

중학교 수학에서 기하 내용 취급에 관한 연구¹⁾

김 흥 기*

본 연구는 기하 부분의 내용이 초등학교에서 중학교로 발전 전개되는 과정에서 일부 용어의 정의와 평행선과 각의 취급에 대하여 알아보았고, 교육과정에 제시된 관련 내용을 분석하고 그에 따른 현행 교과서를 살펴보았다. 다음에 관련된 분야의 일부 외국교과서를 비교 분석하여 그 상황을 알아보았다. 그 결과 현행 교과서 보다 바람직한 내용의 취급을 위해서는 우선 체계적인 학습을 할 수 있도록 교육과정에 보다 적합한 학습내용과 그 취급 방법을 제시해야만 하고, 그에 따라 교과서도 보다 적합하게 집필되어야 함을 제시하였다. 이를테면 용어의 정의는 반복하여 충분히 이해하도록 하고, 특히 교육의 다양성을 위해서 평행선의 성질에 관한 내용은 공준으로 도입하여 활용할 수도 있고, 우수한 학생들은 증명을 하여 활용할 수도 있도록 다양한 취급을 하는 것이 바람직함을 제시하였다. 그리고 특히 현행 교과서에서는 <7-나 단계>에서 취급되고 있는 맞꼭지각의 성질과 평행선의 성질과 같은 연역적 추론에 의해서 증명될 수 있는 내용들은 <8-나 단계>로 이동을 하여 학습하는 것이 학습 체계의 연계에 바람직함을 제시하였다.

1. 서 언

수학사를 살펴보면 중요한 도서는 유클리드 원론이고, 그 이유 중의 하나는 기존의 수학을 정리하여 연역적 처리를 한 것이다.

이 원론의 내용의 많은 부분은 세계의 모든 중·고등학교 과정의 기하 부분에서 다루고 있고, 그 취급 방법에 대하여는 나름대로 연구되어 활용되고 있다. 수학은 학문의 성질상 논리적인 처리가 중요한데 어느 정도의 수준에서부터 어떤 방법으로 이와 같은 논리적 처리를 할 수 있도록 하는 것이 타당한 가는 계속 연구 개발되어야 한다.

현행 우리 나라 교육과정에서는 초등학교 과정에서부터 계속 도형에 관한 학습 내용을 다루다가 중학교 1학년 “7-나 단계”에서 보다 체계적인 취급을 하고 있으며 중학교 2학년 “8-나 단계”에서 처음으로 증명을 다루고 있다.

중학교 1학년 과정에서부터 유클리드의 원론에서와 같은 연역적 처리를 하면서 내용을 전개하는 것은 무리가 있다. 그렇다면 어떤 수준에서 어떤 방법으로 취급해야만 수학 교육을 위하여 바람직할 것인가를 알아보는 것이 필요하다.

실제로 현행 교과서에서는 중학교 1학년 과정에서 증명이 필요한 명제들을 직관적으로 받아들이고, 그 사실들을 중학교 2학년과정에서

* 단국대학교, hkkim@dankok.ac.kr

1) 이 연구는 2003학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

이미 알려진 옳은 사실로 사용하고 있으며 그 후 어느 곳에서도 그 명제에 대한 증명이 없이 고등학교 과정이 끝나고 있는 명제들이 있다. 특정한 명제들에 대한 증명을 모든 학생들이 다루어야 함도 문제지만, 교육의 다양성을 생각한다면 어느 곳에서도 증명 한번 없이 끝나고 있는 확실적인 지도도 문제가 있다고 생각된다. 따라서 어떤 명제들의 지도를 어느 정도에서 어떤 방법으로 내용을 도입하고 전개하는 것이 바람직한 것인가를 알아보고 개선책을 제시하는 것은 수학교육의 발전을 위하여 의의 있는 일이 될 것이다. 여기서는 우선 교육과정에서 관련된 부분과 그에 대한 현행 우리나라 교과서들과 그리고 몇 개의 외국교과서를 살펴보고 바람직한 취급 방법을 제시하려고 한다.

II. 도형 분야의 제 7차 교육과정과 그 분석

1. 초등학교 과정

우선 제 7차 수학과 교육과정에서 제시된 중학교의 기하 부분을 살펴보기 전에 중학교 과정 이전에 학습하는 초등학교 교육과정에서의 기하부분에서 다루고 있는 내용과 그에 따른 교과서의 일부 내용, 그리고 일본의 초등학교 교과서와의 내용과 비교하여 살펴보면 다음과 같다. 교육과정의 내용의 일부는 다음과 같다.

<1-가 단계>에서는

- ① 여러 가지 물건을 관찰하여 직육면체, 원기둥, 구의 모양을 찾을 수 있다.
- ② 여러 가지 재미있는 모양을 만드는 활동을 통하여 기본적인 입체 도형에 대한 감각을 익

힌다.

<1-나 단계>에서는

① 평면도형의 모양

- ① 여러 가지 물건을 관찰하여 사각형, 삼각형, 원 모양을 찾을 수 있다.
- ② 구체물을 이용하여 기본적인 평면 도형을 만들고, 여러 가지 모양을 구밀 수 있다.

② 공간 감각

- ① 점판에서 여러 가지 삼각형, 사각형을 알 수 있다.
- ② 점판에 제시된 도형을 보고 그대로 만들 수 있다.

<2-가 단계>에서는

① 기본적인 평면도형

- ① 선분, 직선, 삼각형, 사각형, 원의 모양을 이해하고, 그 모양을 그리거나 만들 수 있다.
- ② 기본적인 평면도형의 구성요소를 알고, 서로 비교할 수 있다.

② 공간 감각

- ① 구체물이나 그림의 옮기기, 뒤집기, 돌리기, 등의 활동을 통하여 그 변화를 관찰할 수 있다.

<용어와 기호> 선분, 직선, 삼각형, 사각형, 원, 꼭지점, 변

<2-나 단계>에서는

① 입체도형의 구성

- ① 쌓기나무로 만들어진 입체도형을 보고 똑같이 만들 수 있다.
- ② 주어진 쌓기나무로 여러 가지 입체도형을 만들 수 있다.

<3-가 단계>에서는

① 각과 평면도형

- ① 생활의 예를 통하여 각, 직각을 이해한다.
- ② 직각삼각형, 직사각형, 정사각형을 이해한다.

② 공간 감각

- ① 모눈종이에 그려진 간단한 평면도형이나 무늬의 옮기기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 그 변화를 관찰할 수 있다.

<용어와 기호> 각, (각의)꼭지점, (각의) 변, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형

<3-나 단계>에서는

① 원의 구성 요소

① 구체적 활동을 통하여 원을 알고, 중심, 반지름, 지름의 관계를 이해한다.

② 컴퍼스를 이용하여 여러 가지 모양을 그릴 수 있다.

② 공간 감각

① 거울을 사용하여 거울에 비치는 상을 다양하게 만들어 관찰할 수 있다.

<용어와 기호> 원, 중심, 반지름, 지름

<4-가 단계>에서는

① 각과 여러 가지 삼각형

① 이등변삼각형과 정삼각형을 이해한다.

② 예각과 둔각의 뜻을 알고, 예각삼각형과 둔각삼각형을 이해한다.

② 내각의 크기

① 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 구할 수 있다.

<용어와 기호> 이등변삼각형, 정삼각형, 예각, 둔각, 예각삼각형, 둔각삼각형, 내각

<4-나 단계>에서는

① 여러 가지 사각형

① 수직과 평행의 관계를 이해하고, 평행선의 성질을 안다.

② 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형 등의 개념을 이해하고, 사각형의 성질을 안다.

③ 간단한 다각형과 정다각형을 이해한다.

② 공간 감각

① 주어진 도형으로 여러 가지 모양을 만들 수 있다.

<용어와 기호> 수직, 수선, 평행, 평행선, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 대각선, 다각형, 정다각형

<5-가 단계>에서는

① 직육면체와 정육면체의 성질

① 직육면체와 정육면체의 구성 요소를 알고, 여러 가지 성질을 찾아 낼 수 있다.

② 직육면체와 정육면체의 전개도를 그릴 수 있다.

② 공간 감각

① 여러 가지 모양으로 주어진 도형을 덮을 수 있다.

<용어와 기호> 직육면체, 면, 모서리, 꼭지점, 밑면, 옆면, 정육면체, 전개도

<5-나 단계>에서는

① 합동과 대칭

① 도형의 합동의 의미를 이해하고, 합동인 도형을 식별할 수 있다.

② 자와 컴퍼스를 이용하여 조건에 맞는 삼각형을 그릴 수 있다.

③ 선대칭도형이나 점대칭도형의 의미를 알고 그릴 수 있다.

<용어와 기호> 합동, 대칭, 선대칭도형, 점대칭도형

<6-가 단계>에서는

① 각기둥과 각뿔의 성질

① 각기둥과 각뿔을 이해하고, 구성 요소와 성질을 이해할 수 있다.

② 각기둥의 전개도를 그릴 수 있다.

② 공간 감각

① 주어진 모양을 보고 쌓기 나무로 만들 수 있다.

<용어와 기호> 각기둥, 각뿔

<6-나 단계>에서는

① 여러 가지 입체도형

① 원기둥과 원뿔을 알고, 구성 요소와 성질을 이해한다.

② 원기둥의 전개도를 이해한다.

③ 회전체를 이해한다.

<용어와 기호> 원기둥, 원뿔, 회전체, 회전축, 구

수학을 학습하는데 학습 내용에 대한 용어의 뜻을 잘 이해해야만 그 활용을 원활히 할 수 있다. 따라서 어느 단계에서 어떤 방법으로 용어의 뜻을 이해시켜야 하는 가는 효율적인 수학교육을 위하여 중요한 일이다.

그런데 위의 초등학교에서의 도형 부분에 대하여 살펴보면 경우에 따라서는 시기에 적합하

지 않게 엄밀한 용어 정의와 또 많은 양의 내용을 취급하고 있는 곳이 있다. 이를테면 <2-가 단계>에서 취급하는 용어 “선분”은 <2-가 단계>에서와 같이 엄밀하게 다루기는 좀 무리가 있지 않나 생각된다. 용어 “선분”의 정의는 <2-가 단계>에서 한번 나오는 것으로 끝나고 중학교 과정인 <7-나 단계>에서의 기본 도형에서 조차 새로운 정의 없이 선분의 영어 알파벳을 사용한 표현에서 간단히 언급하고 있는데 이러한 용어는 <7-나 단계>에서 다시 한번 더 정의하여 사용하도록 하는 것이 바람직할 것이다. 같은 용어라도 초등학교 아래의 단계에서는 용어의 정확한 정의보다는 그 시기에 이해할 수 있는 쉬운 어휘를 사용하여 이해하게 하고, 단계가 높아지면 그에 따른 용어의 사용과 그 용어의 정의를 정확하게 사용하는 것이 보다 교육에 효과가 있지 않을까 생각된다. 현행 제 7차 교육과정을 살펴보고 몇 개의 용어들은 예를 들면 용어 원, 평행선, 다각형, 대각선, 정다각형, 구 등은 중복되어 제시되었다. 곧,

<2-가 단계>의 <용어와 기호>에서 처음 나오는 용어 “원”은 다시 <3-나 단계>의 <용어와 기호>에서, <4-나 단계>의 <용어와 기호>에서 처음 나오는 용어 “평행선, 다각형, 대각선, 정다각형”과 <6-나 단계>의 <용어와 기호>에서 처음 나오는 용어 “구”는 <7-나 단계>의 <용어와 기호>에서 다시 중복되어 제시되었다. 어떤 특별한 이유가 있어서 <2-가 단계>의 <용어와 기호>에서 처음 나오는 용어 “선분, 직선, 삼각형, 사각형, 원, 꼭지점, 변” 중에서 용어 “원”만 중복 제시되었는지 모르지만 도형의 모양에서 본다면 용어 “삼각형, 사각형”도 같은 입장이고, 연령에 따른 이해의 수준을 생각한다면 용어 “선분, 직선, 꼭지점, 변”도 다시 중복 제시하는 것이 바람직하다고 생각된다. 같은 맥락에서 특정한 용어들은 적당히 중복 제시하는

것이 학습에 효과가 있을 것으로 생각된다.

앞에서 용어의 정의는 연령에 따른 이해의 수준을 고려하여 적당한 어휘를 사용하여 서술하는 것이 바람직하다고 언급하였지만 그 내용에는 일관성이 있어야 한다.

그런데 현행 교과서에서 “선분”의 정의를 살펴보면 초등학교에서의 정의와 중학교에서의 사용이 서로 다르게 되어 있어 생각을 요한다. 곧 초등학교에서는

「두 점을 끈게 이은 선을 선분이라고 합니다. 점 G, L 을 이은 선분을 선분 GL 이라고 합니다. 선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 끈은 선을 직선이라고 합니다. 점 G, L 을 지나는 직선을 직선 GL 이라고 합니다.」

와 같이 선분을 정의하고 그것을 사용하여 직선을 정의했고, 중학교에서는 모든 교과서에서 다음과 같이 직선을 사용하여 양 끝점의 부분이 A, B 인 선분을 정의하였다.

「직선 AB 에서 양 끝점의 부분이 A, B 인 직선의 부분을 선분 AB 라하고 기호로 \overline{AB} 와 같이 나타낸다.」

특히 중학교의 대개의 교과서에서는 직선의 정의는 서술하지 않고 있으며, 일부 교과서에서는 “끈게 그려진 선이 직선이다”(박규홍 외, 2001)와 같이 특별한 정의 없이 서술된 도서도 있다.

우리 나라와 체계가 비슷한 일본의 杉山吉茂 외(2002)가 집필한 교과서 新しい算數에서 다루고 있는 다음 내용을 살펴보면,

1학년과 2학년 상 과정까지는 기하를 다루지 않는다. 그리고 2학년 하에서 우리 나라에서는 <2-가 단계>에서 다루는 내용의 일부인 삼각형,

사각형을 이해하는 것만 간단히 다루었고, 이때 직선의 정의 없이 삼각형, 사각형을 직선으로 둘러 쌓인 도형 곧 직선 3개, 4개로 둘러싸인 도형으로 이해시키고 있다.

3학년 상에서는 삼각자를 이용하여 직각을 이해하게 하고, 직사각형의 뜻과 변, 꼭지점을 이해하게 하였고, 정사각형, 직각삼각형과 삼각형에서의 변, 꼭지점도 이해하게 하였는데 이들은 우리나라의 <2-가 단계>에 있는 내용들과 <3-가 단계>에 있는 내용들의 일부이다. 일본 교과서에는 3학년 하 과정에서는 상자를 만들고 면을 알게 하고 펼친그림을 이용하도록 하는데 우리나라는 원의 구성 요소와 공간 감각으로 거울을 사용하여 거울에 비치는 상을 다양하게 만들어 관찰할 수 있게 하였다.

4학년 상에서는 우리나라 <3-나 단계>에서 다루는 원과 원의 중심, 원의 반지름, 지름을 알게 하고, 우리나라 <6-나 단계>에서 다루는 구와 구의 중심, 반지름, 지름을 알게 하였다. 또 이등변삼각형, 정삼각형을 알게 하고, 이등변삼각형을 그려보게(작도)하였으며, 각과 각의 변, 꼭지점을 이해하게 하였으며, 여기서 이등변삼각형은 두 개의 각, 정삼각형은 세 개의 각이 같음을 알게 하였다.

그리고 회전각을 이용하여 각의 크기를 알아보고, 직각을 90등분한 각이 1도임도 알게 하며, 따라서 1직각은 90° 임을 알게 하였지만 우리나라에서 다루는 예각, 둔각, 예각삼각형, 둔각삼각형, 내각은 취급하지 않고 있다.

4학년 하에서는 도형에 관한 내용 취급이 없고, 5학년 상에서는 우리나라의 <4-나 단계>에서 다루고 있는 수직과 평행의 관계를 한 직선에 수직인 두 직선은 평행이라고 하여 평행인 경우를 알게 하고, 평행인 직선은 어느 곳에서도 폭이 같고, 서로 만나지 않으며, 평행선들과 다른 직선이 만날 때 이루는 각은 모두 같다고 하였으며 이 경우의 예제 문제를 주어 각도의 관계를 알아보게 하였다. 우리나라에서는 한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않는다고 하고, 이와 같이 서로 만나지 않는 두 직선을 평행이라고 한다고 하고 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다고 하였다.

그리고 활동을 통하여 평행선 사이의 선분 중에서 수직인 선분의 길이가 가장 짧고 그 선분의 길이는 모두 같음을 아는 것으로 한 후에 평행선과 한 직선이 만날 때 생기는 같은 쪽, 반대쪽의 각의 크기를 각각 각도기로 재어 비교하여보게 하였다. 우리나라에서 다루고 있는 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 대각선을 다루고 있지만, 다각형, 정다각형에 대하여는 다루고 있지 않다. 특히 평행사변형은 마주보는 변의 길이가 같고, 마주보는 각의 크기도 같으며, 마름모도 마주 보는 변이 평행하고, 마주 보는 변의 길이도 같다고 하였다.

5학년 하에서는 우리나라와는 달리 삼각형의 세 각의 크기의 합은 180° 임을 뜯어 붙히기로 알게 하고, 4각형의 네 개의 각의 크기의 합은 360° 임을 알게 하였다. 그리고 이곳에서 5각형, 6각형과 다각형의 뜻을 알게 하였으며, 우리나라에서는 <6-나 단계>의 측정에서 다루는 원주를 정의하고, 원주율과 원의 넓이를 알아보았다.

6학년 상에서는 도형에 관한 내용 취급이 없고, 6학년 하에서는 우리나라의 <5-가 단계>에서 다루는 직육면체와 정육면체에 관하여 다루고 있으며, 상자의 전개도, 평면의 뜻도 알게 하였다. 겨냥도를 알게 하고, 육면체에서 면과 변의 수직, 평행에 관하여도 알게 하였다. 또 우리나라의 <6-가 단계>와 <6-나 단계>에서 취급하는 입체도형의 일부로 각주의 뜻을 알고, 그 밑면, 옆면을 알게 하였으며, 원주의 뜻과 그 밑면, 옆면에 대하여도 알게 하였다.

위의 내용을 종합해보면 일본 교과서 보다 일반적으로 우리나라의 교과서가 많은 내용을 일찍 다루고 있는 것을 알 수 있고, 우리나라의 현행 도형에 관한 초등학교 과정에서의 내용은 일본에 비해 양이 좀 많으며, 연령 수준보다는 엄밀한 내용 도입이 있고, 한번 취급된 내용의 반복이 약해 한번 학습에 결손이 생기면 계속 그 결과에 따른 영향으로 다음 학습에 장애가 이어지고 회복할 기회가 없다. 이러한

현상은 다른 학과목과 달리 내용의 체계가 중요한 수학에서 그 후유증이 클 수밖에 없고 수학교육에 큰 문제점이 될 수도 있다.

2. 중학교 과정

이제 제 7차 수학과 교육과정에서 중학교의 도형 부분을 제시하고, 그 중에서 <7-나 단계>의 일부분을 살펴보면 주로 평행선에 관련된 사항과 그들에 대한 일본, 미국의 교과서와의 내용과, 그리고 유클리드 원론에서의 해당 내용까지와 비교하여 살펴본다. 교육과정에서 제시한 학습 내용은 다음과 같다.

<7-나 단계>에서는

① 기본도형

① 점, 선, 면, 각에 대한 간단한 성질을 이해한다.

② 점, 직선, 평면의 위치 관계를 알아본다.

③ 평행선의 성질을 이해한다.

② 작도와 합동

① 간단한 도형을 작도할 수 있다.

② 합동인 도형의 간단한 성질을 알아본다.

③ 삼각형의 합동조건을 알아본다.

③ 평면도형의 성질

① 다각형의 성질을 알아본다.

② 원에서 중심, 중심각, 부채꼴, 호, 현의 뜻을 알고, 중심각과 호의 관계를 알아본다.

③ 원과 직선의 위치 관계를 알아본다.

④ 입체도형의 성질

① 다면체에 대하여 알아본다.

② 회전체의 성질을 알아본다.

<용어와 기호> 교점, 반직선, 교선, 평행선, 꼬인 위치, 두 점 사이의 거리, 중점, 수직이등분선, 직교, 수선의 발, 교각, 맞꼭지각, 엇각, 동위각, 평각, 작도, 외각, 대변, 대각, 다각형, 대각선, 정다각형, 삼각형의 결정조건, 삼각형의 합동조건, 대응, 호, 현, 중심각, 부채꼴, 활꼴, 할선, 접선, 접점, 접한다, 다면체, 각뿔대, 정다

면체, 원뿔대, 구, 모선, $\overline{PQ} \parallel m$, $\overline{AB}, \overline{AB}, \angle AOB, \angle R, \overline{AB} \perp \overline{CD}, \triangle ABC, \equiv, \overline{AB}$

<8-나 단계>에서는

① 삼각형과 사각형의 성질

① 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명할 수 있다.

② 도형의 닮음

① 도형의 닮음의 뜻을 안다.

② 닮은 도형의 간단한 성질을 알아본다.

③ 삼각형의 닮음조건을 이해한다.

③ 닮음의 응용

① 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 증명하고, 이를 활용할 수 있다.

② 삼각형 중점연결 정리를 증명하고, 이를 활용할 수 있다.

③ 닮음비를 이용하여 닮은 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

<용어와 기호> 명제, 가정, 결론, 역, 정의, 정리, 증명, 외심, 외접, 외접원, 내심, 내접, 내접원, 닮음, 닮음비, 닮음의 중심, 닮음의 위치, 삼각형의 닮음조건, 중선, 무게중심, $\square ABCD, \infty$

<9-나 단계>에서는

① 피타고라스의 정리

① 피타고라스의 정리를 알고 이를 증명할 수 있다.

② 피타고라스의 정리의 활용

① 피타고라스의 정리를 간단한 도형에 활용할 수 있다.

③ 원과 직선

① 원에서 현에 관한 성질을 이해한다,

② 원의 접선에 대한 성질을 이해하고, 이를 증명할 수 있다.

④ 원주각

① 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

② 원에 내접하는 사각형의 성질을 알 수 있다.

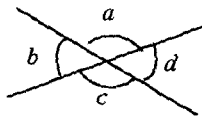
③ 원과 비례에 관한 성질을 이해한다.

<용어와 기호> 접선의 길이, 원주각, 내대각

위의 교육과정에 따른 현행 교과서에서의 기하 부분의 내용 중 일부를 살펴보자.

우선 모든 교과서가 기본 도형의 취급으로 점, 선, 면을 알아보면서 용어 교점, 교선을 정의하고, 직선, 반직선, 선분에 대하여 알아보면서 반직선, 두 점 사이의 거리, 선분의 중점을 정의하였다. 앞에서 언급한 것이기는 하지만 일부 용어가 초등학교의 저학년에서 취급된 것이고, 이들은 너무 오래전에 나왔던 용어들이므로 다시 반복하여 용어 정의를 하여주는 것이 좋으리라 생각된다.

특히 증명에 관한 내용은 교육과정에 의하면 <8-나 단계>에서 취급하도록 되어 있는데 실제로는 <7-나 단계>에서 암암리에 취급되고 있으며 이는 수학이라는 학문의 체계상 문제가 있다고 생각된다. 이를테면 맞꼭지각에 대하여 다음 사실을 증명하였다. 곧, 맞꼭지각 $\angle a, \angle c$ 와 $\angle b, \angle d$ 에 대하여 $\angle a = \angle c$ 이고 $\angle b = \angle d$ 임을 $\angle a + \angle b = 180^\circ$, $\angle b + \angle c = 180^\circ$ 와 $\angle b + \angle c = 180^\circ$, $\angle c + \angle d = 180^\circ$ 를 이용하여 보였다.



이 맞꼭지각의 성질 증명은 다음의 평행선의 성질에서 사용을 하고 있다. 그러나 평행선과 만나는 직선이 이루는 각들과 평행선 사이의 관계는 아주 직관적인 취급을 하므로 이곳에서 이들 내용들을 일률적으로 다루어야 하는가는 생각해볼 일이다.

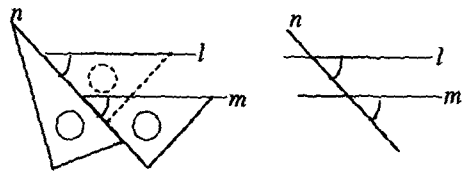
평행선은 아래의 경우와 같이 두 개의 삼각자를 이용하여 그린 선들 아니면 공책에 그려진 선 또는 모눈종이의 선들을 사용하였는데 이들이 평행하다는 것을 밝힐 아무런 자료도 없다. 특히 아래의 그림과 같이 두 개의 삼각

자를 이용한 경우, 바꾸어 생각하면 동위각이 같게 그린 두 직선 l, m 을 평행하다고 한 것이므로 평행선의 성질로 동위각이 같다고 하는 것은 결국 같은 내용의 순환적 취급이다

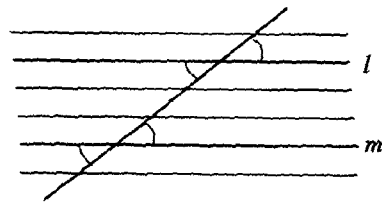
그리고 공책 또는 모눈종이의 선도 그들이 평행하다고 생각하고 각의 크기를 비교하는 것은 아주 직관적인 취급이다. 실제로 이와 같은 취급은 초등학교 과정에서 이미 비교 확인한 것이기도 하다.

평행선의 성질에서는 우선 평행선과 동위각과의 관계를 알아보고 맞꼭지각을 이용하여 엇각이 같음을 보였다.

그 방법은 우선 다음과 같이 삼각자 두 개를 이용하여 보이는 방법을 택한 교과서가 있고, (강욱기 외, 2001; 강행고 외, 2001; 금종해 외, 2001; 배종수 외, 2001; 신항균 외, 2001; 양승갑, 2002; 이영하, 2002; 조태근 외, 2001황석근, 2001)



다음과 같이 공책 또는 모눈종이에 그려진 선을 이용하여 보이는 방법을 택한 교과서가 있다. (고성은 외, 2001; 박규홍 외, 2001; 박윤범 외, 2001; 이영하, 2002; 이준열 외, 2001)



위의 내용을 다시 두 가지 관점에서 생각해 보면 우선 <7-나 단계>에서 위의 내용을 취급하는 것이 어떤 의미가 있는 것인가와, 위와 같은 취급의 결과를 <8-나 단계>의 증명에서 이들 내용을 이미 알려져 있는 옳은 사실들로 사용하는 것이 바람직한가이다.

이미 알려져 있는 옳은 사실들에 대한 취급이 상당히 허술하게 취급된 상태에서 그들을 증명에 활용한다는 것은 증명의 근본에 문제점을 일으키는 것은 아닌가?

중학교 과정에서의 수준을 생각하여 그 처리를 직관적으로 하는 것으로 한정한다면 오히려 알려져 있는 사실로 받아드리도록 하는 것이 바람직하지 않나 생각된다. 그렇게 하면 밝힌 결과가 아니므로 오히려 그 활용에는 큰 문제가 없을 것이다.

이 경우에 평행선과 각과의 관계는 초등학교에서 이미 간단히 조사하였으므로 <7-나 단계>에서 다루어야 할 특별한 이유는 없는 것 같다. 오히려 증명을 다루는 <8-나 단계>에서 증명을 다루기 전에 취급하는 것이 그 활용에 더 직접적이고 바람직하지 않나 생각된다.

한편 교육의 다양성을 고려한다면 삼각형의 외각에 대한 정리와 평행선 공준을 사용하여 논리적으로 증명하여 정리로 사용하는 것이 바람직할 것이다.

이는 수학사적으로 평행선 공준에 대한 연구의 결과가 수학의 발전에 얼마나 큰 영향을 미쳤는가를 생각한다면 그 중요성에 비해 대학교 이전에 한번도 평행선의 성질을 논리적으로 생각할 기회가 없는 수학교육에 한 다른 방향을 제시할 계기가 될 수도 있다.

III. 유클리드 원론과의 비교

Howard Eves(1964)는 “공리적 방법을 사용하여 처음으로 광범위하게 수학을 전개한 보기로 현재 우리에게 전해지고 있는 책은 매우 훌륭하고 역사적으로 중요한 유클리드의 원론이다. 이 책의 출현은 수학 사상사와 수학의 체계화에 있어서 최초의 거대한 획기적인 사건으로 받아들여지며, 그 이후 과학적 사고에 끼친 영향은 아무리 과장해도 지나치지 않는다. 유클리드의 원론을 형성하고 있는 13권에는 전체적으로 465개의 정리가 실려있고, 이 정리 중의 많은 부분은 기하학이 아니라 수론과 초등 대수학에 관한 것이다. 제 1 권은 필수적이고 예비적인 내용과 함께 합동, 평행선, 직선으로 이루어진 도형 등을 포함하고 있고, 2권은 기하적 대수학, 3권은 원, 4권은 정다각형의 작도에 각각 충당되었다. 5권과 6권은 에우독소스의 비율 이론과 그것의 기하학에의 응용을 포함하고 있고 7, 8, 9권은 초등 수론을 다루고 있으며, 10권은 무리수 연구에 충당되었고, 나머지 3권은 입체기하학을 고려하고 있다.”고하였고, 또 “유클리드의 공리는 현대 수학의 입장에서 보면 불완전하기 때문에 그와 같은 공리계를 바탕으로 하여 증명을 지도하는 것은 바람직하지 않은 것인가, 아니면 이천년 이상 자연스럽게 사용되어 왔던 것으로 중등학교 학생들의 지적 수준에서는 그 정도로 만족할 수 있는 것이 아닌가하는 이론이 있으므로 중등학교 수학에서 유클리드 기하학을 공준적 방법으로 다루는 것이 현명한지 아닌지는 교육적 관점의 문제이다. 1940년에 하버드 대학교의 교수 버코

프와 비틀리는 중등학교에서 가르칠 수 있는 과정의 유클리드 평면기하를 선분과 각의 크기를 측정할 수 있는 능력에 근거한 다섯 가지 공준으로 부터 유도하였다. 20세기 중반 이후에 많은 저자와 저술 집단이 공준적 기초로부터 엄밀하게 전개된 기하학을 중등학교 기하학 교재에 구현해 보려는 연구가 시도되었다.”고 하였다.

이제 현행 교과서에서 다루고 있는 내용의 일부를 유클리드 원론의 내용에서 알아보자.

유클리드의 원론은 그 형식 체계가 중요한데 제 1권은 23개의 정의로 시작하고 있다. 이들 정의는 대부분 초등학교와 중학교 과정에서 사용되고 있으며, 그리고 5개의 공준 중 평행선의 공준을 제외한 나머지 공준과 5개의 공리들은 일부는 성질로 일부는 아무런 언급 없이 당연한 것으로 암암리에 사용되고 있다.

그 후에 1권에서는 48개의 명제를 증명하였는데 이들을 우리나라와 비교하며 간단히 살펴보면 다음과 같다. 이 중에서 명제 1 곧 정삼각형의 작도, 명제 2 곧 한 점을 끝점으로 하는 같은 길이의 선분 그리기, 명제 3 곧 긴 선분에서 짧은 선분 잘라 내기는 우리는 작도에서 당연히 할 수 있는 것으로 취급하고 있고, 명제 4, 명제 8, 명제 26은 삼각형의 합동에 관한 것으로 우리는 삼각형의 합동 조건으로 취급하고 있으며, 명제 5 곧 이등변삼각형의 성질과, 그 역의 명제 6은 우리는 대개 정리로서 취급하고 있다. 명제 7 곧 한 삼각형의 절정은 우리는 당연한 것으로 받아들이고 있고, 명제 9 곧 각의 이등분, 명제 10 곧 선분의 이등분, 명제 11 곧 한 직선 위의 점에서 수선 긋기, 명제 12 곧 한 직선 밖의 점에서 그 직선에 수선 긋기도 우리는 작도에서 작도 문제로 다루고 있다. 명제 13 곧 한 직선에 다른 직선을 세울 때 두 각의 합, 명제 14 곧 두 각의 합이 두

직각인 경우 한 직선을 이룸을 우리는 당연한 것으로 취급하고, 명제 15 맞꼭지각의 크기가 같음은 우리도 증명을 하고, 명제 16 곧 삼각형의 외각의 크기가 이웃하지 않은 두 내각의 크기보다 크다는 것을 우리는 그와는 조금 다른 명제 한 외각의 크기가 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같음을 결국 평행선 공준을 이용한 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 보인 것을 이용하여 보이고 있어 미국의 교과서에서 명제 16의 내용을 평행선 공준의 사용 없이 그대로 증명하는 것과는 다르다. 명제 17 곧 삼각형의 두 안각의 합이 두 직각보다 작다, 명제 18 곧 삼각형의 긴 변에 대응하는 안각이 짧은 변에 대응하는 안각보다 크다, 명제 19 삼각형의 큰 안각에 대응하는 변이 길다. 명제 20 삼각형의 두 변의 합은 나머지 한 변보다 길다, 명제 21 곧 삼각형의 안에 있는 점과 꼭지점을 이은 두 선분의 길이의 합과 원래 삼각형의 두 변의 길이의 합의 크기 관계는 우리는 당연한 사실로 받아들이고 있다.

명제 22 곧 세 선분으로 삼각형을 만들기, 명제 23 곧 주어진 각과 같은 각을 만들기도 우리는 작도에서 당연히 작도할 수 있는 것으로 취급하고 있다. 명제 24 곧 대응하는 두 변이 같은 삼각형에서 끼인각의 크기에 따른 나머지 변의 길이와 그 역인 명제 25를 우리는 당연한 사실로 받아들이고 있으며 특별한 언급이 없다.

명제 27 곧 두 직선이 있는데, 다른 한 직선을 그들과 만나도록 그었다고 하자. 이 때 생기는 엇각들의 크기가 같으면, 두 직선은 서로 평행하다와 명제 27에서 엇각을 동위각, 동측 내각의 경우로 바꾼 명제 28, 그리고 이들 명제 역인 명제 29에 대하여 우리는 증명 없이 직관적으로 처리하고 있다. 명제 31 곧 한 점과 직선을 주었을 때, 그 점을 지나고 주어진

직선과 평행한 직선을 그을 수 있다는 것은 우리는 작도에서 다루고, 앞의 평행선에 관한 명제들을 사용하여 명제 32 곧 삼각형의 한 변을 길게 늘여서 생기는 외각의 크기는 다른 두 내각을 더한 것과 같다. 따라서 삼각형의 세 내각을 더하면 직각을 두 개 더한 것과 크기가 같다는 사실은 우리도 증명을 하였다.

위의 비교 내용을 살펴보면 현행 우리나라의 교과서에서는 유클리드 원론 1권의 앞에서부터 평행선 및 삼각형의 내각의 합까지 다룬 증명된 32개의 명제 중에서 6 개를 증명하고 있다. 물론 앞의 32개의 모든 명제를 증명한다는 것은 증명자체 뿐만 아니라 연령에 따른 지적 수준에 맞추어서도 문제가 있다. 그러나 이들 중 일부는 증명을 하여 사용하는 것이 오히려 도움이 될수도 있다고 생각된다.

IV. 외국교과서와의 비교

1). 藤田 宏 외(1998)의 일본 교과서를 살펴보면 新しい數學 1에서는 선분, 반직선, 수선을 정의하고, 그 표현 방법을 보였으며, 각의 표현 $\angle AOB$, 두 직선의 평행 표현 $AB \parallel CD$ 를 제시하였고, 원에서 호와 현을 정의하고 그 표현을 제시하였다. 그리고 수선을 작도하는 방법을 알게 하고, 점과 직선 사이의 거리를 정의했으며, 선분의 중점, 선분의 수직이등분선의 뜻을 알게 하고, 수직이등분선을 작도하게 하였다. 특히 한 평면 위에 있는 서로 만나지 않는 두 직선을 평행이라 하고 평행한 직선을 평행선이라 하였다. 각의 이등분선의 뜻을 알게 하고, 그 작도도 다루었다 그리고 도형의 이동으로 평행이동, 회전이동, 대칭이동을 다루었다. 공간 도형에서는 직선이랑 평면의 위치 관계를 알아보고, 공간에서의 평면도형의 이동, 모선과

회전체, 평면과 평면의 수직, 투영도, 입체의 단면, 다면체를 간단히 다루었다.

그리고 新しい數學 2에서는 우선 평행과 합동에서 평행선과 각을 다루면서 다각형의 내각과 외각의 합을 알아보았고, 맞꼭지각을 정의하고 그 크기가 같음을 보였으며, 두 직선과 만나는 직선을 생각하여 동위각, 엇각을 정의하였다.

특히 평행선과 동위각에 대하여 삼각자 두 개를 이용하여 평행선을 긋고 동위각을 알게 하고 “한 직선 n 에 대하여 동위각이 같게 두 직선 l, m 을 그으면 l, m 은 평행하다. 또, 평행선 l, m 과 만나는 한 직선 n 을 그으면 동위각은 같게 된다.”고 하였다. 그리고 평행선과 엇각의 관계를 맞꼭지각을 사용하여 규명하였다. 그 후 “삼각형의 내각의 합은 180° 이다”를 증명하였다.

합동인 도형을 정의하고, 삼각형의 합동조건을 알아보았으며, 각의 이등분 작도를 다루었다. 그리고 가정 결론을 사용하여 증명을 하게 하고, 증명의 근거로 사용하는 것들로 맞꼭지각의 성질, 평행선과 각의 성질, 삼각형의 내각과 외각의 성질, 합동인 도형의 성질, 삼각형의 합동조건을 열거하고, 그 외에 등식의 성질, 면적과 체적의 공식, 다각형의 내각의 합의 공식을 사용하면 좋다고 하였다.

이상을 살펴보면 일본 교과서는 우리나라의 교과서와 달리 중학교 1학년에서 도형의 이동에 대하여 다루고 있음을 알 수 있다. 그리고 일본 교과서에는 맞꼭지각의 크기가 같다는 사실이나 평행선의 성질을 모두 증명을 다루기 전의 중학교 2학년 교과서에서 취급하고 있다. 우리나라와 비슷한 방법으로 취급을 하기는 하지만 이와 같이 증명에 관련된 내용들은 중학교 1학년 과정에서는 취급하지 않은 것을 알 수 있다.

2), 미국 교과서로는 6-8학년으로 제시된 교과서와 몇 종의 기하 교과서를 살펴보기로 한다. 우선 National Council of Teachers of Mathematics(2000)에서 제시한 6-8 학년의 학생들의 기하 교육에 대한 기대로 들은 것은 다음과 같다.

- 정의의 성질을 사용하여 2차원과 3차원 대상물들의 유형 사이에서 관계를 정확하게 서술하고, 분류하고, 이해해야만 하고,
- 각, 변의 길이, 둘레, 넓이, 닮은 대상들의 부피 사이에서 관계를 이해해야만 하고,
- 합동, 닮음, 그리고 피타고라스의 관련사항들과 같은 기하학적인 사고와 관계에 관한 귀납적, 연역적 논증을 창조하고 분석해야 하고,
- 기하 도형의 성질을 조사하고 나타내기 위하여 좌표기하를 사용해야하고,
- 정다각형이나, 평행 또는 수직인 변을 갖는 도형과 같은 특별한 기하 도형을 조사하기 위하여 좌표기하를 사용해야 하고,
- 뒤집기, 돌리기, 밀기, 확대 축소와 같은 변환 아래 도형의 크기, 위치, 방위를 서술해야 하고.
- 변환을 사용한 대상들의 합동, 닮음, 선대칭 또는 회전대칭을 조사해야 하고,
- 변의 길이와 각의 크기와 같은 특정한 성질을 갖는 기하학적 대상을 그려야 하고,
- 표면적과 부피를 포함하는 것들과 같은 문제들을 풀고 나타내기 위하여 3차원 대상물에 대하여 2차원 표현을 사용해야하고,
- 문제를 풀고 나타내기 위하여 네트워크와 같은 시각도구를 사용해야하고,
- 수적인 것과 대수적인 것의 관계를 나타내고 설명하기 위하여 기하적 모형을 사용해야 하고,
- 예술, 과학, 일상생활과 같은 수확습 밖의 영역에서 기하학적인 사고나 관계를 깨닫고 활용해야한다.

이제 Randall I. Charles 의(1998)의 6-Grade 교과서 middle school math course 1 의 기하 부

분을 살펴보면 다음과 같다. 제 8 장 다각형에서는 선의 분류에서 직선, 선분, 반직선, 교선, 수직, 평행(직선을 아무리 멀리 확장해도 만나지 않으면 평행이라고 한다.)을 정의하고, 각의 분류에서 각, 각의 변, 각의 꼭지점, 예각 직각, 둔각, 평각을 정의하고, 각의 측정에서 도, 여각, 보각을 정의하고, 각도기를 소개하였다. 삼각형과 예각, 직각, 둔각삼각형과 정삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형을 정의하였다. 다각형에서 변의 수에 따른 4각형, 5각형, 6각형, 8각형을 소개하고 정다각형을 정의하고, 여러 가지 사각형에서 사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형을 소개하고, 그 관계로 사다리꼴 → 사각형, 정사각형 → 마름모 → 평행사변형 → 사각형, 정사각형 → 직사각형 → 평행사변형 → 사각형을 제시하였다.

변환에서 합동, 선대칭, 반사를 소개하고, 회전(시계와 같은 방향, 반대 방향), 이동(slide or translation), 모자이크식 포장(tessellation)에 대하여 간단히 소개하였다. 제 8장 입체도형과 측정에서는 입체도형, 면, 모서리, 다면체, 각기둥, 밑면, 각뿔, 구를 정의하고, 그 보기를 들었고, 이들 중 각뿔, 각기둥, 원기둥의 겹넓이와 각기둥의 부피를 다루었다.

7-Grade에 해당하는 middle school math course 2의 5장 기하에서는 각에서 반직선, 각, 꼭지점, 예각, 직각, 둔각, 평각을 정의하고, 보각, 여각, 각의 합동, 각의 이등분, 각의 이등분선을 다루고, 평행선과 수선에서는 평면, 평행, 횡선(transversal), 동측 내각, 동위각, 맞꼭지각, 선분의 중점, 합동인 선분, 선분의 이등분선, 수선, 수직이등분선에 대하여 다루었는데 여기서 평행선이 한 횡선과 만나면 동위각, 엇각, 맞꼭지각이 같다고 하여 활용하였다. 삼각형과 사각형에서 사각형을 다시 정의하고 여러 종류의 사각형사이의 관계를 보였으며, 뜯어 붙이

기로 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 보였고, 다각형에서는 다각형, 정다각형의 정의를 하였다. 정사각형과 제곱근을 다루었고, 피타고라스의 정리를 결과만을 알려 간단히 활용하였고, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴의 넓이를 다루었다. 11장의 입체, 원, 변환에서는 우선 입체도형, 면, 다면체, 모서리, 꼭지점, 각기둥, 밑면, 각뿔을 정의했고, 겨냥도와 투영도를 다루었으며, 입체도형의 전개도를 사용하여 겹넓이를 구했고, 각기둥의 부피를 다루었으며, 원과 원기둥에서는 중심, 중심각을 정의하였고, 지름, 반지름, 원둘레와 원주율 π 를 정의했고, 원의 넓이와 원기둥의 부피를 다루었으며, 변환에서는 이동을 다루고 반사, 선대칭을 다루었고, 회전, 회전대칭, 점대칭을 다루었다.

끝으로 8-Grade에 해당하는 middle school math course 3의 8장에서는 지도에서의 절대위치, 상대위치를 다루었고, 선과 각에서 각, 각의 꼭지점, 선분, 반직선, 평각, 직각, 예각, 둔각, 보각, 여각을 정의하였고, 합동과 각의 이동분선을 정의했으며, 평행과 평행선에서는 평행, 수직, 수직이등분선, 횡선, 내각, 외각, 엇각, 동위각을 정의했고, 여기서 엇각의 경우에서만 횡선이 두 평행선을 가로지를 때 엇각은 합동이라고 하였다.

다각형, 다각형의 꼭지점, 정삼각형, 이동변삼각형, 부등변삼각형과 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형, 사다리꼴의 정의와 그들 사이의 관계를 나타냈으며, 볼록다각형과 오목다각형도 정의하였고 입체물의 3차원 보기도 간단히 다루었다.

11장의 닮음, 합동, 변환의 닮음에서는 닮음, 대응변, 닮음비를 다루었고, 합동에서는 합동인도형을 정의하여 간단히 다루고, 삼각형의 합동에서 변-변-변, 변-각-변, 각-변-각, 변-각-각의 경우를 설명 없이 들었고, 직각삼각형의 변의

이름과 삼각비를 다루었고, 간접측정도 간단히 다루었다. 변환에서는 우선 변환과 합동에서 변환, 반사, 회전, 회전의 중심, 회전각, 이동을 정의하여 다루었고, 변환과 닮음에 대한 것도 간단히 다루었다. 대칭에서는 대칭, 선대칭, 대칭축, 회전대칭, 점대칭을 간단히 다루고, 평면의 피복에 대한 것도 간단히 다루었다.

위에서 살펴본 결과는 이 교과서들은 우리나라의 교과서와 다루는 내용이 좀 다른 것도 있지만, 용어에 대하여 심할 정도로 그 정의를 학년이 바뀔 때마다 반복하여 제시하면서 학습 내용의 심도를 점차 조금씩 심화시켜 나갔음을 알 수 있다. 대개 어려운 내용의 취급보다는 주로 용어 정의에 대한 보기와 그 이해를 돕는 평이한 보기 문제들을 주로 취급하였고, 평행선의 성질과 몇몇 내용들 이를테면 피타고라스의 정리 등은 증명 없이 결과만을 제시하여 활용하고 있다.

James F. Ulrich(1987)의 교과서 HBJ GEOMETRY에서는 우선 점, 선, 평면, 선분, 반직선 등의 용어 설명으로 시작하여, 정의와 논리적인 계열, 공준과 정리, 선분들, 각에 대하여 다루고, 증명의 도입으로 대수적 성질과 증명, 조건과 연역적 추론, 연역적 추론과 증명, 2 열로 나타낸 증명, 수선에 관한 정리를 다루고, 다음으로 합동을 다루면서 삼각형의 세 합동 공준(SAS, ASA, SSS)에 대하여 다루었다. 이동변삼각형과 직각삼각형에 대하여 살펴보고, 기하에서의 간접증명과 대우, 쌍조건문에 대하여 다루었다. 그리고 평행선을 다루면서 평행선과 각과의 관계를, 삼각형의 내각의 합과 다각형의 내각의 합에 대하여 다루었다. 우리나라와 같이 평행선의 정의로 “평행선이란 서로 만나지 않는 같은 평면에 있는 직선들이다”라고 하였다. 또 평행선에 대한 성질들의 증명에 필요

한 다음과 같이 각도에 대한 공준 외각 부등 정리, 평행선 공준을 제시하고 그 증명을 아래와 같이 하였다.

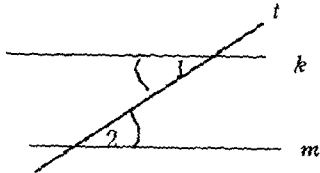
[각도기 공준] 각 각에 대하여 0과 180 사이의 오지 한 수가 대응한다. 이 수가 그 각의 크기이다. C 가 \overline{CA} 는 0에, \overline{CB} 는 180에 작지운 서로 반대인 두 반직선 CA, CB 의 끝점이라고 하자. P 가 같은 평면의 점으로 \overline{AB} 위에 있지 않고, n 이 $0 < n < 180$ 인 수 일 때 E 가 \overline{AB} 에 대하여 P 와 같은 쪽에 있고, \overline{CE} 가 n 에 작지워져 $m\angle ACE = n$ 인 반직선 CE 가 오직 하나 존재한다.

[외각 부등 정리] 삼각형의 한 외각의 크기는 그의 이웃하지 않은 두 내각의 어느 것보다도 크다.

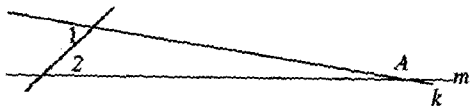
[평행선 공준] 주어진 직선 위에 있지 않는 한 점을 지나서 그 직선에 평행한 직선은 오직 하나뿐이다.

그리고 평행선에 대하여 다음 두 정리를 증명하였다.

[정리] 두 직선이 한 직선과 만나서 이루는 외각의 크기가 같으면 그 두 직선은 평행하다. 곧, 오른쪽 그림에서 $\angle 1 \cong \angle 2$ 이면, $k \parallel m$ 이다.



<증명> k 가 m 과 평행하지 않다고 가정하자.(아래 그림 참조)



k 가 m 과 평행하지 않다면, 그들은 어떤 점 A 에서 만난다.

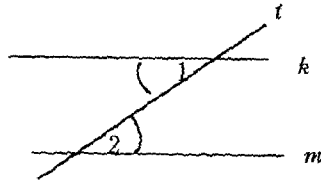
$\angle 1$ 은 직선 k, m, t 에 의하여 만들어진 삼각형의 한 외각이다.

따라서 삼각형의 외각 부등 정리에 의하여 $m\angle 1 < m\angle 2$ 이다.

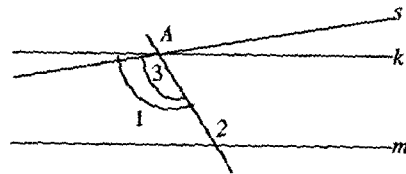
따라서 $m\angle 1 = m\angle 2$ 이고 $m\angle 1 \neq m\angle 2$ 이다. 이것은 모순이다.

k 가 m 과 평행하지 않다는 가정은 거짓이다. $\therefore k \parallel m$

[정리] 평행한 두 직선이 한 직선에 의하여 잘렸을 때, 그 외각은 서로 합동이다. 곧, t 가 횡단선 일 때 $k \parallel m$ 이면, $\angle 1 \cong \angle 2$ 이다.



<증명> $\angle 1 \not\cong \angle 2$ 라고 가정하자(아래 그림 참조)



각도기의 공준에 의하면, $\angle 3 = \angle 2$ 점 A 를 지나서 직선 t 와 직선 s 로 이루어진 인 각 $\angle 3$ 이 있다. 따라서 앞의 정리에 의하여 $s \parallel m$ 이다.

두 직선 s 와 k 가 점 A 를 지나며 m 과 평행하다. 이것은 평행선 공준에 모순이다.

$\angle 1 \not\cong \angle 2$ 라는 가정이 거짓이다.

$\therefore \angle 1 \cong \angle 2$.

이상에서 이 교과서는 엄밀한 증명을 위하여 증명에 필요한 전제 사항들을 취급하고, 우리나라와 달리 평행선과 외각의 관계를 엄밀하게

연역적 추론을 사용하여 밝혔음을 알 수 있다. 이와 같은 취급은 우리나라에서도 제시되는 교과서가 일부 있어 우수한 학생들의 논리적 사고 발달에 도움을 주었으면 한다.

H. Pearson, J. E. Lightner(1984)의 교과서 GEOMETRY를 살펴보면 다음과 같다.

제 1장 사고의 출발에서는 추론, 증명이란 무엇인가와 각도의 의미를 제 2장 점, 선, 면에서 처음의 공준과 정리, 거리, 선분과 반직선, 합동인 선분, 직선과 평면을 제 3장 각에서는 각의 서술과 명명, 각의 측정, 합동인 각과 각의 이등분선, 여각과 보각, 수선을, 제 4장 삼각형에서는 삼각형의 명명과 그 부분, 합동인 삼각형, SAS, ASA, SSS 공준의 활용, 삼각형 합동의 증명, 이동을 다루고 제 4장 평행선과 수선에서는 직선들과 횡선, 직선이 평행함을 증명하기 위하여 합동인 각의 사용, 각이 합동임을 증명하기 위하여 평행선을 사용하기, 수선과 평행선과 평면에 대하여 다루고 있다.

이 교과서에서는 위의 교과서 HBJ GEOMETRY에서는 증명을 한 명제

“같은 평면 위에 있는 두 직선과 한 횡선이 합동인 동위각의 쌍을 만들면 두 직선은 서로 평행하다.”

를 공준으로 하고, 그 활용으로 엇각이 같은 경우와 그 이외의 몇 경우에 평행임을 보였다. 그리고 평행선 공준 “한 주어진 직선 위에 있지 않은 점을 지나며 그 직선에 평행한 직선은 하나만 존재한다.”를 제시하고 교과서 HBJ GEOMETRY에서는 증명을 한 명제 “두 평행한 직선이 한 횡선과 만나면, 동위각은 합동이다.”도 공준으로 제시하고 그 활용을 하였다.

Harold R. Jacobs(1987, W H Freeman & Co)의 교과서 Geometry에서는 우서 1 장에서 연역적 추론의 본질을 다루면서 벤다이어그램을 사용하여 조건문, 동치명제를 나타내어 보고, 타당한 연역과 그렇지 않은 연역, 두 전제를 갖는 논증(삼단논법), 직접증명으로 여러 개의 전제를 갖는 논증에 대하여도 벤다이어그램을 사용하여 간단히 서술하였다. 그리고 간접증명과 연역적 체계에 대하여도 다루었다.

이와 같은 내용을 바탕으로 하여 2 장에서는 기본도형인 점, 선, 면에 대하여 다루었고, 3 장에서는 반직선과 각, 4 장에서는 합동삼각형, 5 장에서는 부등 관계 그리고 6 장에서 평행선에 대하여 다루었다. 특히 5장에서 외각 정리 곧, 「삼각형의 한 외각은 이웃하지 않은 어떤 내각보다도 크다.」를 증명한 후에 6장에서는 「두 직선이 한 직선과 만날 때, 동위각이 같으면 두 직선은 평행하다.」를 증명하였고, 다음에 평행선 공준을 제시한 후에 앞의 명제의 역 곧, 「평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때, 동위각은 같다.」를 증명하였다.

이상의 미국 기하 교과서를 전체적으로 살펴 보면, 이들 교과서는 우리 나라의 교과서와는 상당히 다름을 알 수 있다. 우선 미국의 교과서들은 증명을 위하여 증명 전에 그에 필요한 예비 사항들을 취급하여 증명을 하기 위한 논리적인 체계를 구축해 놓고 있다. 그리고 가능한 한에서 연역적 처리로 내용을 전개하고 있다.

특히 이 논문에서 중점적으로 살펴보고 있는 평행선에 관한 내용은 우리 나라의 경우와는 그 취급이 완전히 다름을 알 수 있다. 우리나라의 교과서에서 취급하는 방법은 실측에 의한

결과를 옳은 사실로 받아들여 그것을 정리로 사용하고 있는데 반하여 미국의 교과서는 엄밀한 증명을 하여 활용하던가 아니면 공준으로 받아들여 사용하고 있다. 증명을 하기 위하여든 아니면 공준으로 처리하든 간에 미국 교과서에서는 평행선 공준을 제시하여 사용하고 있는데 반하여 우리 나라의 교과서에서는 평행선의 공준을 제시하지 않고 암암리에 그 활용을 하고 있다.

V. 결 론

수학 교과서의 중요한 목표중의 하나는 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고, 합리적으로 해결하도록 하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 특히 논리적인 사고를 갖기 위해서는 연역적 처리 능력을 길러야만 한다. 이와 같은 연역적 처리를 위해서는 증명을 다루어야 하는데 우리 나라 수학에서 처음으로 증명을 취급하는 곳은 <8-나 단계>의 기하에서이다.

증명은 수학에서 매우 중요한 것이고, 따라서 그 도입은 신중하게 이루어져야 하며, 가능하다면 체계적으로 논리적 비약이 없이 전개되는 것이 바람직하다.

그러기 위해서는 우선 사용하는 용어들부터 가능한 한 완전히 이해하여 활용할 수 있게 해야만 한다. 그런데 우리 나라에서는 미국의 교과서들과는 달리 용어를 다시 반복하여 정의하는 것에 대하여 매우 인색하여 한 번 결손이 생기면 그 이해에 회복하기 힘든 문제점이 있다. 따라서 용어의 정의는 이해를 돕기 위해 가능한 한 반복하여 제시하는 것이 바람직하다.

그리고 앞에서 살펴본 바에 의하면 <7-나 단계>의 일부 내용들 곧, 맞꼭지각의 성질, 평행

선과 동위각, 엇각과의 관계 등은 <7-나 단계>에서 취급되는 것보다는 증명을 취급하고 있는 <8-나 단계>로 이동되는 것이 그 활용에 보다 바람직하다.

특히 교육의 다양성을 고려하여 평행선과, 그리고 그 평행선과 만나는 다른 직선에 의하여 만들어진 동위각, 엇각과의 관계는 아예 공준으로 받아들여 공준 취급을 하기도 하고, 일부 우수한 학생들을 위해서는 연역적 추론으로 완전한 증명을 하여 활용할 수 있도록 여러 종류의 교과용 도서를 만드는 것이 바람직하다.

또, 우수한 학생들을 위해서 유클리드 원론에 있는 명제 중 일부 곧, “삼각형의 긴 변에 대응하는 안각이 짧은 변에 대응하는 안각보다 크다”와 “삼각형의 큰 안각에 대응하는 변이 길다.”, “삼각형의 두 변의 합은 나머지 한 변보다 길다.”와 같은 명제는 그 증명을 생각해보는 것도 논리적 발달을 위하여 의의 있는 일 이 될 것이다.

참고문헌

- 강욱기 외 2인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주)두산.
- _____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주)두산.
- 강행고 외 9인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주)중앙교육진흥연구소.
- _____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주)중앙교육진흥연구소.
- 교육부(1997). **수학과 교육과정(제 7차 교육과정)**. 교육부.
- _____ (1999). **중학교 교육과정 해설(Ⅲ)(제 7차 교육 과정)**. 교육부.
- 고성은 외 5인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주)

- 블랙박스.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주) 금성출판사.
- 블랙박스.
김중해 외 3인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주) 고려출판.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주) 고려출판.
- 박규홍 외 7인(2001). **중학교 수학 7-나**. 두레 교육(주).
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. 두레 교육(주).
- 박윤범 외 3인(2001). **중학교 수학 7-나**. 대한 교과서.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. 대한 교과서.
- 배종수 외 7인(2002). **중학교 수학 7-나**. 한성 교육연구소.
_____ (2003). **중학교 수학 8-나**. 한성 교육연구소.
- 양승갑 외 6인(2001). **중학교 수학 7-가**. (주) 금성출판사.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주) 금성출판사.
- 이준열 외 4인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주) 도서출판 디딤돌.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주) 도서출판 디딤돌.
- 조태근 외 4인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주) 금성출판사.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. (주) 금성출판사.
- 황석근 외 1인(2001). **중학교 수학 7-나**. 한서 출판사.
_____ (2002). **중학교 수학 8-나**. 한서 출판사.
- 杉山吉茂 외(2002). *新しい算数 1, 2상, 하; 3상, 하; 4상, 하; 5상, 하; 6상, 하*. 東京書籍.
- 藤田 宏 외(1998). *新編 新しい數學 1, 2, 3*. 東京書籍
- Charles, R I. et al. (1998). *Middle school MATH course.1-course.3*. Scott Foresman Addison Wesley.
- Eves H. & Newsom C. V. (1964). *An introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics*, Holt. Rinehart and Winston
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Pearson H. & Lightner J. E. (1984). *Geometry*. GINN AND COMPANY
- Ulrich J. F. (1987). *Hbj geometry*. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.

A Note on Dealing with Some Contents of Geometry in the Middle School Mathematics

Kim, Heung Ki (Dankook university)

In this note we examined some terms, parallel lines and angles in elementary school mathematics and middle school mathematics respectively. Since some terms are represented early in elementary school mathematics and not repeated after, some students are not easy to apply the terms to their lesson. Also, since the relation between parallel lines and angles are treated intuitively in 7-th grade, applying the relation for a proof in 8-th grade would be meaningless. For the variety of mathematics education, it is desirable that the relation between parallel lines and angles are treated as postulate.

Also, for out standing students, it is desirable that we use deductive reasoning to prove the relation between parallel lines and angles as a theorem.

In particular, the treatments of vertical angles and the relation between parallel lines and angles in 7-th grade text books must be reconsidered. Proof is very important in mathematics, and the deductive reasoning is necessary for proof. It would be efficient if some properties such as congruence of vertical angles and the relation between parallel lines and angles are dealt in 8-th grade for proof.

* **Key words:** definition, terms(용어), deductive reasoning(연역적 추론), postulate(공준), proof(증명), vertical angles(맞꼭지각), parallel lines(평행선), corresponding angles(동위각), alternate interior angles(엇각),

ZDM분류 : G13

MSC2000분류 : 97C90