응용통계연구 제 17권 1호, 2004년, pp. 49-60

INVERSE GAUSSIAN분포의 모수비에 대한 무정보적 사전분포에 대한 연구

강상길[1)] 김달호[2)] 이우동[3)]

요 약

이 논문의 목적은 역 가우스 분포의 모수비가 관심의 대상일 때, 그 모수비에 대한 무정보적 사전분포를 구하는데 있다. 특별히, 모수비에 대한 확률대응사전분포와 기준사전분포를 제안하였다. 먼저, 관심의 대상이되는 모수에 대해 모수 직교화 변환을 구하고, 모수 직교화변환을 이용하여 확률대응사전분포와 기준사전분포를 구하였다. 특히 확률대응사전분포의 일치차수는 1차임을 보였으며 2차확률대응사전분포는 존재하지 않음을 보였다. 또한 제안된 사전분포에 의해 유도된 사후분포는 적절분포임을 증명하였다. 모의실험을 통하여 확률대응사전분포와 기준사전분포를 비교했으며, 실제자료를 이용하여 분석하는 예를 보였다.

주요용어: 무정보적 사전분포, 확률대응사전분포, 기준사전분포, 역 가우스 분포

1. 서론

모수 μ와 λ를 가지는 역 가우스분포 (Inverse Gaussian Distribution)는 양의 방향으로 치우친 (positively skewed) 분포로서 심장병학, 수문학, 인구통계학, 어학, 노동 및 재정관련 자료를을 적합 시키기에 적절한 분포이다 (Chhikara and Forks (1978,1989) ;Seshadri (1999)). 그리고 그 확률밀도함수는

$$f(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}x^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right], x>0, \mu, \lambda>0, \tag{1.1}$$

이다.

역 가우스분포와 관련한 베이지안 (Bayesian) 추론은 Banerjee와 Bhattacharyya (1979), Padgett (1981)등이 모수에 대한 점추정과 신뢰도추정, 최고사후밀도구간(Highest Posterior Density Interval) 등의 문제를 고려하였다. 특히, Banerjee와 Bhattacharyya (1979)는 모수자체에 대해 무정보적 사전분포와 공액사전분포를 이용하여 추론하였으며, Padgett (1981)은 신뢰도에 대한 베이지안 추정에 대해 연구한 바 있다.

1) (220-702) 강원도 원주시 우산동, 상지대학교 응용통계학과, 조교수
E-mail: sangkg@sangji.ac.kr
2) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 자연과학대학 통계학과,부교수
E-mail: dalkim@knu.ac.kr
3) (712-240) 경상북도 경산시 유곡동 290번지, 대구한의대학교 정보과학부 정보분석학 전공,부교수
E-mail: wdlee@dhu.ac.kr

Tweedie (1957a, 1957b)는 역 가우스 분포와 관련된 통계적 성질들과 정규분포와의 관련성에 대해서 연구했다. Folks와 Chhikara (1978)은 재조사를 통하여 역 가우스분포의 통계적 성질들을 자세히 소개하였다. Huberman 등 (1998)은 AOL (American on Line)과 관련한 자료를 역 가우스분포를 이용하여 분석하였으며, 최근에 Mudholkar와 Natarayan (2002)은 정규분포와 역 가우스분포간의 이탈효과에 관련된 연구를 하였다.

$\theta_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ 이라고 두자. Mudholkar와 Natarayan (2002)는 θ_1을 이용하여 역 가우스분포로부터 정규분포로의 이탈효과에 대해 연구하였다. 여기서 θ_1은 정규분포와 역 가우스분포의 가까운 정도를 표현하는 모수인데, 역 가우스분포의 형태를 결정하는 모수이다. 만약 $\theta_1 \geq 10$이면 역 가우스분포는 대칭인 분포형태를 하며, $1 \leq \theta_1 < 10$이면 약간 치우친 분포형태를 하며, $\theta_1 < 1$이면 많이 치우친 분포형태를 한다. 특히, $\theta_1 > 100$ 이면 역 가우스분포는 정규분포와 흡사하다.

베이지안 추론분야에서 사전분포 (prior distribution)의 이용은 필수적이다. 과거나 현재의 정보를 적절히 이용한 베이지안 추론은 많은 장점이 있음에도 불구하고, 사전분포의 가정에 따라 너무 주관적이 될 수 있다는 점이 문제점으로 지적되어 왔다. 이러한 점을 보안하고 또한 사전정보가 불충분한 경우에 이용할 수 있는 무정보적 사전분포 (noninformative prior)의 개발에 많은 학자들이 관심을 가졌다. 특히, Jeffreys' 사전분포는 대표적인 무정보적 사전분포 중 하나이다. 모수가 1개인 통계적 모형에서 Jeffreys' 사전분포는 확률대응성을 만족하며 (Welch와 Peers (1963)), 기준사전분포이다. 그러나 장애모수(nuisance parameter)가 있는 경우, Jeffreys 사전분포는 확률대응(probability matching)성을 만족하지 않으며, Bernardo(1972)는 정규분포에서 추론하는 경우 marginalization paradox와 같은 문제점이 있음을 밝혔으며, Berger와 Berardo (1992)는 이 사전분포가 불일치추정량(inconsistent estimator)을 유도한다고 지적하였다.

장애모수가 있는 경우의 문제점을 극복하기 위하여 , 제안된 대표적인 무정보적 사전분포는 확률대응 사전분포 (probability matching prior), 기준사전분포 (reference prior)이다. 확률대응사전분포는 관심모수 (parameter of interest)에 대한 사후분포의 포함확률 (coverage probability)이 frequentist의 포함확률과 점근적 (asymptotic)으로 일치하는 사전분포이다.

확률대응사전분포의 개념은 Welch와 Peers (1963)로 부터 출발하였다. 그리고 Stein (1985) 과 Tibshirani (1989)이 확률대응 사전분포의 개발에 관심을 가졌고, Mukerjee 와 Dey (1993), Datta 와 Ghosh (1995a, 1995b, 1996), Mukerjee 와 Ghosh (1997)등이 여러 통계모형에서 확률대응사전분포를 개발했다.

한편, Bernardo (1979)는 정보이론을 이용하여 사후분포에 정보를 최소화 하는 사전분포를 제안하였고, 이를 기준사전분포라고 불렀다. Ghosh 와 Mukerjee (1992), 그리고 Berger 와 Bernardo (1989,1992)는 Bernardo (1979)의 연구를 확장하였고, 기준사전분포를 개발하는 알고리즘을 제안하였다. 기준사전분포는 많은 통계모형에서 Jeffreys 사전분포가 갖는 문제점을 해결하였으며, 확률대응성을 만족하는 경우가 있는 것으로 알려져 있다.

Yang 과 Berger (1996)는 역가우스 분포의 모수들과 관련하여 제안되었던 무정보적 사전분포들을 소개하였다.

이 논문에서는 모수 θ_1에 대한 무정보적 사전분포, 즉, 확률대응 사전분포와 기준사전분포를 개발하려고 한다. 2절에서는 피셔 정보행렬 (Fisher Information Matrix)을 유도하고, 관심모수와 모수 직교화 변환 (orthogonal transformation)을 찾는다. 그리고 관심모수에 대한 1차 (first order)와 2차 (second order) 확률대응사전분포를 유도한다. 그리고 1차 확률대응 사전분포는 2차 확률사전분포의 조건을 만족하지 않음을 보인다. 그리고 관심모수의 중요도에 따라 그룹화하여 기준사전분포를 개발한다. 그리고, 제안된 기준사전분포들 중 1차확률대응성을 만족하는 기준사전분포가 있음을 보일 것이다. 3절에서는 2절에서 개발된 사전분포들을 일반화된 식으로 표현할 것이며, 이 사전분포들이 어떠한 경우에 사후분포의 적절성을 만족하는 지를 보일 것이다. 4절에서는 모의실험을 통하여 개발된 사전분포들의 포함확률을 계산할 것이며, 실제자료를 이용하여 분석하는 예를 보일 것이다.

2. 무정보적 사전분포

2.1. 확률대응사전분포

주어진 임의의 사전분포 π에 대하여, $\theta_1^{1-\alpha}(\pi;\mathbf{X})$를 θ_1에 대한 사후분포의 $(1-\alpha)$번째 분위수라고 하자. 즉,

$$P^{\pi}\left[\theta_1 \le \theta_1^{1-\alpha}(\pi;\mathbf{X})|\mathbf{X}\right] = 1-\alpha, \tag{2.1}$$

을 만족한다.

만약,

$$P\left[\theta_1 \le \theta_1^{1-\alpha}(\pi;\mathbf{X})|\boldsymbol{\theta}\right] = 1-\alpha+o(n^{-u}), \tag{2.2}$$

을 만족하는 사전분포 π를 결정할 수 있다면 이 사전분포를 확률대응사전분포하고 부른다. 여기에서 $u>0$ 이며, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$를 나타낸다. 그리고 $p(\ge 2)$는 모형에 포함된 모수의 수이다. 특히, $u=1/2$로서 식 (2.2)을 만족하는 π를 1차 확률대응사전분포라고 하며, $u=1$이면 2차 확률대응사전분포라고 한다.

이러한 확률대응사전분포를 개발하기 위해, Cox와 Reid (1983)이 연구한 직교화 변환을 이용하면 계산상의 편리한 점이 많은데, 이를 위하여,

$$\theta_1=\frac{\lambda}{\mu}, \theta_2=\frac{2}{\mu}+\frac{1}{\lambda}$$

로 변화하면 모수직교화를 만족한다.

변환된 모수 θ_1과 θ_2에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L(\theta_1,\theta_2)\propto \theta_2^{-\frac{1}{2}}(2\theta_1+1)^{\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{x}{2}\theta_1^2\theta_2(2\theta_1+1)^{-1}+\theta_1-\frac{1}{2x}\theta_2^{-1}(2\theta_1+1)\}. \tag{2.3}$$

위의 우도함수로 부터 피셔정보행렬은

$$I=\begin{pmatrix} \theta_1^{-1}(2\theta_1+1)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\theta_2^{-2}(2\theta_1+1) \end{pmatrix}$$

이 된다.

위의 피셔정보행렬로부터 관심모수 θ_1이 θ_2와 직교한다는 사실을 알 수 있다 (Cox 와 Reid (1989)).

Tibshirani (1989)에 의하면 위의 정보행렬로부터 1차 확률대응 사전분포는 다음과 같이 주어진다.

$$\pi_m^{(1)} \propto \theta_1^{-1/2}(2\theta_1+1)^{-1/2}d(\theta_2), \tag{2.4}$$

여기에서 $d(\theta_2)$는 미분가능한 임의의 양의 함수이다.

위의 사전분포 (2.4)는 $d(\theta_2)$의 선택에 따라 2차 확률대응 사전분포가 될 수 있다. Murkerjee와 Ghosh (1997)에 의하면, 만약 $d(\theta_2)$가 아래의 미분방정식을 만족한다면 2차 확률대응 사전분포임을 밝혔다.

$$\frac{1}{6}d(\theta_2)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\{I_{11}^{-3/2}L_{1,1,1}\} + \frac{\partial}{\partial\theta_2}\{I_{11}^{-1/2}L_{112}I^{22}d(\theta_2)\} = 0, \tag{2.5}$$

여기에서

$$\begin{aligned}
L_{1,1,1} &= E\left[\left(\frac{\partial \log L}{\partial\theta_1}\right)^3\right] = -\frac{8\theta_1^2+6\theta_1+3}{\theta_1^2(2\theta_1+1)^3},\\
L_{112} &= E\left[\frac{\partial^3 \log L}{\partial\theta_1^2\partial\theta_2}\right] = -\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}(2\theta_1+1)^{-2},\\
I_{11} &= \theta_1^{-1}(2\theta_1+1)^{-1},\\
I^{22} &= 2\theta_2^2(2\theta_1+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

미분방정식 (2.5)의 왼쪽항을 계산하면

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}d(\theta_2)\frac{\partial}{\partial\theta_1}\{-\theta_1^{-1/2}(2\theta_1+1)^{-3/2}(8\theta_1^2+6\theta_1+3)\} - 2\theta_1^{-1/2}(2\theta_1+1)^{-5/2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\{\theta_2 d(\theta_2)\}\\
=\;& \frac{1}{4}(1+6\theta_1)\theta_1^{-\frac{3}{2}}(1+2\theta_1)^{-\frac{5}{2}}d(\theta_2) - 2\theta_1^{-\frac{1}{2}}(1+2\theta_1)^{-\frac{5}{2}}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\{\theta_2 d(\theta_2)\}
\end{aligned}$$

이다. 위의 식을 0으로하는 $d(\theta_2)$를 찾을 수 없다. 그러므로 2차 확률대응사전분포는 존재하지 않는다.

2.2. 기준사전분포

기준사전분포는 Bernardo (1979)에 의해 소개 되었고, Berger와 Bernardo (1992)에 의해 확장된 무정보적 사전분포이다. 기준사전분포는 여러 통계모형에서 바람직한 결과를 주는 것으로 알려져 있다.

이절에서는 모수 θ_1, θ_2를 모수의 중요도에 따라 그룹화하여 중요도에 따른 기준사전분포를 구한다. 앞절에서 보듯이 모수 θ_1, θ_2는 서로 직교한다. 모수가 직교하는 경우, Datta 와 Ghosh (1995)에 의하면 기준사전분포는 다음과 같이 된다.

모수의 중요도	기준사전분포	
$\{(\theta_1,\theta_2)\}$	$\pi_1^R \propto \theta_1^{-1/2}\theta_2^{-1}$	Jeffreys' 사전분포와 동일
$\{\theta_1,\theta_2\},\{\theta_2,\theta_1\}$	$\pi_2^R \propto \theta_1^{-1/2}(2\theta_1+1)^{-1/2}\theta_2^{-1}$	1차 확률대응 사전분포

위의 결과에서 알 수 있듯이, 기준사전분포 π_2^R은 식 (2.4)에서 $d(\theta_2)=\frac{1}{\theta_2}$로 둔다면 1차 확률대응 사전분포임이 분명하다.

위의 기준사전분포들을 모수 μ,λ로 변환하면

$$\pi_1^R(\mu,\lambda) \propto \mu^{-3/2}\lambda^{-1/2},$$

$$\pi_2^R(\mu,\lambda) \propto \mu^{-1}\lambda^{-1/2}(2\lambda+\mu)^{-1/2}$$

이다.

기준사전분포 π_2^R이 1차 확률대응 사전분포임이 분명하기 때문에 $d(\theta_2)=\theta_2^{-1}$인 기준사전분포를 1차 확률대응사전분포로 쓰기로 한다.

3. 사후분포의 적절성

역 가우스분포 (1.1)에 대한 무정보적 사전분포 $\pi_m^{(1)}$, π_1^R,π_2^R에 의한 사후분포의 적절성을 조사하고자 한다. 이 사전분포들을 일반화된 표현으로 표시한다면 다음과 같다.

$$\pi(\theta_1,\theta_2) \propto \theta_1^{-a}\theta_2^{-b}(2\theta_1+1)^{-c}, \tag{3.1}$$

여기에서 $a>0$,$b>0$,$c\geq 0$이다.

위의 일반화된 사전분포 (3.1)을 이용하여 사후분포의 적절성을 밝히도록 한다.

정리 3.1 만약 $n-2a+2b>0$, $n-a+2b>1$ 그리고 $a<1$ 이 성립한다면 사전분포 (3.1)에 의한 θ_1, θ_2의 결합사후확률 분포는 적절 분포이다.

증명: 일반화된 사전분포 (3.1)을 이용한 θ_1과 θ_2의 결합사후확률분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\pi(\theta_1,\theta_2|\mathbf{x}) \propto\ & \theta_1^{-a}\theta_2^{-\frac{n}{2}-b}(2\theta_1+1)^{\frac{n}{2}-c} \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_1^2\theta_2(2\theta_1+1)^{-1}\sum_{i=1}^n x_i + n\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^{-1}(2\theta_1+1)\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right\}\end{aligned}$$

위의 결합사후확률분포를 $\mu=\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}(2\theta_1+1)$ 그리고 $\lambda=\theta_2^{-1}(2\theta_1+1)$로 변수변환한다면

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty \pi(\theta_1,\theta_2|\mathbf{x})d\theta_1 d\theta_2 \\ =\ &\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-a+b-1}\mu^{a+b+c-3}(2\lambda+\mu)^{-b-c+1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\right\}d\lambda d\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty c_1 \lambda^{\frac{n}{2}-a+b} \mu^{a+b+c-3} (2\lambda+\mu)^{-b-c} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\} d\lambda d\mu \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-a+b-1} \mu^{a+b+c-2} (2\lambda+\mu)^{-b-c} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\} d\lambda d\mu \\
&< \int_0^\infty \int_0^\infty c_1 \lambda^{\frac{n}{2}-a+b} \mu^{a-3} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\} d\lambda d\mu \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{\frac{n}{2}-a+b-1} \mu^{a-2} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\} d\lambda d\mu \\
&= \int_0^\infty c_2 \mu^{n-a+2b-1} [\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}]^{-\frac{n-2a+2b+2}{2}} + c_3 \mu^{n-a+2b-2} [\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}]^{-\frac{n-2a+2b}{2}} d\mu \\
&\le \int_0^\infty c_4 \mu^{n-a+2b-1} [\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2]^{-\frac{n-2a+2b+2}{2}} + c_5 \mu^{n-a+2b-2} [\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2]^{-\frac{n-2a+2b}{2}} d\mu
\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 $c_i, i = 1, \cdots, 5$는 적분변수와 관계없는 상수이다. 그리고 마지막 부등식에서 $\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{x_i} \ge \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{x_{(n)}}$인 사실을 이용하였다. $x_{(n)}$은 n번째 순서통계량을 나타낸다. 이와 같이하여 마지막 적분은 $n-2a+2b>0, n-a+2b>1, a<1$이 성립한다면 유한하다는 사실을 쉽게 알 수 있다. □

다음으로 사전분포 (3.1)을 사용했을 때, θ_1에 대한 주변사후확률분포를 구하면 다음과 같다.

정리 3.2 사전분포 (3.1)하에서 θ_1에 대한 주변사후확률밀도함수는

$$\pi(\theta_1|\mathbf{x}) \propto \theta_1^{\frac{n-2a+2b-2}{2}} (2\theta_1+1)^{-b-c+1} \exp(n\theta_1) BesselK \left[\frac{n}{2}+b-1, \theta_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^{-1}} \right] \tag{3.2}$$

이다. 그리고 $BesselK[\cdot,\cdot]$는 수정된 제2종 베셀함수 (modified Bessel function of the second kind)이다.

위의 정리 3.2로 부터 제프리사전분포를 이용하는 경우, $a=\frac{1}{2}, b=1, c=0$의 값을 취하고, 기준사전분포를 이용하는 경우에는 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=1$의 값을 취하여 θ_1에 대한 주변사후확률분포 (3.2)에 대입하여 θ_1에 대한 통계적추론에 이용 할 수 있다.

4. 모의실험 및 실제자료분석

앞서 제안된 확률대응사전분포의 조건을 만족하는 기준사전분포와 제프리스사전분포를 추정된 포함확률측면에서 비교하고, 실제자료를 이용하여 분석하는 예를 보인다.

먼저, 포함확률은 $n, \theta_1, \theta_2, (\mu, \lambda)$에 대해 값을 변화시키면서 조사하였다. 추정된 포함확률을 각각 0.05와 0.95을 목적값으로하여 작성하였다. 이를 계산한 과정은 다음과 같다.

$\theta_1^\alpha(\pi;\mathbf{X})$를 θ_1의 주변사후확률분포의 α번째 분위수라고 두자. 즉,

$$F(\theta_1^\alpha(\pi;\mathbf{X})|\mathbf{X}) = \alpha,$$

여기에서 $F(\cdot|\mathbf{X})$는 θ_1의 주변사후확률분포의 분포함수이다. 그러면 θ_1의 단측구간에 대한 포함확률은

$$P_{(\theta_1,\theta_2)}(\alpha;\theta_1) = P_{(\theta_1,\theta_2)}\left(0 < \theta_1 \leq \theta_1^\alpha(\pi;\mathbf{X})|\theta_1,\theta_2\right).$$

로 표현된다. $\alpha = 0.05(0.95)$인 경우에 추정된 $P_{(\theta_1,\theta_2)}(\alpha;\theta_1)$는 표1과 같다.

표1 : θ_1의 주변사확률분포에 대한 포함확률

θ_1	n	π_1^R	π_2^R
0.1	3	0.1696(0.9958)	0.0846(0.9948)
	5	0.1012(0.9920)	0.0536(0.9908)
	10	0.0620(0.9830)	0.0412(0.9818)
	30	0.0528(0.9638)	0.0428(0.9606)
0.3	3	0.1430(0.9894)	0.0568(0.9866)
	5	0.0864(0.9828)	0.0430(0.9780)
	10	0.0688(0.9710)	0.0450(0.9650)
	30	0.0620(0.9546)	0.0488(0.9480)
0.5	3	0.1396(0.9890)	0.0534(0.9848)
	5	0.0902(0.9788)	0.0426(0.9708)
	10	0.0714(0.9658)	0.0452(0.9502)
	30	0.0574(0.9568)	0.0462(0.9480)
1	3	0.1364(0.9814)	0.0498(0.9706)
	5	0.0956(0.9754)	0.0442(0.9600)
	10	0.0770(0.9650)	0.0458(0.9534)
	30	0.0618(0.9606)	0.0462(0.9500)
3	3	0.1526(0.9806)	0.0490(0.9576)
	5	0.1084(0.9718)	0.0472(0.9500)
	10	0.0820(0.9672)	0.0512(0.9484)
	30	0.0660(0.9578)	0.0510(0.9500)
5	3	0.1554(0.9812)	0.0454(0.9556)
	5	0.1064(0.9668)	0.0500(0.9406)
	10	0.0856(0.9674)	0.0496(0.9532)
	30	0.0608(0.9574)	0.0466(0.9484)
10	3	0.1540(0.9812)	0.0418(0.9516)
	5	0.1042(0.9734)	0.0476(0.9490)
	10	0.0840(0.9656)	0.0504(0.9492)
	30	0.0668(0.9572)	0.0492(0.9468)

표1에서 고정된 $n,(\theta_1,\theta_2)$에 대해 역가우스분포를 하는 난수 $\mathbf{X}$를 10,000번 반복생성하였다. 그리고 일반성을 잃지 않고, $\mu=1$로 가정하였다.

참고로, 사전분포 π, 주어진 자료 $\mathbf{X}$에 대하여, $\theta_1 \le \theta_1^{\alpha}(\pi;\mathbf{X})$와 $F(\theta_1|\mathbf{X}) \le \alpha$는 동치인 사건이므로, 사전분포 π하에서 $P_{(\theta_1,\theta_2)}(\alpha;\theta_1)$ 는 $F(\theta_1|\mathbf{X}) \le \alpha$를 만족하는 상대도수로 추정할 수 있다.

결론적으로 표1로부터 확률대응사전분포이면서 기준사전분포인 π_2^R이 표본의 크기가 증가하면서 목표확률에 접근하고 있음을 알 수 있고, θ_1의 값의 변화에 민감하지 않은 결과를 준다는 것을 알 수 있다. 그래서 역가우스분포모형에서 관심모수가 $\frac{\lambda}{\mu}$인 경우에는 π_2^R을 사용하는 것이 바람직하다.

예제1. 다음의 자료는 Folks와 Chhikara (1979)에 수록된 미국 메릴랜드주의 저그다리 (Jug Bridge)와 관련한 자료이다. 그들은 이 자료가 역 가우스분포와 로그-정규분포에 적합한 자료라고 언급하였으며, 이 자료를 이용하여 최대우도추정량을 구했는데, 그 값은 $\widehat{\mu}=0.80$과 $\widehat{\lambda}=1.44$이다. 그리고, 25개의 자료는 다음과 같다.

0.17	0.19	0.23	0.33	0.39	0.39	0.40	0.45	0.52	0.56	0.59	0.64	0.66
0.70	0.76	0.77	0.78	0.95	0.97	1.02	1.12	1.24	1.59	1.74	2.92	

위의 자료를 이용하여 제안된 사전분포들을 이용하여 관심모수의 점추정량과 주변사후확률분포에 대한 그림을 그릴 것이다.

먼저, 관심모수에 대한 최대우도추정량은 최대우도추정량의 불변성을 이용한다면 θ_1에 대한 최우추정값은 1.8이 된다. 그리고 제프리 사전분포하에서의 베이지안 추정값은 1.77이며, 1차 확률대응사전분포인 기준사전분포를 이용한 추정값은 1.67이다. 참고로, θ_2에 대한 최우추정값은 3.19, 제프리 사전분포하에서의 베이지안 추정값은 3.21이며, 1차 확률대응사전분포인 기준사전분포를 이용한 추정값도 3.21이다. 그림4.1은 위의 자료에 대한 θ_1에 대한 주변사후확률밀도함수이다.

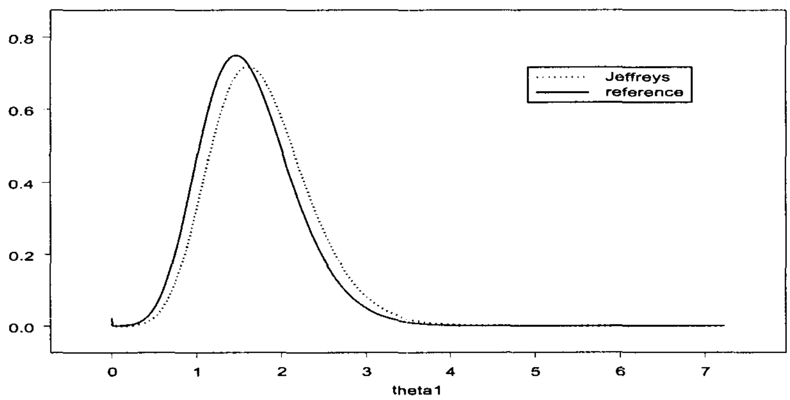

그림 4.1: Marginal Posterior Distribution of θ_1

예제 2.다음의 자료는 $\mu=0.1,\lambda=10$인 경우에 생성된 인위적인 자료이다. 이 경우,

$\theta_1 = \frac{\lambda}{\mu} = 100, \theta_2 = \frac{2}{\mu} + \frac{1}{\lambda} = 20.1$ 이며, 이때 역 가우스 분포는 정규분포와 비슷한 형태를 하게 된다.

.0907	.1019	.1156	.1094	.1029	.1026	.0887	.1066	.1005	.0884
.0862	.1168	.0847	.0994	.1043	.1094	.1001	.0938	.1042	.1236
.0983	.0924	.0996	.0950	.1100	.0881	.1158	.1091	.0943	.0911

이 자료에 대한 Kolmogorov-Smirnov 검정은 귀무가설이 정규분포인 경우, 검정통계량의 값이 0.136이었으며, p-값이 0.5로 귀무가설이 채택되었으며, 그 때 Q-Q plot은 그림4.2와 같다.

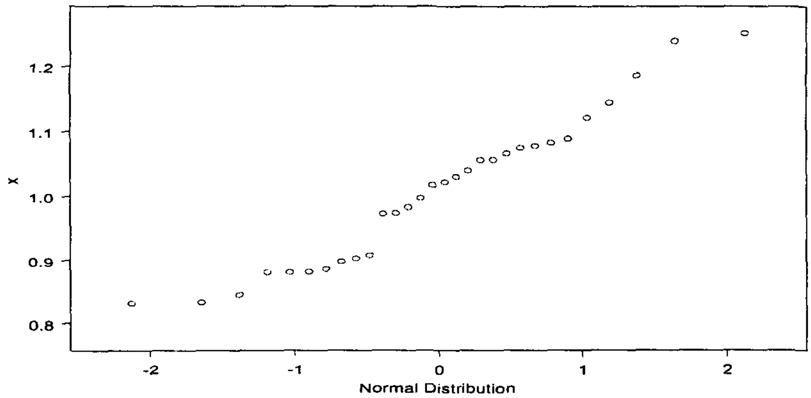

그림 4.2: Quantile-Quantile Plot for Artificial Data

그리고, 이 자료에 대해 θ_1과 θ_2에 대한 추정값은 다음과 같다.

	θ_1	θ_2
MLE	105.24	19.94
π_1^R	104.84	19.79
π_2^R	97.84	19.80

모의실험결과와 예제를 통하여 볼 때, 역 가우분포에서 θ_1에 대한 베이지안 추론은 1차 확률대응성을 만족하는 기준사전분포의 사용이 확률대응성측면에서 가장 바람직함을 알 수 있다.

참고문헌

[1] Banerjee, A. K. and Bhattacharyya, G. K. (1979). Bayesian Results for the INverse Gaussian Distribution with an Application, *Technometrics*, Vol. 21, 247-251

[2] Berger, J. O. and Bernardo, J. M. (1989). Estimating a Product of Means : Bayesian Analysis with Reference Priors. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 200-207.

[3] Berger, J. O. and Bernardo, J. M. (1992). On the Development of Reference Priors (with discussion). *Bayesian Statistics IV*, J. M. Bernardo, et. al., Oxford University Press, Oxford, 35-60.

[4] Bernardo, J. M. (1979). Reference Posterior Distributions for Bayesian Inference (with discussion). *Journal of Royal Statistical Society, B*, 41, 113-147.

[5] Folks, J. L. and Chhikara, R.S.(1978). The Inverse Gaussian Distribution and Its Statistical Application-A Review. *Journal of Royal Statistical Society, B*, 40, 263-289.

[6] Chhikara, R.S. and Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution; Theory, Methodology and Applications*, Marcel Dekker, New York.

[7] Datta, G. S. and Ghosh, J. K. (1995a). On Priors Providing Frequentist Validity for Bayesian Inference. *Biometrika*, 82, 37-45.

[8] Datta, G. S. and Ghosh, M. (1995b). Some Remarks on Noninformative Priors, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1357-1363.

[9] Datta, G. S. and Ghosh, M. (1996). On the Invariance of Noninformative Priors. *The Annals of Statistics*, 24, 141-159.

[10] Ghosh, J. K. and Mukerjee, R. (1992). Noninformative Priors (with discussion). *Bayesian Statistics IV*, J. M. Bernardo, et. al., Oxford University Press, Oxford, 195-210.

[11] Huberman, B. A., Pirolli, P. L. T., Pitkow, J. E. and Lukose, R. M. (1998). Strong Regularities in World Wide Web Surfing, *Science*, 280, 95-97.

[12] Mudholkar, G. and Natarajan, R. (2002). The Inverse Gaussian Models: Analogues of Symmetry, Skewness and Kurtoss, *Annals of the Institute Statistical Mathematics*, 54, 138-154.

[13] Mukerjee, R. and Dey, D. K. (1993). Frequentist validity of Posterior Quantiles in the Presence of a Nuisance Parameter : Higher Order Asymptotics. *Biometrika*, 80, 499-505.

[14] Mukerjee, R. and Ghosh, M. (1997). Second Order Probability Matching Priors. *Biometrika*, 84, 970-975.

[15] Padgett, W. J. (1981). Bayes Estimation of Reliability for the Inverse Gaussian Model, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-30, 384-385.

[16] Seshadri, V. (1999). *The Inverse Gaussian Distribution; Statistical Theory and Applications*, Springer Verlag, New York.

[17] Stein, C. (1985). On the Coverage Probability of Confidence Sets based on a Prior Distribution. *Sequential Methods in Statistics*, Banach Center Publications, 16, 485-514.

[18] Tibshirani, R. (1989). Noninformative Priors for One Parameter of Many. *Biometrika*, 76, 604-608.

[19] Tweedie, M.C.K. (1957a). Statistical Properties of Inverse Gaussian Distributions I. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 362-377.

[20] Tweedie, M.C.K. (1957b). Statistical Properties of Inverse Gaussian Distributions II. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 696-705.

[21] Welch, B. N. and Peers, B. (1963). On Formulae for Confidence Points based on Integrals of Weighted Likelihood. *Journal of Royal Statistical Society*, 35, 318-329.

[22] Yang, R. and Berger, J. O. (1996), A Catalog of Noninformative Priors, Technical Report, Purdue University.

[2003년 3월 접수, 2003년 9월 채택]

Noninformative Priors for the Ratio of Parameters in Inverse Gaussian Distribution

Sang Gil Kang[1)] Dal Ho Kim[2)] Woo Dong Lee[3)]

ABSTRACT

In this paper, when the observations are distributed as inverse gaussian, we developed the noninformative priors for ratio of the parameters of inverse gaussian distribution. We developed the first order matching prior and proved that the second order matching prior does not exist. It turns out that one-at-a-time reference prior satisfies a first order matching criterion. Some simulation study is performed.

Keywords: Noninformative Prior, Probability Matching Prior, Reference Prior, Inverse Gaussian Distribution

1) Assistant Professor, Dept. of Applied Statistics, Sangji University, Woosan-Dong, Wonju, Kangwon 220-702,Korea

E-mail: sangkg@sangji.ac.kr

2) Associate Professor, Dept. of Statistics, Kyungpook University, Sankyuk-Dong 1370, Daegu 702-701, Korea

E-mail: dalkim@knu.ac.kr

3) Associate Professor, Faculty of Information and Science, Daegu Haany University, Yougok-Dong 290, Kyungsan, Kyungpook 712-240, Korea

E-mail: wdlee@dhu.ac.kr