족하는 정상상태값에 도달하는 정착시간이 3초정도 나옴을 확인 할 수 있다.

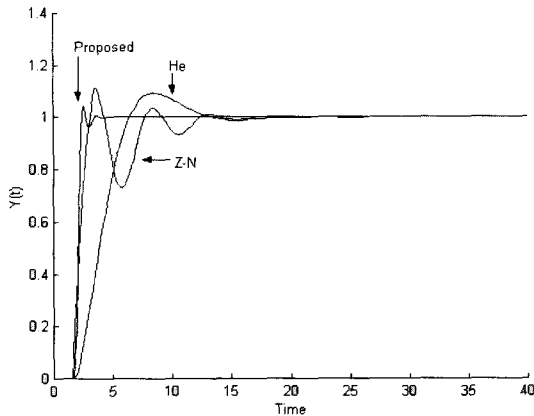


그림 6. PID 제어기의 단위계단응답.  
Fig. 6. step response of PID controller.

### VI. 결 론

시간지연은 공정제어 시스템에서 고려해야할 공통적인 현상이다. 본 논문에서는 이를 위해 시간지연 2차 시스템을 고려하였고, 최적 강인 PID제어기 동조를 위해서 LQR 설계문제로 전환한 LQ-PID 제어기 동조방법을 제안하였다. 즉, 최적성은 물론  $\infty$ 의 이득여유와  $60^\circ$  위상여유의 강인한 제어기 동조를 가능하게 하였다. 그리고 시간영역의 설계사양에 만족하는 제어기 설계를 위하여 설계파라미터인  $b, r, w_n$ 와  $Q$ 의 관계를 유도하여 LQR 가격함수의 가중치요소  $Q$ 값의 결정을 가능하게 하였다. 또한 시간영역의 설계사양인 정착시간을 만족하는 구체적이고 해석적인 설계파라미터 결정방법을 제시함으로써 효율적인 정착시간 조절이 가능하게 하였다.

### 참 고 문 헌

[1] J. G. Ziegler, & N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers". Transactions of Asme, Vol. 65, pp. 433-444, 1942.  
 [2] C. C. Hang, K. J. Astrom, & W. K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula", IEE Proceedings-D, Vol. 138, No.2, pp.111-118, 1991.  
 [3] W. K. Ho, C. C. Hang, & J. Zhou, "Performance and gain and phase margins of well-known PI tuning formulas", IEEE

Transactions on Control Systems Technology, Vol. 3, No. 2, pp. 245-248, 1995.  
 [4] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers", IEEE Trans. Automat. Contr, Vol. AC-24, No. 4, pp. 607-611, 1979.  
 [5] J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems", IEEE Trans Automat. Contr, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847. June, 1988.  
 [6] M. Grimble., "H $\infty$  controllers with a PID structure", J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr., Vol. 112, pp. 325-336, 1994.  
 [7] Ching-An Lin; Yaw-Kuen Jan, "Control Systems Design for a Rapid Thermal Processing System", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Volume: 9 No: 1 pp. 122-129, Jan. 2001.  
 [8] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regulators for a Second Order System via LQR Approach", 15th International Conference on Electrical Machines, Brugge Belgium, 25-28 August 2002.  
 [9] Jian-Bo He, Qing-Guo Wang and Tong-Heng Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", Chemical Engineering Science, Vol. 55, No. 13, pp. 2429-2439, 2000.  
 [10] J.E. Marshall, "Control of time-delay systems." London: Peter Peregrinus LTD. 1979.  
 [11] 김대광, 서병설. "블록형 최적화 기법에 의한 LQ-PID제어기의 오버슈트 설계방법", 대한전자공학회 추계학술대회, 제25권, 제2호, pp.96-99, 2002.

— 저 자 소 개 —



**박택선(정회원)**  
 2001년 세명대학교  
 전기공학과 졸업  
 2003년 한양대학교  
 전기공학과 석사  
 2004년 현재 삼성전자(주) Device  
 Solution Network 연구원



**서병설(정회원)**  
 2004년 현재 한양대학교  
 전자전기컴퓨터공학부 교수