

삼각형 요소의 형상 충전 및 격자 세분화를 이용한 붕괴하는 물 댐의 유한 요소 해석

김기돈* · 양동열† · 정준호**

(2003년 7월 21일 접수, 2004년 3월 6일 심사완료)

Finite Element Analysis of Collapse of a Water Dam Using Filling Pattern Technique and Adaptive Grid Refinement of Triangular Elements

Ki-Don Kim, Dong-Yol Yang and Jun-Ho Jeong

Key Words : Free Surface(자유표면), Transient Viscous Flow(비정상 점성 유동), Finite Element Method(유한요소법), Triangular Control Volume(삼각형 검사 체적)

Abstract

The filling pattern and an adaptive grid refinement based on the finite element method and Eulerian mesh advancement approach have been developed to analyze incompressible transient viscous flow with free surfaces. The governing equation for flow analysis is Navier-Stokes equation including inertia and gravity effects. The mixed FE formulation and predictor-corrector method are used effectively for unsteady numerical simulation. The flow front surface and the volume inflow rate are calculated using the filling pattern technique to select an adequate pattern among four filling patterns at each triangular control volume. By adaptive grid refinement, the new flow field that renders better prediction in flow surface shape is generated and the velocity field at the flow front part is calculated more exactly. In this domain the elements in the surface region are made finer than those in the remaining regions for more efficient computation. Using the proposed numerical technique, the collapse of a water dam has been analyzed to predict flow phenomenon of fluid and the predicted front positions with respect to time have been compared with the reported experimental results.

기호설명

dV_{in} : 유출입량 증분
 dt_{min} : 시간 간격
 du : 속도 증분 벡터
 dU : 속도 증분 벡터의 절점값
 f_i : i -측면의 충전율
 f_{vol} : 검사체적에서의 충전율
 N_{α}, N_{β} : 형상 함수
 P : 정수압

Q_{in} : 검사 체적에서 유체의 단위시간 당 유출입량
 s^i : 검사체적에서의 i -측면
 u : 속도 벡터
 u^{-1} : 전시간 단계의 속도벡터
 U : 속도 벡터의 절점 값
 $\vec{V}_{s^i}^a, \vec{V}_{s^i}^b$: 측면 s^i 에서 양쪽 절점속도
 σ_{ij} : 응력
 ρ : 밀도
 μ : 점도
 Δt : 시간간격
 σ_n : 수직응력
 τ : 전단응력

† 책임저자, 회원, KAIST 기계공학과
 E-mail : dyyang@webmail.kaist.ac.kr
 TEL : (042)869-3214 FAX : (042)869-5214
 * 회원, KAIST 대학원 기계공학과
 ** 회원, KIMM 지능형정밀기계연구부

1. 서 론

고체나 유체 유동의 물리적인 현상을 해석하기 위하여 비정상 유동장의 자유표면에 관한 연구는 과거에서부터 많이 이루어져 왔다. 최근 들어 금속 재료를 사용한 주조, 단조, 압연, 고분자 재료를 이용한 사출성형, 압축성형 등의 재료 가공 공정의 수치모사에 대한 관심이 높아지면서 이 분야에 대한 연구가 더욱 활발하게 진행되고 있다.

자유표면, 즉 유동선단이 존재하는 유동장을 해석하는 방법에는 초기 격자의 절점이 이동하면서 해석하는 라그랑지안(Lagrangian) 격자기법⁽¹⁾과 움직이지 않는 오일러리안(Eulerian) 격자기법⁽²⁾ 그리고 라그랑지안과 오일러리안 기법을 접목시킨 ALE 기법⁽⁴⁾으로 나눌 수 있는데, 일반적으로 널리 사용되고 있는 라그랑지안과 오일러리안 격자기법에 대하여 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 라그랑지안 격자기법에 의한 해석은 유동선단, 속도장, 압력장 등의 해석 결과가 정확한 대신 격자의 변형이 많이 일어날 때마다 격자 재구성 과정을 반복해야 하기 때문에 복잡한 형상을 가진 다이(die)에서는 충전 해석이 용이하지 못하다. 이에 반하여 오일러리안 격자기법은 초기 격자의 변형 없이 그대로 사용되거나 선택적으로 사용되기 때문에 기하학적으로 복잡한 다이 형상에서의 해석이 용이한 반면, 정확한 유동선단 예측과 자유 경계면에서의 경계조건 처리에 어려움이 따른다. 최근의 연구 경향을 보면 라그랑지안 격자기법보다 오일러리안 격자기법에 보다 더 활발한 연구 활동이 진행되고 있는데, 그 이유로는 첫째, 실제 산업 현장에서 사용되는 다이의 형상, 즉 제품 형상이 매우 복잡하여 특히 일반 유체, 용융 금속, 고분자 유동 등을 해석하는데 있어 라그랑지안 격자기법은 한계가 있다는 점과 둘째, CAE를 위한 상업화 된 코드는 비숙련자가 전혀 어려움 없이 원하는 결과를 손쉽게 얻어내는 것을 목표로 하고 있기에 수치해석 도중 사용자의 작업이 거의 필요 없는 오일러리안 격자기법이 상업화 된 코드에 보다 적합하기 때문이다. 오일러리안 격자기법의 대표적인 방법은 Harlow 와 Welch 에 의한 MAC[2]법과 Hirt 와 Nichols 에 의한 VOF⁽³⁾법이 있다. 이 기법은 FDM 기법을 근간으로 발전되어 지금까지도 자유 유동장 처리기법의 기본 개념을 제공하고 있다. MAC 은 단위체(cell)들을 가로질러 이동하는 인자(maker)들을 따라가며 유동장을 해석하는 방법으로 유체의 유동 특성을 잘 표현하고 있으나 유동의 진전에 있어 비압축성 조건을 만족

시키기 어렵다는 단점이 있다. VOF 법은 비압축성 연속방정식을 근간으로 한 VOF (Volume of Fluid)를 각 단위체 마다 계산하고 계산된 VOF 를 가지고 유동장을 정의하는 방법이다. 이 기법은 FEM 분야에서도 응용 발전되어 고분자 사출성형 공정에서는 Broyer⁽⁴⁾ 등에 의하여 고분자의 충전해석기법이 개발되었고, 금속 주조공정에 있어서는 Dhatt⁽⁵⁾ 등에 의하여 용융금속의 충전해석을 위한 연구 결과가 발표된 사례가 있다.

앞에서도 언급한 바와 같이 오일러리안 격자기법은 많은 장점을 가지고 있는 반면, 유동선단과 검사체적(control volume)에서의 유출입량 계산과 정확한 유동선단 형상의 예측, 부분충전 검사체적에서의 자유단 경계조건 처리에 많은 어려움이 따른다. 또한, 유동장을 계산하기 위한 격자와 검사체적과는 서로 직접적으로 연계되어 있기 때문에, 유동장에서 수치해석 결과의 정확도를 높이기 위한 보다 미세한 격자사용은 격자 총 수의 증가와 더불어 검사체적의 증가를 가져와 해석에 소요되는 시간이 기하급수적으로 커지는 결과를 낳게 된다. 이러한 문제점을 해결하고자 일반적인 사각형 검사체적에 적용되는 형상충전기법(filling pattern technique)과 표면에서의 격자세분화 기법을 Jeong 과 Yang^(6,7)이 제안하여 보다 정확한 유동선단 및 유체 유동의 물리적 현상을 예측하였다. Kim 등^(8,9)은 요소 내부에 작은 단위체를 채워나가면서 구해진 선단의 수직 방향 벡터를 이용하여 자유표면을 구현하여 다양한 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 형상 충전 기법과 격자세분화 기법을 삼각형의 검사체적에 적용하는 방법을 제안하여 유동 선단부를 포함한 유동장 전체에 있어서 삼각형 격자에서의 수치해석 결과의 신뢰도를 높이고자 한다.

2. 본 론

2.1 지배 방정식

비정상 비압축성 점성 유동장 해석을 위한 지배 방정식은 가속도와 중력장을 모두 고려한 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 사용하였다.

연속(continuity)방정식:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

Navier-Stokes 방정식:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(u) + \rho f_i \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\text{여기서, } \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij},$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i=1,2, \quad j=1,2$$

그리고 $t, u_i, p, \rho, \mu, f_i$ 는 각각 시간(time), x_i 방향속도(velocity) 성분, 압력(pressure), 밀도(density), 점도(viscosity), 내력(internal force)이며 σ_{ij} 는 응력(stress), d_{ij} 는 변형율 텐서(strain tensor)이다.

자유표면 $\partial\Omega$ 에서는 다음과 같은 응력에 대한 평형방정식이 적용된다.

$$\sigma_n = -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_s, \quad (3)$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) = 0$$

여기서 σ_n, τ, μ 는 각각 수직응력(normal stress), 전단응력(shear stress), 유체의 점도이다. 첨자 n, t 는 유동선단에서의 수직과 수평 단위 방향 벡터를 의미한다. 유동선단에서 표면장력(surface tension), 점성응력(viscous stress), 공기압은 그 영향이 작아 고려하지 않는다. 벽면 경계면에서의 경계 조건은 다음과 같이 처리한다.

$$u_{nw} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_{wall} \quad (5)$$

$$\tau_w = 0$$

해석 초기($t=0$)에는 설정된 속도 값 u_i^* 이 전체 영역에 대하여 정의되며, 본 연구에서는 $u_i^* = 0$ 이 사용된다.

$$u_i = u_i^* \quad \text{on } \Omega \quad \text{at } t=0 \quad (6)$$

2.2 유한요소수식화

유동장에 대한 지배방정식 (1)과 (2)를 복합유한요소 수식화(mixed FE formulation)를 사용하여 약형(weak form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\rho \dot{u}_i \bar{u}_i + \rho u_j u_{j,i} \bar{u}_i + \bar{u}_j (-p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij})) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_i \bar{u}_i d\Omega \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} \bar{p} \left(\frac{\rho}{\kappa} + u_{i,i} \right) d\Omega = 0$$

여기서 u_i, \bar{u}_i, κ 는 각각 속도함수, 가중함수, 체적 탄성 계수(bulk modulus)이며 체적 탄성 계수는 10^{13} 이상의 매우 큰 값으로 설정한다. 식 (7)의 복합 유한 요소 수식화를 위해서 삼각형의 P1+/P1 요소를 사용하였다.⁽¹⁰⁾ 이 요소는 무게 중심에 4 번째의 절점이 존재하며 Galerkin 방법에 의한 Navier-Stokes 방정식의 안정한 해를 얻기 위한

Brezzi-Babuska 조건을 만족한다. 이와 같은 MINI 요소는 이차원에서 최소의 절점 수를 가지며 삼각형 요소로써 복잡한 형상을 나타내기 적합하며 선형 요소로 격자 세분화 방법의 적용에 유용하다. 무게 중심에 있는 4 번째 절점은 속도 분포에 대하여 부분적인 선형 근사를 나타내며 3 개의 부속 삼각형으로 분할한다. 속도에 대한 형상함수는 세 개의 선형 요소와 한 개의 버블(bubble)함수로 정의되며 압력은 세 개의 선형 형상함수를 사용한다. 본 연구에서 버블 함수는 수치 적분을 위해서 아래와 같이 요소의 꼭지점에서 0 값을 가지며 부속의 삼각형에서는 부분 선형적이다.

$$u_k = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\alpha=1}^3 U_{k\beta} N_{\beta} + U_{kb} N_b, \quad \bar{u}_i = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=1}^3 \bar{U}_{i\alpha} N_{\alpha} + \bar{U}_{ib} N_b \quad (8)$$

$$N_b = C_1 \cdot N_1 N_2 N_3$$

$$p = \sum_{\gamma=1}^3 p_{\gamma} N_{\gamma}, \quad \bar{p} = \sum_{\delta=1}^3 \bar{p}_{\delta} N_{\delta}$$

여기서 $U_{k\beta}$ 과 $\bar{U}_{i\alpha}$ 는 속도함수와 가중함수(weighting function)에 대한 절점 값, $N_{\beta}, N_{\alpha}, N_b$ 는 속도성분, 가중함수에 대한 형상함수(shape function)과 버블 함수이며, p_{γ} 과 \bar{p}_{δ} 는 압력함수와 가중함수에 대한 절점(node) 값, N_{γ} 와 N_{δ} 는 압력성분과 가중함수에 대한 형상함수이다.

각 요소에 해당하는 행렬을 구성할 때 삼각형 요소의 경우 4 번째 절점에 대한 속도 근사가 이루어지지만 'static condensation' 과정이 각 요소 수준에서 수행되어 3 절점의 삼각형 해석으로 되돌아간다.⁽¹¹⁾ 식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻게 된다.

$$M\dot{U} + CU + N(u) = F \quad (9)$$

여기서,

$$M = \int \rho N_{\alpha} N_{\beta} \delta_{ij} d\Omega,$$

$$C = \int (-N_{\alpha,i} N_{\gamma} + \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,i} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k}) d\Omega,$$

$$N(u) = \int \rho \delta_{ij} N_{\alpha} N_{\beta,k} u_k d\Omega$$

$$F = \int N_{\alpha} f_i d\Omega$$

$$\bar{p}_{\delta} \left(- \int \frac{1}{\kappa} N_{\delta} N_{\gamma} d\Omega \right) p_{\gamma} + \bar{p}_{\delta} \left(- \int N_{\beta,j} N_{\delta} d\Omega \right) u_{j\beta} = 0$$

비선형 방정식인 식 (9)를 계산하기 위해 본 연구에서는 다음과 같은 Predictor-Corrector 방법을 채택했다.⁽¹²⁾

Predictor

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + (1-\gamma)\Delta t a_n,$$

$$u_{n+1}^0 = \tilde{u}_{n+1}$$

(10)

Corrector

from $l=0$ to $l=L$ { (11)

$$(M_{i\alpha j\beta} + \gamma \Delta t C_{i\alpha j\beta}) U_{j\beta(n+1)}^{(l+1)} = M_{i\alpha j\beta} \tilde{U}_{j\beta(n+1)} + \gamma \Delta t (F_{i\alpha} - N(u_{i(n+1)}^{(l)}))_{i\alpha} \}$$

$$a_{n+1} = \frac{(u_{n+1}^{(L+1)} - \tilde{u}_{n+1})}{\gamma \Delta t}, \quad u_{n+1} = u_{n+1}^{(L+1)}$$

여기서, u_n , a_n , Δt , γ 는 각각 속도, 가속도, 속도 증분, 해석의 안정성을 높이기 위한 설정 값이며 L 은 반복수정작업(corrector iteration)의 수이다. 본 연구에서는 γ 와 L 값을 각각 1 로 사용했다.

2.3 형상충전기법

오일러리안 격자기법 중 각 검사체적에서 0 과 1 사이의 수치 값인 충전율을 계산하면서 유동 선단을 진전시키는 방법은 유동장 형성기법 관점에서 두 가지로 크게 나눌 수 있다. 첫째, 계산되는 유동장이 초기 유동장과 항상 동일한 기법⁽¹³⁾과 둘째, 시간에 따라 계속적으로 새로운 유동장을 생성하는 기법⁽²⁾이 있다. 전자는 정의된 유동 선단으로부터 전체 유동장을 두 영역으로 나누고 구분된 영역의 물질 상수 값만 변화시키면 되므로 유동장을 재구성할 필요가 없어 편리하다. 그러나, 초기의 유동장을 반복적으로 계산하기 때문에 계산에 소요되는 시간이 길고, 수치적으로 체적 손실이 생길 수 있는 단점이 있다.

후자는 매시간 간격마다 유동장을 재구성하여 필요한 부분만을 선택적으로 계산하기 때문에 해석 기법이 상대적으로 복잡하나, 계산 시간이 짧고, 기법의 특성상 체적 손실이 없으며, 보다 안정적인 유동진전 형상을 예측할 수 있다. 그러나 두 기법 모두 유동선단 부분에 존재하는 검사체적의 유출입량을 물리적으로 정확하게 계산 하는 것은 용이하지 못하다. 그 이유는 오일러리안 격자기법의 특성상 실제 유동장과 계산상에 사용되는 유동장과는 차이가 있어 부분적으로 충전된 검사체적에서의 속도장을 정확하게 구할 수 없기 때문이다. 이러한 부분 충전된 검사체적의 유출입량을 계산하기 위한 연구결과를 보면 부분충전 영역을 속도장 계산을 위한 영역에 포함시켜 유출입량을 구한 후 충전율로서 가중치를 주거나 부분 충전 영향을 지배 방정식에 첨가시켜 반복 계산을 통하여 해를 구하는 방법이 사용되었다.

또한, 정사각형 검사체적에 대하여 인접하고 있는 두 검사 체적간의 충전율을 이용하여 직선형태의 유동선단과 유출입량을 계산하는 방법이 개발되었다.

그리고 일반적인 사각형 검사체적에 대하여 충전 형상을 고려한 유출입량 계산기법에 대한 연구가 발표되었다. 그러나, 아직 삼각형 검사체적의 충전 형상을 고려한 위와 같은 연구가 발표되지 않았다.

본 논문에서는 부분 충전 검사체적 사이의 보다 정확한 유출입량 계산을 위한 삼각형 검사체적의 형상 충전 기법을 제안하고 실제의 물리적인 유동현상에 보다 근접한 계산 결과를 얻고자 한다. 여기서, 형상 충전 기법은 삼각형 검사체적의 충전 형상을 6 가지 형상으로 정의하고 각 검사체적 단위로 정의된 형상 중 최적의 한 형상을 선정하여 이에 따라 유동선단과 각 검사 체적간의 유출입량을 계산하는 기법이다. 실제적으로, 각 부분 충전 검사 체적 사이의 정확한 유출입량을 계산하기 위해서는 인접하는 부분충전 검사체적 사이의 유체가 점유하는 영역과 그 영역에서의 속도장을 알아야 한다.

본 기법에서는 일반적인 삼각형 검사체적의 충전율로부터 인접면에 있어 유체가 점유하는 영역을 계산함과 동시에 그 영역에서의 속도장을 구하여 보다 정확한 유출입량을 계산하고자 한다. 그러나, 이 두 가지 모두 스칼라 양인 충전율 만으로는 수학적으로 정확한 계산이 불가능하다. 그렇기 때문에 본 연구에서 제안한 형상충전기법은 다음과 같은 가정을 하였다. 먼저, 인접면 내에서 유체가 점유하는 영역을 예측하기 위하여 각 검사체적내의 유동선단 형태는 직선이고, 삼각형 검사체적의 유체 충전시 유동선단과 동시에 만나는 검사체적 측면들의 충전상수(α)는 일정하다고 가정하였다. 여기서, 충전상수는 충전형상에 따라 2 차원 격자의 각 면의 전체 길이에 대한 유체의 점유 길이 또는 비점유 길이의 비로 정의한다. 위의 가정은 각 검사체적에서 발생될 실제의 자유 곡선의 유동 형태와는 차이가 있으나, 각 검사체적의 크기가 전체 유동장에 비하여 상대적으로 매우 작다고 전체한다면 이로 인하여 발생하는 오차는 무시할 수 있다고 판단된다. 이러한 가정은 일반적인 삼각형 검사체적에 있어 체적율로부터 충전 형상과 인접면의 유체가 점유하는 영역의 예측을 가능하게 한다.

또한, 부분충전 검사 체적에서 유체가 존재하지 않는 영역을 유체가 존재하는 영역으로 가정하고 계산을 했을 때, 전체 유동장 중 유체가 존재하는 영역에서의 속도장은 실제 유체가 존재하는 영역만으로 구성된 유동장으로 계산한 속도장과 거의 일치한다. 위와 같은 가정을 사용하여 부분충전 검사체적에서 유체가 존재하는 영역의 속도장을 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 부분 충전 검사

체적을 완전 충전 검사체적으로 가정하여 속도장을 구하고, 형상충진기법을 사용하여 부분충진 검사체적 내부를 유체가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구분함과 동시에 검사체적의 각 측면에서 측면 충전율(side filling ratio)을 계산한다. 측면 충전율은 2 차원 유동장에 있어서 Fig. 1 과 같이 삼각형 검사체적의 각 측면과 유체가 접하는 길이를 각 측면의 전체길이로 나누어 구한 값으로 정의 한다. 이 값으로 유체가 각 측면과 접하는 영역을 정의할 수 있을 뿐만 아니라, 보간법에 의하여 유체의 존재 영역(A_f)과 비존재 영역(A_e)의 경계선인 유동 선단과 측면이 만나는 점의 속도를 구할 수 있다. (Fig. 2)

$$\vec{V}_i^m = f_i \vec{V}_s^a + (1-f_i) \vec{V}_s^b, \text{ at } 0 < f_i < 1 \text{ \& } a \subset A_f \quad (13)$$

$$\vec{V}_i^m = (1-f_i) \vec{V}_s^a + f_i \vec{V}_s^b, \text{ at } 0 < f_i < 1 \text{ \& } b \subset A_f$$

여기서, s^i 는 i 측면, f_i 는 측면 충전율, \vec{V}_s^a, \vec{V}_s^b 는 측면 s^i 에서의 양쪽 절점 속도이다.

이와 같이 구한 속도장은 유체가 존재하는 영역에서의 비압축성 조건을 만족하는 것으로 부분충진 검사체적의 유출입량 계산을 가능하게 한다.

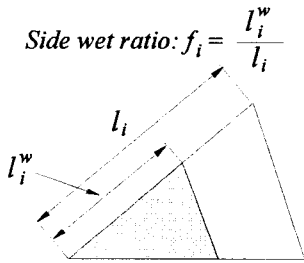


Fig. 1 The definition of side wet ratio

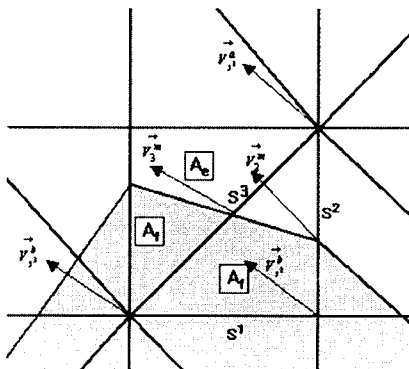


Fig. 2 Schematic diagram of volume inflow rate of fluid at fluid filled region

앞에서도 언급한 바와 같이 위의 식에서 유도된 속도장은 측면 충전율의 계산과 유동선단의 예측이 이루어져야만 하기 때문에 이에 대하여 설명하면 다음과 같다. 먼저, 계산하고자 하는 검사체적의 충전율과 주위 검사 체적들의 충전율을 사용하여 본 연구에서 제시한 6 가지의 충전 형상 중 해당되는 충전 형상을 선택한다.(Fig. 3(b)) 부분충진 형상 중 case 5 는 요소의 충전율이 0 과 1 사이고 주변의 요소들이 모두 충전율이 0 인 경우이며 case 6 은 요소의 충전율이 0 과 1 사이고 주변의 요소들의 충전율이 모두 1 인 경우이다. 충전 형상 선택 후 각각의 충전 형상에 따른 측면 충전율을 구하고 계산된 측면 충전율로부터 각각의 측면과 유동선단의 교점을 계산하여 유동선단을 구하게 된다. 이와 같이 속도장과 유동선단을 구하는데 사용되는 측면 충전율을 계산하기 위해서는 먼저 충전 상수를 구해야 하는데 앞에서 언급한 가정을 전제로 하고 Fig. 3(a)를 참조하여 기하학적으로 수식을 유도하면 각 충전 형상에 대하여 다음과 같이 충전상수를 구할 수 있다.

$$\text{case 3) } \alpha_{III} = \sqrt{\frac{2(1-f_{vol}) \cdot V}{a_1 \times a_2}}$$

$$\text{case 4) } \alpha_{IV} = \sqrt{\frac{2f_{vol} \cdot V}{a_1 \times a_2}} \quad (14)$$

$$\text{case 5) } \alpha_V = \sqrt{\frac{2f_{vol} \cdot V}{a_3^2 \times a_1^2 + a_1^2 \times a_2^2 + a_2^2 \times a_3^2}}$$

$$\text{case 6) } \alpha_{VI} = \sqrt{\frac{2(1-f_{vol}) \cdot V}{(a_3^2 \times a_1^2 + a_1^2 \times a_2^2 + a_2^2 \times a_3^2)}}$$

여기서, f_{vol} 은 검사체적의 충전율, V 는 검사체적의 체적이다.

이와 같이 계산된 충전상수 $\alpha_{III}, \alpha_{IV}, \alpha_V, \alpha_{VI}$ 를 사용하고 Fig. 3(a)를 참조하여 각 충전 형상에서의 측면 충전율을 구하면 다음과 같이 구하게 된다.

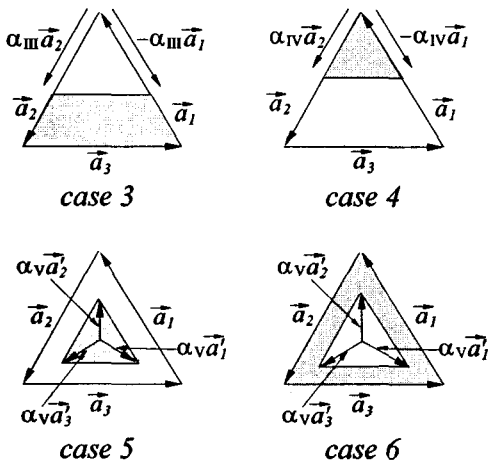
$$\text{case 3) } f_1 = 1 - \alpha_{III}, f_2 = 1 - \alpha_{III}, f_3 = 1$$

$$\text{case 4) } f_1 = \alpha_{IV}, f_2 = \alpha_{IV}, f_3 = 0$$

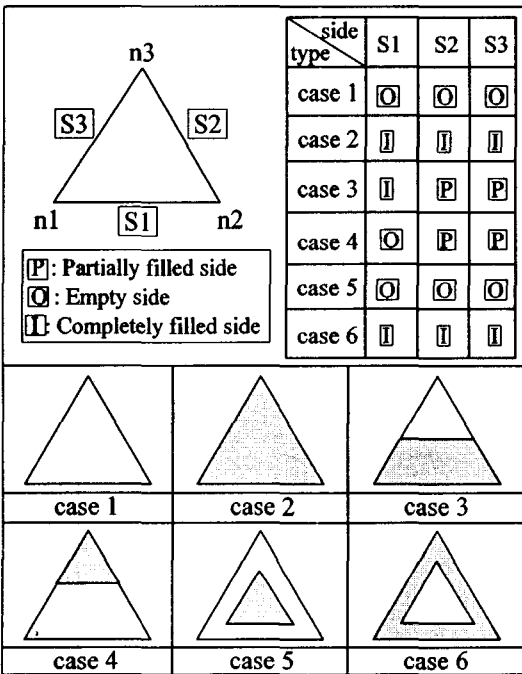
$$\text{case 5) } f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$$

$$\text{case 6) } f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 1$$

종합적으로, 측면 충전율은 $f_{vol} = 0$ 인 검사체적에서 0, 0, 0, $f_{vol} = 1$ 인 검사체적에서 1, 1, 1 이 되며, 나머지의 경우는 앞에서 유도된 바와 같이 4 가지 형상에 따라 계산된다.



(a)



Empty element: case 1
 Partially filled elements: case 3,4,5, and 6
 Completely filled element: case 2

(b)

Fig. 3 Detail description of pattern types(a) and rule table of pattern types for filling pattern (b)

2.4 유동선단의 평활화(smoothing)

충전율은 각각의 검사체적에서 독립적으로 계산되기 때문에 두 검사체적에 의하여 공유되는 측면에서의 측면 충전율은 불연속성을 나타내게 된다.

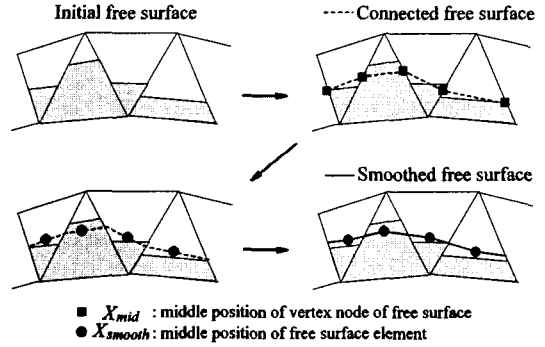


Fig. 4 Smoothing procedures of predicted free surface

다. 이러한 불연속성은 물리적인 현상과 맞지 않기 때문에 불연속 부분에 대한 평활화 과정을 수행하였다. 그리고, 이 과정은 형상 충전기법에 의하여 예측된 각 검사 체적의 충전 형상이 인접하는 검사체적의 충전형상에 의하여 보다 안정적인 형태로 재조정되도록 하는 역할을 수행한다. 평활화 과정은 다음과 같다.

Step 1: Fig. 4 와 같이 선단 요소에서 공유하는 측면 충전율의 평균을 구한다.

$$f_s^b = \frac{\sum f_i^b}{n}$$

여기서 i 는 공유하는 면 s 의 요소이고 f_i^b 는 그 면의 충전율이며 f_i^b 가 0 인 경우는 평활화의 의미가 없으므로 계산에서 제외하며 f_i^b 가 1 이면 f_s^b 를 1 로 취함으로써 이미 완전 충전된 요소가 부분 충전된 요소로 전환되는 것을 막는다.

Step 2: 다음과 같이 자유표면을 평활화한다.

$$X_{smooth}^a = \frac{\sum_p X_{mid}^p}{n}$$

여기서, X_{mid}^p 는 이웃하는 요소의 측면 충전율 평균으로부터 얻어지는 선단 위치에 대한 평균값이다.

즉, 삼각형 요소의 모서리에 위치했던 선단 좌표의 평균을 취한 값이다. X_{smooth}^a 는 자유표면 절점이 평활화된 좌표이며, Fig. 4 는 X_{mid}^p 과 X_{smooth}^a 를 나타내고 있다. Step 2 의 과정을 반복적으로 수행함으로써 유연화된 자유표면을 얻는다.

2.5 검사체적에서의 유출입량 계산

본 연구에서 유한요소해석을 위한 격자는 3 점점의 삼각형 요소를 사용하였으며 검사체적은 충전율과 비압축성 유동 조건에 따라 다음과 같이 3 가지로 구분된다.

- 1) 내부검사체적($f_{vol} = 1$ & $Q_{in} = 0$)
- 2) 선단검사체적($0 \leq f_{vol} \leq 1$ & $Q_{in} \neq 0$)
- 3) 외부검사체적($f_{vol} = 0$ & $Q_{in} = 0$)

여기서 유한 요소 계산을 위한 유동장은 $0 \leq f_{vol} \leq 1$ 인 검사체적과 일치되는 격자들로 구성된다. 내부 검사체적은 유동장의 내부를 구성하고 있고 유체 유출입의 총합이 0 이며, 선단 검사체적은 유동장의 외각을 둘러싸고 있기 때문에 유체의 유출입이 존재하고 시간에 따라 충전율이 변하며 유동선단이 존재하는 영역이다. 또한, 외부 검사체적은 유동장 외부에 존재하며 충전율은 0 으로 변하지 않는다. 앞에서 언급한 검사체적들 중 유출입량의 계산이 필요한 것은 선단 검사체적이며, 이곳에서 형상 충전 기법에 의한 유출입량은 다음과 같이 계산한다.(Fig. 2) 검사체적 A 의 측면을 s^i , s^i 를 포함하는 격자를 m_s^k , 격자의 총수를 l_{m_s} , s^i 의 양쪽 절점 a, b 의 속도를 \vec{v}_s^a, \vec{v}_s^b , s^i 의 절대길이 r_s , s^i 에서 검사체적 중심방향으로의 수직 벡터를 \vec{n}_i 라 하면 식 (13) 을 사용하고 검사체적의 외각 제적을 따라 적분하는 방법으로 총 유출입량을 다음과 같이 구할 수 있다. 특별히, 검사체적 A 의 측면 충전율을 f_i , 각 측면을 공유하는 검사체적은 A_i^a, A_i^b 로부터 계산된 공유 측면의 측면 충전율을 f_i^a 라 할 때, 측면 충전율인 f_i 가 0 이고 f_i^a 가 0 이 아닌 경우에는 f_i 를 f_i^a 로 치환하고 $Q_{s,\mu}$ 를 계산하되 그 값이 0 보다 작은 경우에 $Q_{s,\mu}$ 를 0 으로 정의 한다. 또한 f_i 가 0 이 아니고 f_i^a 가 0 인 경우에는 r 가 양인 경우에 0 으로 정의한다.

$$Q_{in}^A = \sum_{i=1}^3 Q_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{l_{m_s}} Q_{s,\mu} W_s^k \quad (15)$$

이와 같이 각 선단 검사체적에서 총 유속량을 계산한 후 각 선단 검사체적을 채우거나 비우는 데 소요되는 최단 시간 간격을 계산한다. 이와 같이 계산된 시간 간격과 수치해석상의 안정성을 보장하기 위한 임계 시간 간격을 비교하여 작은 값을 현재 시간 간격 dt_{min} 으로 사용하여 현재의 유출입량을 다음과 같이 계산한다.

$$dV_{in}^A = Q_{in}^A dt_{min} \quad (16)$$

최종적으로 계산된 유출입량을 사용하여 충전율을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$f_{vol}^t = f_{vol}^{t-1} + \frac{dV_{in}^A}{V_{total}^A} \quad (17)$$

여기서, V_{total}^A 는 검사체적 A 의 총부피이다.

2.6 적응 격자 세분화

부분 충전 검사 체적의 속도장을 정확하게 구하기는 오일러리안 격자기법의 특성상 매우 힘들기 때문에 본 연구에서는 형상 충전 기법을 제안하여 검사체적의 유출입량을 보다 실제적 유동 특성에 맞도록 계산하고자 하였다. 그러나, 형상충전 기법에서도 부분 충전 검사체적을 완전 충전된 검사체적으로 가정한 유동장을 가지고 속도장과 압력장을 계산했기 때문에 이러한 가정에서부터 비롯되는 수치적 오차는 필연적으로 존재하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적응 격자 세분화 기법은 유동 선단 부분의 격자를 세분화하여 새로운 계산 영역을 설정함으로써 보다 실제의 유동과 비슷한 조건에서 해석이 수행될 수 있다. 이와 같은 적응 격자 세분화는 선단 부분에서만 격자의 세분화가 이뤄지므로 계산 영역의 요소수가 전체를 세분화한 방법에 비해 적으므로 계산시간의 감소와 저장용량을 절약할 수 있다. 또한, 선단의 세분화 정도를 조절하여 아주 유연한 자유 표면의 결과를 얻을 수 있다.

2.6.1 형상 충전 VOF 법에 적용된 적응 격자 기법

적응 격자기법의 적용을 위해 세분화가 될 표면 요소와 이미 세분화와 결합과정을 거친 내부·외부 요소로 전체 영역이 나누어진다. 이와 같은 적응 격자 기법을 요약하면 다음과 같다.

step 1: 전체 영역의 요소들을 내부, 외부 및 표면 요소로 분리

step 2: 현재의 새로운 표면 요소들을 이미 정한 세분화 수준으로 세분화 과정을 수행

step 3: 새로운 내부 및 외부의 요소들 중 세분화가 이뤄진 요소에 대한 결합과정을 수행

step 4: 격자 세분화의 확장

세분화의 과정은 삼각형 요소의 경우 4 개의 삼각형 요소로 분리되며 4 개의 요소로 분리됐던 내부 및 외부의 요소들은 하나의 요소로 결합된다. 이와 같은 세분화와 결합의 과정에서 한 요소의

세분화 수준은 주변 요소의 세분화 수준과 일치하거나 한 단계의 차이를 넘어서는 안 된다. 이와 같은 규약은 유한 요소 해석의 편의성을 위한 것으로 한 번의 불연속 절점의 개수가 2 개 이상인 경우 해석상의 어려움이 발생한다.

다음의 조건들을 만족시키는 경우에 격자 세분화와 세분화된 격자의 결합 과정이 이루어진다.

i) 세분화를 위한 조건:

- a) 세분화된 표면 요소의 세분화 수준이 미리 정한 세분화 수준을 넘지 않아야 한다.
- b) 내부 및 외부 요소인 경우 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$N - N^a < -1$$

여기서, N 과 N^a 은 요소의 세분화 수준과 주변 요소의 세분화 수준을 의미한다.

ii) 세분화된 격자의 결합 조건:

이미 4 개로 분리 되었던 요소이고 아래의 조건을 만족시켜야 한다.

$$N - N^a > -1$$

위와 같은 조건을 만족하는 요소들에 대하여 세분화와 결합 과정을 수행한 후 표면 요소만 급격히 세분화 되는 것을 방지하기 위해 격자세분화를 확장하는 과정을 거치게 된다. 이와 같은 확장은 표면 요소에서 내부의 격자로 진행된다.

2.6.2 불연속 절점의 처리

2 차원 삼각형 요소를 4 개의 요소로 세분화 하는 경우 주변 요소의 절점과 일치하지 않는 절점이 발생한다. 주변 요소의 세분화 수준에 따라서, 즉 세분화 수준이 한 단계 높거나 낮은 경우에 따라 각 요소의 면에 불연속 절점이 발생할 수 있다.

Fig. 5 에서 요소는 1 에서 3 개까지의 불연속 절점을 갖게 된다. 이와 같은 경우에 유한요소 해석을 위해서 절점에 특별한 제한 요건들이 필요하지만, 삼각형 요소의 특성을 살려 불연속 절점과 꼭지점을 연결하는 Fig. 5 와 같은 요소를 생성할 수 있다. 이와 같은 요소는 항상 내부의 요소에 생성되기 때문에 자유 표면의 형상을 위해 표면 격자를 세분화한 것에 영향을 미치지 않으며, 단지 세분화된 격자에 대한 해석만을 더 수행함으로써 격자 세분화로 발생하는 불연속 절점의 문제를 쉽게 처리할 수 있다. 이 요소는 유한 요소 해석을 수행하는 과정 이전에 잠시 생성 되었다가 다시 해석이 수행된 후 바로 제거되어 각 요소의 VOF 등을 계산하는 부분에 영향을 미치지 않게 된다.

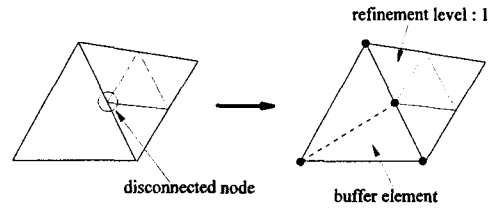


Fig. 5 Generation of buffer element

3. 해석결과

3.1 붕괴하는 물 댐의 해석

본 절에서는 자유 표면 비정상 유동 해석의 대표적 문제인 댐의 붕괴 문제에 대하여 제한한 방법을 검증한다. 붕괴하는 댐의 문제는 벽면에서 미끄럼 조건을 사용하므로 오일러 방정식으로 해석이 가능하지만 본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다. 3 가지 격자 형태에 대하여 해석이 진행되는데, case I, II는 고정 격자이며 case III은 적응 격자 세분화가 적용된다. 각 경우에 대하여 유동의 선단을 Martin⁽¹⁴⁾의 실험 결과와 비교하고 전체 자유 표면에 대한 이론 및 실험적 해가 없어 가장 격자의 밀도가 높은 case I의 경우를 전체 자유표면의 근접한 해라고 가정하여 case II, III을 비교한다. 각 경우의 초기 격자의 수를 살펴보면, case II는 case I의 격자 수의 1/4 이며 case III은 case I의 격자 수의 1/64 이다. 해석하고자 하는 댐 형상은 Fig. 6 과 같이 댐 기둥의 폭에 대한 높이의 비(b/a)가 2 이다. 계산에 사용된 물질 상수는 물의 밀도 1000kg/m^3 , 점성 $0.001\text{kg/m}\cdot\text{s}$ 그리고 중력가속도 9.8m/s^2 등이다. 해석 결과 표현에는 무차원시간 $T = t\sqrt{2g/a}$ 를 사용하여 나타낸다.

Fig. 7 은 각 경우에 대한 초기 격자를 나타낸다. Fig. 8 은 case I 에 대하여 $T=1, 2, 2.9$ 에 대한 예측된 자유 표면과 속도 분포를 나타낸다. Case I 의 경우 초기의 격자가 매우 세분화 되어 있어 안정적인 속도 분포와 부드럽고 실제에 가까운 자유 표면의 결과를 얻는다. Fig. 9 는 case II에 대하여 해석된 자유 표면과 속도 분포를 나타낸다. 적응 격자 세분화 과정이 적용된 case III에서는 세분화 수준이 3 으로 설정되어 해석된다. Fig. 10 은 case III 각 단계에서 전체 격자의 구성을 나타내고 있다. Fig. 10 에서 보듯 자유 표면이 존재하는 부분에 격자가 세분화 되어있고 내부와 외부의 요소들은 세분화가 안 된 상태임을 알 수 있다. Fig. 11

은 case III의 각 시간에 대한 격자의 구성과 자유 표면 속도장의 분포를 나타낸다. 위의 결과와 같이, 자유 표면에서 효과적으로 격자 세분화 과정이 수행되면서 부드러운 자유표면과 안정적인 속도 분포를 얻는다.

Fig. 12 는 바닥과 맞닿아 흐르는 유동 선단의 위치를 Martin⁽¹⁴⁾의 실험과 비교한 결과를 나타낸다. Case I, III은 실험 결과와 매우 근접한 결과를 나타내지만, case II의 경우는 자유 표면을 구성하는 격자 크기의 한계로 실험 결과와 부분적인 오차를 나타내고 있다. Fig. 13 은 붕괴되는 댐의 전체 자유 표면의 형상을 각 시간에 대하여 case II, III을 case I 과 비교한 결과이다. 전체적인 자유 표면의 형상과 바닥 면에 닿은 유동 선단의 위치가 격자 세분화가 이뤄진 case III가 case II에 비하여 case I에 좀 더 근접함을 알 수 있다. 해석 중의 평균적인 격자와 절점의 수를 각 경우에 대하여 Table 1 에 비교하였으며 더불어 각 경우의 계산 시간에 대한 비교도 덧붙였다. 비교 결과에서 보듯 case I의 경우가 가장 많은 시간과 메모리를 소모하며 case III은 사용된 평균 격자의 수에서 가장 적은 메모리를 사용하였고 계산 시간에서는 case II에 비하여 약 60% 정도 더 많은 시간이 소요되었다. 이와 같은 결과는 계산에 사용된 격자 수에서 평균적으로는 효율적 이었지만, 표면에서 격자 세분화를 하는 과정에서 실제의 유동 계산 외에 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다.

결론적으로 더 많은 격자를 사용한 case II에 비해 초기 격자가 적은 상태로 격자 세분화를 적용한 case III가 전체적인 자유 표면을 구성함에 있어 case I 과 더욱 일치하였으며 case III의 경우 가장 효율적인 메모리가 사용됨을 알 수 있다. 계산 시간에 있어서는 case I 과 case II의 사이에 case III의 계산 시간 결과가 존재한다. 자유 표면을 갖는 비정상 유동인 댐의 붕괴 문제 해석으로부터 적응 격자 세분화의 효율성을 보였다.

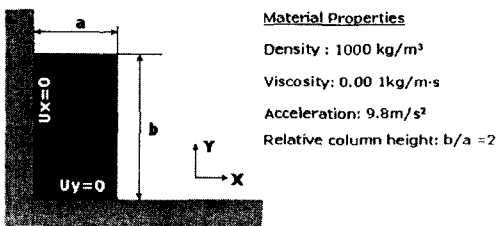


Fig. 6 Schematic diagram of initial water dam and boundary condition on wall

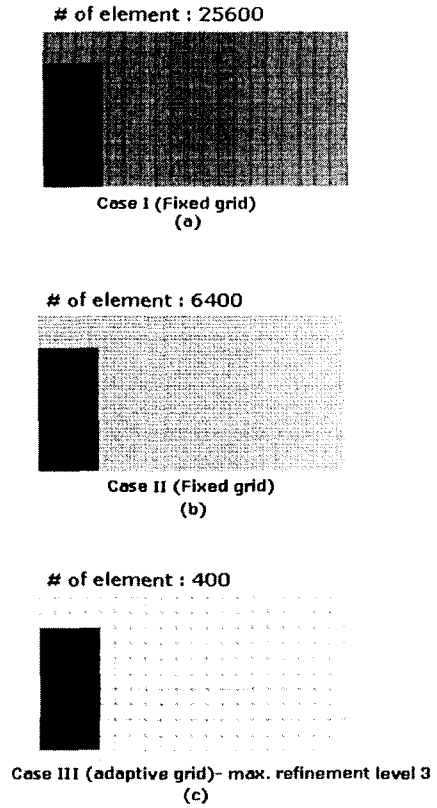


Fig. 7 Initial grids configuration case I (a), case II (b) and case III(c)

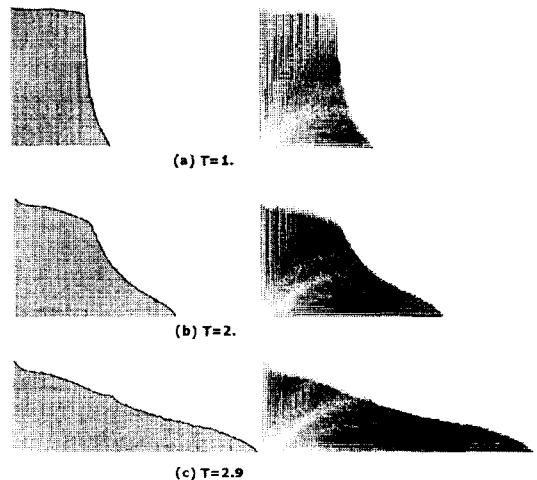


Fig. 8 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case I

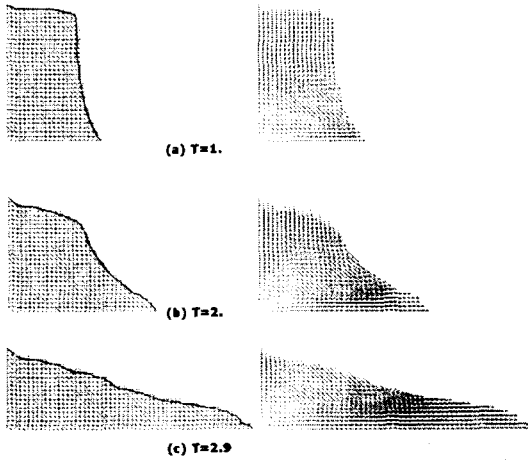


Fig. 9 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case II

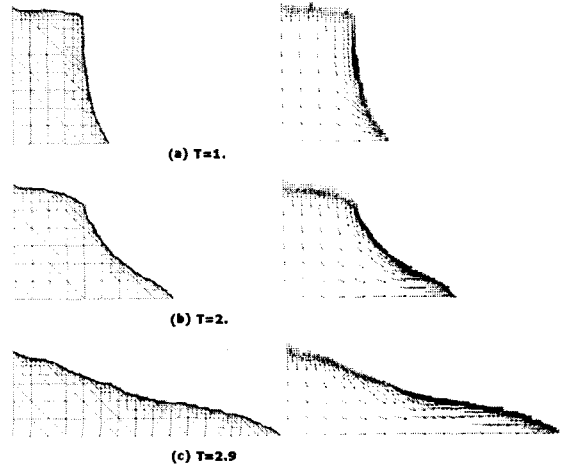


Fig. 11 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case III

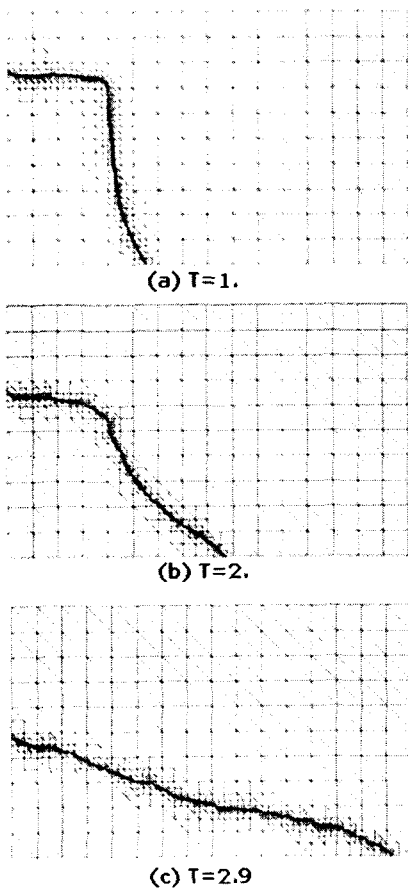


Fig. 10 Predicted free surfaces and adaptive grids (refinement level 3) obtained in case III

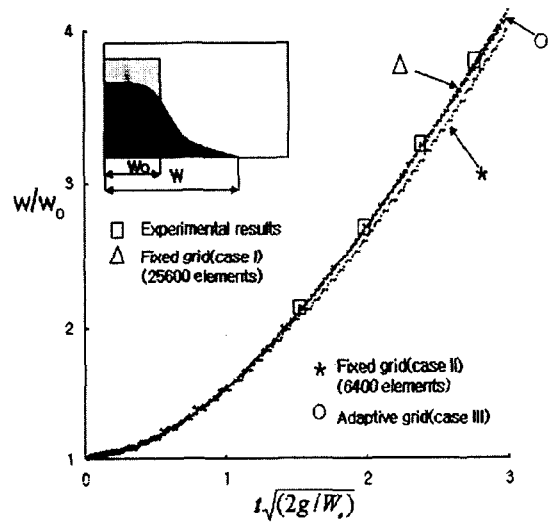


Fig. 12 Predicted front position variation versus time compared with experimental result by Martin[14]

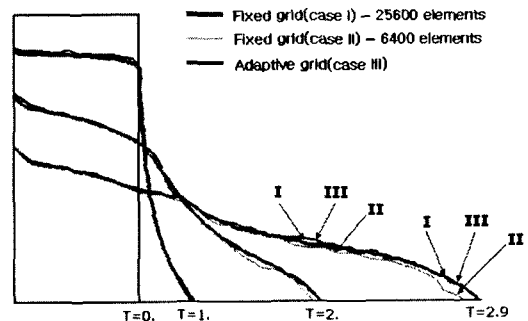


Fig. 13 Comparison between predicted free surfaces obtained in all cases

Table 1 Comparison of results obtained in cases

	case I (fine fixed grid)	case II (coarse fixed grid)	case III (adaptive grid)
Total num. of nodal points	13041	3321	231
Total num. of elements	25600	6400	400
Total num. of control volumes	4336	1768	1248
Relative computational time	12.3	1.	1.6

4. 결론

삼각형의 검사체적을 갖는 요소에 대한 형상 충전 기법과 적응격자 세분화 기법의 타당성 검토를 위하여 물 댐의 붕괴 시 유체의 흐름을 예측하는 예제에 대하여 적용해 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 삼각형 검사 체적 요소에 적용된 형상 충전 기법은 부분 충전 검사체적에서의 유출입량 계산에 있어 유체 충전부의 비압축성 유동 조건을 만족시키는 효율적인 방법으로 유체의 유동 진전 현상 모사에 있어 좋은 결과를 보였다.

(2) 일반적인 삼각형 검사 체적을 6 가지 충전 형상으로 정의 하고 측면 충전율을 계산함으로써 단순 수치 값인 충전율로부터 실제 물리적 유동 형태에 보다 근접한 유동 선단을 예측할 수 있었다.

(3) 적응 격자 세분화 기법의 적용은 부분 충전 검사체적에서의 미충전 부분의 제거가 가능하여 유동 선단에 의하여 예측된 형태에 보다 접근한 유동장을 얻을 수 있었고, 유동선단부의 격자를 미세하게 생성 시킴으로써 속도장과 압력장을 보다 효율적이면서 정확하게 계산할 수 있었다.

(4) 형상충전과 적응격자 세분화 기법을 물 댐의 붕괴 문제의 수치 모사에 적용하여 안정적인 유체의 흐름 현상 예측과 실험 결과에 근접한 해석 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

(1) Balasubramaniam Ramaswamy and Mutsuto Kawahara, 1987, "Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 953~984.

(2) Harlow, F. H. and Welch, J. E., 1995, "Numerical

Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2182~2189.

- (3) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (4) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, "A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding," *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 19, pp. 423~444.
- (5) Dhatt, G., Gao, D.M. and Ben, Cheikh A., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 823~831.
- (6) Jeong, J. H. and Yang, D. Y., 1996, "Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flow with Surface using Pattern Filling and Refined Flow Field Regeneration Technique," *Trans. Of KSME (A)*, Vol. 20, No. 3, pp. 933~944.
- (7) Jeong, J. H. and Yang, D. Y., 1998, "Finite Element Analysis of Transient Fluid Flow with Free Surface using VOF Method and Adaptive Grid," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 26, pp. 1127~1154.
- (8) Kim, M. S., Shin, S. H. and Lee, W. I., 2000, "A New VOF-based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (I) - New Free Surface Tracking Algorithm and Its Verification -," *Trans. Of KSME (B)*, Vol. 24, No. 12, pp. 1555~1569.
- (9) Kim, M. S., Park, J. S. and Lee, W. I., 2000, "A New VOF-based Numerical Scheme for the Simulation of Fluid Flow with Free Surface (II) - Application to the Cavity Filling and Sloshing Problems -," *Trans. Of KSME (B)*, Vol. 24, No. 12, pp. 1570~1579.
- (10) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedure*, Prentice Hall, New Jersey, pp. 268~296.
- (11) Gao, D. M., 1999, "A Three-Dimensional Hybrid Finite Element-Volume Tracking Model for Mould Filling in Casting Processes," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 29, pp. 877~895.
- (12) Hughes, T. J., Liu, W. K. and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 30, pp. 1~60.
- (13) Thompson, E., 1986, "Use of Pseudo-Concentration to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 6, pp. 749~761.
- (14) Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.