大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 14 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.1, 39-69. Feb 2004

일차함수 활용문제의 해결을 위한 강의식, 모델링, 과제기반 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석1)

이 종 희* · 김 부 미**

본 연구에서는 학생들이 일차함수의 활용단원을 학습할 때 여러 현상을 해석하고 다양한 수학적 표현을 사용하여 모델로 만들어 문제해결과정에 이를 적용할 수 있도록, 학생들의 표현에 대한 이전 경험과 현상을 해석하기 위한 표현 방법을 효과적으로 연결하는 학습-지도 방법을 분석하였다. 본 연구는 일차함수를 학습한 8학년 학생들을 대상으로 일차함수 단원을 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 세분화하여 각각에 대한 학생들의 오류를 분석한 다음, 일차함수의 활용 단원을 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습, 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습을 실시하였다. 연구 결과, 강의식 학습 방법보다는 모델링 관점과 과제기반 학습이 표현변환의 유연한 연결성 및 일차함수에 대한 각 과제별 오류교정과 질적 함수에 대한 해석 능력에서 효과적이었다. 모델링 관점과 과제기반 학습의 경우는 모두 표현변환의 유연한 연결을 교수하는데 효과적이었으나, 질적 함수의 해석 능력에서는 모델링 관점의 학습이 보다 효과적이었다.

Ⅰ. 서 론

수학교육의 목표 중 하나는 수학의 내·외적인 제현상을 함수로 조직할 수 있는 함수적 사고능력과 태도의 개발이라 할 수 있다. 복잡하게 변화하는 현상의 패턴이나 규칙성을 표, 그래프, 대수식 등을 사용하여 서술하고, 이에 대한 참·거짓을 설명하며 다른 현상을 예측하는 것은 함수적으로 사고하는 데 중요한 요소가 된다. 학생들이 제현상을 해석하고 다양하게 표현변환을 할 수 있도록 하는 것은 학교 수학의 함수개념 교수와 관련이 있다. NCTM(2000)에서는 함수학습의 목표로, 주어진 상황을 해석하여 대수 방정식의 형식을 넘어 질적 정보를 양화하는 것에서부터 그래프적 방법에 이르는 수학화 과정을 다양하고 유창하게 표현할 수 있어야 한다고 강조한다. 이는 주변의 함수적 현상을 해석하고 다양하게 표현하여 모델을 만들고 문제해결과정에서 이를 적용할 수 있도록 지도해야 함을 의미한다.

이에 부응하여 7차 교육과정에서도 현실적인 변화 상황을 기술하고 해석하고 예측하기 위한 도구로서 함수를 지도하기 위하여 함수의 활용 단원이 구성되어 있다. 이 때, 교과서에는 일상생활과 관련된 문제 상황이 먼저 제시되고 이를 대수식으로 나타내는 활동을 하도록 구성되어 있다. 그러나, 문제의 내용은 함수적 지식을

---

* 이화여자대학교, jonghee@mm.ewha.ac.kr
** 이화여대대학원, bumi71@ewha.ac.kr
1) 이 논문은 2002년도 한국 학술진흥연구재단의 지원(KRF-2001-005-C00018)에 의하여 이루어졌음

학생 스스로 구성하도록 한다기보다는 가르치기 위한 문맥이 대부분이다. 그 문제의 해결과정도 문제에 내재된 규칙성을 대응표, 화살표 다이어그램 등을 사용한 뒤 대수식과 같은 기호적 표현으로 번역하고 이를 그래프 표현으로 번역하는 순서로 주로 구성된다. 그런 다음 학생들은 유사한 함수적 현상에 대한 문제를 앞서 해결했던 것과 같은 방법으로 풀어보는 연습을 한다.

이러한 학습의 결과, 정영옥(1997), 우정호(1998), 정인경(2002), 이종희와 김부미(2003) 등에 의하면, 학생들은 함수적 상황을 기호적 표현 양식인 대수식으로만 번역하려고 하며 그래프나 언어적 표현 등의 다양한 표현들로 번역하는 것은 문제해결의 보조수단에 불과하다고 생각하는 경향이 강하기 때문에, 함수의 활용 문제를 해결할 때 많은 오류를 범한다. 또한, 함수의 그래프나 대수식, 수표 등의 다양한 표현들로부터 함수적 관계를 역으로 해석하여 언어적으로 표현하는 것을 어려워한다. 이는 방정식, 표, 그래프와 같은 정적인 표현에 대한 강조로 인하여, 학생들이 실제로 수학의 체계 내에서 함수로 표현될 수 있는 상황에 대한 이해와 대수적 기호에 대한 해석을 충분하게 할 수 없음을 보여주는 것이다.

그리고, Clement(1989), Dunham & Osborne (1991), Goldenberg et al.(1992), Kaput(1992), Chazan(1993), Doerr & Tripp(1999), Abrams(2001), Carraher & Earnest(2003) 등은 방정식, 그래프, 표 사이의 연결을 이해하는 것을 어려워하며, 그 표현들 사이의 변환에서 많은 오류를 저지른다고 보고하면서 그 해결책으로 그래프 능력의 신장을 위한 그래픽 계산기의 활용, 대수적 표현과 그래프적 표현간의 모델링 활동 등 나름대로의 학습-지도 방안을 제안하고 있다. 특히, Doerr & Tripp(1999), Abrams(2001)등은 함수 학습에서의 모델링 활동은 현상으로부터 변수를 정의하고 여러 가지 표현을 사용하여 새로운 정보를 일반화·추상화하는 과정을 학생들 스스로 수행할 수 있도록 할 뿐만 아니라 원래의 문제로부터 정보의 중요성을 깨닫게 할 수 있다고 한다.

그러나 함수 학습-지도 방안이 지속적으로 연구됨에도 불구하고, 여전히 많은 학생들은 함수적 상황을 스스로 해석하고 유창하게 표현하며 이를 이해하는 것을 어려워한다. 또한, 위 연구들은 함수학습에서 역동적인 표현에 의해 학생들의 경험과 함수의 추상성 사이의 연결에 대한 중요성을 강조하면서 포괄적인 학습-지도 방안을 제시할 뿐, 학생들의 표현에 대한 선수 경험을 충분히 고려하지 못하고 있다. 그리고 학교 수업에서 함수의 유용성을 경험하면서 함수적 현상을 해석하기 위해 필요한 표현 방법 사이의 연결성을 극대화하는 구체적인 학습-지도 방법과 그 효과에 대한 논의도 충분하지 못하다.

따라서 학생들의 구체적인 경험을 바탕으로 다양한 함수적 상황에 대하여 함수개념의 동적인 측면과 정적인 측면을 고려하여 해석하고 이를 표현하도록 지도할 필요가 있다. 이를 위해, 학교 수학에서 함수의 활용단원을 지도할 때, 주어진 문제 상황에 내포된 관계를 언어적 표현, 대응도, 대응표, 화살표 다이어그램, 그래프, 대수식 등 다양한 표현간의 번역을 통해 함수적 관계의 다양성과 임의성을 인식시키고 형식화·수학화 과정을 경험시킬 필요가 있다. Moschovich, Schoenfeld & Arcavi(1993)에 의하면, 학생들의 표현에 대한 경험을 바탕으로 다양한 표현 간 번역과 해석을 할 수 있도록 함수를 지도하는 것은 규칙성과 함수개념에 대한 정신적인 이미지를 학생들 스스로 구성할 수 있도록 도울 수 있어 학생들의 함수적 사고 능

력 신장을 기대할 수 있다고 한다.

본 연구는 학생들이 일차함수의 활용단원을 학습할 때 여러 현상을 해석하고 다양한 수학적 표현을 사용하여 문제를 해결할 수 있도록, 학생들의 표현에 대한 이전 경험과 현상을 해석하기 위한 표현 방법사이의 연결성을 어떻게 교수하는 것이 효과적인지를 분석하고 효과적인 학습-지도 방법을 모색하는 것을 목적으로 한다. 구체적으로 살펴보면, 본 연구에서는 먼저 일차함수를 학습한 8학년 학생들을 대상으로 일차함수 과제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제[2]로 세분화하여 각각에 대한 학생들의 오류를 분석한다. 이를 토대로, 일차함수의 활용 단원을 강의식으로 표현변환을 강조하여 학습을 한 경우, Fujii(2003)의 모델링 관점[3]에서 표현변환을 강조한 학습을 한 경우, 앞서 언급한 4가지 과제를 기반으로 표현변환을 강조한 학습을 한 경우, 세 학습-지도 방법이 교수학적 측면에서 어떤 유의적인 효과와 차이가 있는 지를 분석하고자 한다. 또한, 다양한 표현들 간의 유연한 변환 능력이 학생들의 일차함수에 대한 각 과제별 오류와 질적 함수의 해석에서 나타나는 오류를 어떻게 교정하는지를 구체적으로 분석하고자 한다. 본 연구의 교육적 의의는 함수적 현상을 해석하고 이를 유창하게 표현하여 학생들 스스로 함수 개념을 보다 풍부하게 이해하고 구성하도록, 구체적인 학습-지도 방법을 탐색하는데서 찾을 수 있다.

이상에서 논의한 연구의 필요성과 목적에 근거하여, 본 연구에서 밝히고자 하는 연구문제는 다음과 같다.

1. 학생들의 일차함수에 대한 문제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 분류할 때, 각 과제별 및 질적 함수 해석에서의 오류 유형은 무엇인가?
2. 일차함수의 활용단원을 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습을 한 경우, 모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 경우, 활용단원을 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 재구성한 과제기반 학습에서 표현변환을 강조한 경우, 세 학습 방법 사이의 교수학적 효과의 측면에서 어떤 유의적인 차이가 있는가?
3. 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습, 모델링 관점의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습의 경우, 각 과제별 및 질적 함수의 해석의 측면에서 오류 교정은 어떤 양상으로 나타나는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 모델링 관점에서의 일차함수 연구

모델링은 흔히 서로 다른 과목으로 생각되는 수학과 과학의 연결성을 강조하며, 실세계를 효과적으로 수학화 하는 활동으로 알려져 있다. 하나의 체계를 나타내기 위해서 다른 체계를 이용하는 것은 모델링의 중요한 요소임에는 틀림없다. 그러나 학생들이 수학화 과정을 거쳐 경험한다면 현재의 모델링 과정이 다른 경우의 모델링 과정으로 쉽게 전이가 가능하며 대안적인 모델로 확장가능하기 때문에, 모델링에서의 수학화의 역할이 더욱 강조되고 있다 (Lehrer & Schauble, 2003). 이러한 맥락에서, 수

---

2) 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제의 분류는 Leindhardt et al.(1990)에 의한 분류로 Ⅱ.이론적 배경의 *3.함수에 대한 과제별 접근*에서 설명된다.
3) Fujii(2003)의 수학적 모델링 관점은 Ⅱ.이론적 배경의 1. 모델링 관점에서의 일차함수 연구에서 논의될 것이다.

학적 모델링에 대하여 보다 상세히 살펴보면 다음과 같다.

Doerr & Tripp(1999)와 Izak(2003)에 의하면, 수학적 모델링은 특별한 수학적, 물리적, 또는 사회적 맥락의 다양한 속성을 산술 연산, 함수, 다른 수학적 구조들을 활용하여 조사하고, 그 과정에서 문제를 해결하기 위해 유효한 표현들을 사용하는 활동이라고 정의한다. 보다 협의의 의미로, Fujii(2003)는 어떤 현상에 대한 문제를 해결하거나 그 현상으로부터 새로운 해석이나 발견 또는 통찰을 얻기 위해서 원래의 상황을 수학적으로 표현하고 이를 변환하여 수학적 결론을 발견하거나 해석하는 과정을 수학적 모델링이라고 한다. 본 연구에서 논의하려는 모델링 관점은 Fujii(2003)의 관점을 의미한다.

Lehrer & Schauble(2003)에 의하면 수학적 모델링의 특징을 4가지로 살펴볼 수 있는데, 첫째, 학생들이 실세계와 가상세계를 동시에 마음속에 담을 수 있으므로 지시대상과 명확히 구분된 모델을 인식함으로써 문제해결에 유추를 이용할 수 있도록 한다. 둘째, 수학적 모델링은 실세계 또는 가상세계와 표현간의 지속적인 대응을 가능하게 하며, 학생들이 자신의 모델을 구안하고 분석하며 수정할 때 유목적적인 적절한 표현의 선택을 능숙하게 할 수 있다. 셋째, 수학적 모델링은 문제해결과정에서 여러 모델을 실세계와의 상대적 적합도를 비교·평가하여 대안적인 모델을 탐구할 수 있도록 하며, 수학적 문제해결의 결과는 최선의 대안적인 모델로 결정된다는 것을 이해할 수 있게 한다. 넷째, 수학적 모델링은 모델링에서의 관계를 실세계에 비추어 검증하는 반성과정을 거치면서 고려해야 할 실제 상황에서의 가능성에 대해 부당한 면도 밝힐 수 있도록 한다.

이상의 수학적 모델링에서, '모델'이라는 용어는 요소로 구성되거나 요소들 사이의 관계, 요소들이 어떻게 상호작용하는 지를 묘사하고 설명하는 조작, 선행 관계나 조작들을 적용한 패턴, 규칙들로 구성된 개념 체계를 의미한다. 이는 학생들의 사고를 묘사하기 위해 개발하는 '이상적(ideal)' 모델이라는 의미가 아니라, 학생들이 수학적으로 의미 있는 개념 체계를 구성하고 묘사하며 설명하기 위해 개발한 모델들을 의미하는 것이다. 모델이 되기 위해서는 한 체계가 몇몇 다른 현상이나 경험되는 체계를 예측하거나 묘사하거나 해석하거나 설명할 수 있어야만 한다. 이러한 맥락에서, 수학적으로 유의미한 모델은 문제를 해결하기 위해 묘사하거나 설명되어야 할 상황을 학생들이 이미 이전에 학습한 경험 체계의 기본적인 구조적 특성을 가진 표현, 예를 들어, 함수식, 다이어그램, 기호, 그래프, 표 등으로 표현될 수 있는 모델을 의미한다.

수학적으로 유의미한 모델을 구성하는 과정인 수학적 모델링은 일반적으로 다음의 4단계 순환 과정으로 구성된다(Lesh & Doerr, 2003). 먼저 실세계로부터 모델 세계로 함수적 대응 관계를 설정하는 서술 과정을 거쳐, 원래의 문제해결 상황과 관련된 행동이나 예측을 생성하기 위한 조작을 하는 과정을 수행한다. 그런 다음, 관련된 결과를 실세계로 되돌리는 단계인 해석 과정, 행동과 예측의 유용성을 입증하는 검증 과정의 주기를 계속 순환한다. 이는 학생들로 하여금 수학적으로 의미 있는 구성에 대한 필요성을 느끼고 자신의 현 사고 방식을 반복적으로 표현, 검증, 세련화 또는 개선하는 경험을 구조화하는 데 초점을 둔 것이다.

그러나 함수적 상황을 나타내는 문제는 복잡하며 이를 해결하기에는 위와 같은 단일한 모델링 주기만으로는 충분하지 않을 수 있다. 문제 상황에 대한 수학적 해석이 자명하지 않다면, 여러 가지 대안적인 해답이 있을 수 있으

며 각각의 해결대안은 서술, 조작, 예측, 검증의 과정을 반복하여 점차 정제되거나 수정 또는 배제될 수 있다. 또한 Lesh & Doerr(2003), Lesh & Carmona(2003)에 의하면, 함수적 상황에 내포된 개념 체계와 관련된 의미는 표현 양식 전반에 분포되어 있는 반면, 각각의 표현 양식은 그 함수적 상황의 서로 다른 측면을 강조하는 경우가 대부분이라고 한다. 이는 함수적 상황을 이해하고 문제를 해결할 때 표현의 유연성이 중요한 기본 요소임을 시사한다. 이에, 본 연구에서 논의하고자 하는 모델링 관점에서의 표현변환은 다중 모델링 주기를 나타내며, 방정식, 그래프, 수표, 다이어그램, 패턴, 언어적 표현 등을 주어진 문제의 목적에 적합하도록 이동하면서 그 의미를 해석하고 함수적 관계를 나타내는 최선의 표현으로 번역하는 것을 의미한다. 즉, 표현변환은 다중 모델링 주기를 거치면서 한 표현 양식으로부터 다른 한 표현 양식으로 전환되는 번역이나 표현으로부터 함수적 의미를 도출하는 해석보다 확장된 의미로 사용하려고 한다.

일차함수에 대한 모델링 관점의 연구들을 살펴보면 다음과 같다. Carraher & Earnest(2003)는 학생들을 두 그룹으로 나누어 일차함수를 만들어 그 함수의 규칙을 찾는 guess-my-rule 학습방법을 실시한 결과, 주어진 상황에서 의미를 파악한 후 기호적 조작으로 이행하는 모델링의 기본 활동을 관찰할 수 있다고 한다. 이 때, 학생들은 함수의 정의역에 속하는 값에 대한 치역의 값들을 관찰하여 하나의 함수식이 치역의 모든 값에 적용되며 그 규칙은 바뀌지 않는다는 형식적 추론도 할 수 있다고 한다. Izsak (2003)은 Winch라고 불리는 물리적 장치에 대한 모델링 학습을 하면서 중학교 8학년 학생들 스스로 일차함수의 방정식을 구하고 방정식에서 독립변수와 종속변수를 구별하는 것과 특별한 물리적 사건을 결정하는 방정식 풀이와 같은 대수적 지식을 개발할 수 있다는 사례연구를 하였다. 또한, Doerr(2003)는 일차변환, 증가와 감소, 주기함수에 대한 모델링 과제에서 적합한 표현들 사이의 연결에 대한 학생들의 이해를 발전시킬 수 있는 교수학적 전략을 개발할 수 있도록, 모델링 과정에서 나타나는 학생들의 개념과 이를 개발하기 위한 교사의 다양한 방법을 다층교수실험(multi-tired teaching experiment)으로 연구하였다. 먼저 교사는 학생들의 사고과정을 예측한 뒤, 학생들에게는 명시적이고 즉각적인 해를 제시하지 않고 그 사고과정에 대하여 세밀하고 다각적인 관찰을 한다. 동시에 학생들은 모델링 과제를 해결하기 위해 종이에 패턴을 쓰고 방정식으로 묘사하며 표와 그래프 등으로 표현하면서 모델링 과제를 점점 발전시켜 확장해 나간다. 연구 결과, 학생들은 기울기를 변화시켜 보거나 일차 또는 이차 함수로 표현해보기도 하며, 원점에서의 데이터의 움직임을 조사하는 등의 모델화 시도를 할 수 있었다. 그리고 학생들이 다른 학생들과 함께 해결방법과 구안된 모델을 공유하도록 정당화 과정을 구성하였다. 이 때, 교사는 학생들의 사고가 다양함을 알게 되어 교수학적 전략을 개발할 수 있는 자료를 얻을 수 있었다.

정리하면, 수학적 모델링은 여러 현상을 함수, 대수와 같은 수학 내용을 사용하여 문제를 해결하기 위해 다양한 표현들로 변환하면서 내재된 수학적 개념 체계를 이해하고 이를 다시 실세계에 적용할 수 있도록 하는 활동이다. 이 때, 학생들은 현상을 구성하는 수학적 구조와 요소들 사이의 관계와 규칙, 개념을 설명하는 모델을 구성하게 된다. 이처럼 학생들이 현상을 이해하고 주어진 문제를 해결하기 위한 수학적 모델을 내적으로 구성하기 위해서는, 수학적 개념을 다양하게 표현할 수 있어야 한다.

따라서 함수학습을 할 때 다양한 표현을 활용한 수학적 모델링을 강조한 학습을 실시한다면, 함수가 사용되는 맥락에 따라 문제해결의 목적에 적합하게 번역하고 그 의미를 해석할 수 있어 함수의 여러 측면에 대한 심도 있는 학습이 가능할 것으로 본다.

2. 함수 학습에서의 표현

함수를 표현하기 위해서는 기호, 표, 그래프, 식 등 여러 방법이 있다. 학생들이 이러한 표현을 어떻게 이해하느냐에 따라 함수학습이 효과적일 수도 있고 제한이 따를 수도 있다. 함수 문제를 효과적으로 해결하기 위해서는 주어진 상황을 수학적 모델로 번역하고 다양한 표현 방법과 그 관계를 이해하여 원하는 결과를 도출할 필요가 있다. 이는 같은 개념의 서로 다른 표현에서 그 관계를 이해하여 적절한 표현 방법들 사이를 유연하게 변환할 수 있는 것이 효과적인 학습에서 중요함을 의미한다. 이러한 취지의 연구로, Janvier(1987)은 저축이나 다이어트와 같은 상황을 일상적인 언어로 해석하여 이를 그래프 등으로 표현하고 학생 스스로 자료를 생성함으로써 패턴을 발견하도록 교수하는 것은 학생들의 함수학습에 효과적이라고 강조한다. 또한, O'keefe Ⅲ(1992)는 일차함수의 본질적인 특징을 전달하기 위해 일상 언어, 유추, 표, 그래프와 방정식 등으로 역동적 표현할 때, 학생들은 기울기와 변수 개념을 보다 빠르고 정확하게 설명할 수 있다고 한다.

표현은 내적 표현체계와 외적 표현체계로 나뉠 수 있다(Goldin & Shteingold, 2001). 내적 표현체계는 인지적 형상 또는 정신적 이미지와 같은 상징적인 체계이며, 외적 표현체계는 숫자, Cartesian 좌표평면, 그래프, 수직선, 표, 그림 등 시각적인 표현이 대부분으로, 공식, 방정식, 다이어그램을 만드는데 규칙이나 기본 토대를 제공하는 것이다. 이처럼 표현은 내적, 외적이라는 수식어를 붙여서 구별하기도 하지만, 일반적으로, 표현은 수학적 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적 대상을 지칭하며 내적 표현체계라고 불리는 표상은 주체의 정신적 실체인 이미지, 관념 등을 뜻한다(Janvier, 1987). 본 연구에서는 외적 표현체계만을 표현이라는 용어로 다루고자 한다.

수학적 표현은 다이어그램, 그래프와 같은 시각적 표현, 대수식과 같은 기호적 표현, 순서쌍, 수표와 같은 수치적 표현, 정의, 담화와 같은 언어적 표현으로 크게 구별될 수 있으며, 그 각각의 특징과 학습-지도에 적용되는 양상을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, Clement(1989) 등은 수학 학습 과정에서 그림, 다이어그램, 그래프와 같은 시각적 표현이 항상 유용하다고는 할 수 없지만, 학생들의 수학적 사고를 자극하고 명백하게 할 수 있는 장점을 가지고 있다고 한다. 그 중 다이어그램 표현은 공간적인 배치로 정보를 나타내는 하나의 가시적인 표현이다(Diezmann & English, 2001). 다이어그램, 그림, 스케치라는 용어는 때때로 유사한 의미로 사용되기도 하지만, 다이어그램은 구조를 표현하는 것으로 표면상의 자세함을 나타내는 것은 중요하지 않으나, 그림과 스케치에서는 표면적인 자세함을 보여주는 것이 중요하다. 예를 들어, 일차함수를 가르칠 때 x와 y의 값들을 화살표로 연결하는 대응 다이어그램(mapping diagram)이 대표적으로 $x \rightarrow ax$, $x \rightarrow ax+b$와 같은 임의의 일차함수를 일반화시킬 때 학생들을 쉽게 이해시킬 있다. Diezmann & English(2001)은 다이어그램이 문제의 구조를 알고 이를 해결할 수 있는 기초를 제공할 수 있으므로, 수업시간에 학생들이 다이어그램을

사용하고 다양한 다이어그램 표현사이의 관계 및 유사성과 차이점들에 대하여 스스로 설명할 기회를 주어야 한다고 주장한다.

둘째, 시각적 표현 중 그래프 표현은 함수의 시각적 관점을 제공하는데 아주 유용한 도구이다. 특히, Freudenthal(1983)은 그래프에 포함된 정보의 세 가지 수준을 말하였는데, 첫째, 그래프를 독립변수와 종속변수의 순서쌍으로 읽는 점별 방식의 정보를 제공하는 수준이다. 두 번째 수준은 국소적 수준으로, 한 점 근처에서 그래프에 나타난 양, 음, 증가, 감소, 최대, 최소 등을 비교 탐구하는 수준이다. 이는 기울기, 절편을 대수식과 같은 기호적 표현에서 매개변수를 사용하여 나타낼 수 있었다. 세 번째는 전반적인 수준으로, 그래프가 무엇을 의미하는지를 아는 것이다. 즉, 그래프 전반에 걸쳐 양·음의 구간, 증가·감소구간, 불변구간, 최대, 최소, 진동, 주기성 등을 보며, 다른 그래프들로 표현된 함수들의 상대적인 특징을 비교하고 그래프를 해석하는 것이다. 그래프 학습에서 주의할 점으로, 카르테시안 그래프들은 학생들에게 다양한 오개념을 줄 수 있다. Clement(1989)에 의하면, 학생들은 문제의 특정 상황의 시각적인 특징을 보여주는 그림으로서 그래프를 보는 경향이 있으며, Dunham & Osborne (1991)은 그래프의 척도 변화가 학생들을 혼동하게 만들 수 있다고 한다. Tall & Bakar(1992)은 학교 수학에서 그래프로 표현되는 함수 학습을 강조한 결과, 학생들이 x=k와 같은 상수함수와 원을 함수라고 생각하는 오개념을 가질 수 있다고 한다.

셋째, 기호적 표현은 수학적 조작을 대수 기호를 사용하여 빠르고 명백하며 유연하게 하는 표현이다. 대수적 기호는 약정에 의한 기호로서, 고유한 의미가 있는 것이 아니라 그들이 표현하는 관계들의 가치에 따라 의미가 다르게 해석된다. 예를 들어, 독립변수 x는 용기의 부피, 변화량, 시험 점수들의 표준적인 변화 형태 등과 같이 문맥에 따라 다양한 의미를 지닌다. 또한 x의 함수값 f(x)에 대한 기호적 표현은 함수관계를 표현하는 형식적 표현으로 취할 수 있을 뿐만 아니라 진술된 관계의 절차적 측면을 효과적으로 나타낼 수 있다. 그러나 Moschovich, Schoenfeld & Arcavi(1993)에 의하면, 학생들은 대수식, 방정식과 같은 표현에서 함수 표기, 변수의 표기와 관련된 어려움을 갖고 있다고 한다. 학생들이 단순히 기호 f(x)에 의해 실행되는 정보를 이해하지 못한다는 것이다. 학생들은 x가 독립변수라는 것을 깨닫고 있지만, 특수한 함수값을 나타내는 기호 f(x)는 변수로서 양화되지 않으며 f(x)의 복잡성을 잘 이해하지 못하는 경우가 많다.

넷째, 함수에서 수치적 표현 중 표 형식의 표현은 함수적 관계의 표본을 제공하기 때문에 데이터를 편집할 때 유용한 도구라고 한다 (Freudenthal, 1983). 표는 수치 패턴을 설명하고 함수의 특정값을 비교하는 데 유용하다. Schliemann, Carraher, & Brizuela(2001)는 일차함수를 나타내는 상황을 제시한 문제를 해결할 때, 표 구조에서 산술계산으로 표를 채우기 시작하여 일반화된 n값으로 확장하면서 독립변수와 종속변수의 대응 관계와 규칙을 추론하는 학습이 효과적이라고 보고하였다. 그러나 표 형식으로 표현하기 위해서는 유한개의 수치 표본이 필요하며, 이산적이고, 정적인 점들에 초점을 맞추기 때문에 그래프가 제공하는 함수의 전반적인 관점을 놓치기 쉽게 한다는 단점을 가지고 있다(Kaput, 1992).

다섯째, 언어적 표현은 자연스러운 학생들의 의사소통의 형식이고 수학 교실에서 사용되어 진다. 수학에서의 언어적 표현은 일상 언어적 표현을 보다 추상적인 형식으로 학생들 스스로

점진적으로 변화시켜 갈 때, 수학의 추상적 개념을 내적으로 형식화하고 일반화할 수도 있다. 또한, 학생들은 수학적 담화활동을 하면서 수학적인 언어와 일상 언어가 서로 다르고 자신이 알고 있는 개념을 공유된 표현으로 다른 사람들에게 전달할 수 있음을 깨닫게 된다.

이상에서 살펴본 각 표현들은 함수적 관계의 일부 측면들을 설명한다. 이 때, 단독 표현 양식만으로 학생들에게 함수에 대해 알고자 하는 모든 것을 나타낼 수는 없다. 특히, Yerushalmy & Shternberg(2001), Hitt(1998)는 학생들이 다양한 표현을 사용함으로써 표현 사이의 관계를 발견하고 이를 일반화하도록 이끌 수 있다는 관점에서 함수 표현을 연구하였다. 구체적으로, Yerushalmy & Shternberg(2001)는 함수 교수에서 그래픽 계산기를 이용하여 기호적 표현, 수치적 표현, 그래프적 표현 사이의 연결을 명확히 함으로써, 학생들에게 그 모든 표현에 내재된 함수 개념을 발전시킬 수 있다고 보고한다. 또한 Hitt(1998)는 중등학교 학생들과 교사들을 대상으로 함수 개념에 대한 상이한 표현들을 식별하고, 한 표현 체계에서 다른 표현체계로 의미가 보존되는 번역을 할 수 있는지를 연구하였다. 그 결과, 학생들은 표현체계를 구별하고 이를 명확하게 표현하는 것을 어려워하였으며, 수학교사들은 한 표현에서 다른 표현으로 이동할 때 의미를 보존하는 번역에서의 오류를 범하였다. 이는 함수 지도에 있어서 표현의 다양성과 변환에 대해 강조할 필요가 있음을 의미한다.

이와 같이 함수는 다양하게 표현될 수 있으며, 표현 간 변환을 할 수 있도록 지도하는 것은 함수 개념을 이해하는데 매우 중요하다고 할 수 있다. 따라서 표현간의 변환을 경험할 수 있는 학습-지도 방식은 매우 중요한데, 본 연구에서는 교과서를 토대로 강의식 위주로 표현변환을 학습한 경우, 모델링 관점에서 표현변환을 학습한 경우, 과제기반 학습에서 표현간 변환을 학습한 경우 각각 어떠한 교수학적 효과가 있는가를 분석할 것이다.

3. 함수에 대한 과제별 접근

Leinhardt, Zaslavsky, & Stein(1990)은 함수에 대한 과제를 분류과제, 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 구분하였다. 이러한 구분은 본 연구에서 실시한 과제기반 학습의 이론적 토대가 된다. 그리고 오류 분석을 하기 위한 문항 제작의 틀로 사용된다. 각 과제별로 구체적인 특징과 함수 지도에서의 적용 양상을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 분류과제는 그래프, 대수적 규칙, 다이어그램 등으로 다양하게 표현되는 관계가 함수인지를 결정하거나, 서로 다른 관계들 속에서 함수를 식별하는 것 또는 여러 함수들 사이에서 한 종류의 특별한 함수를 식별하는 것으로 구성된다. 분류과제의 예로서 Vinner & Dreyfus (1989)가 학생들에게 주어진 그래프와 함수에 대한 묘사, 함수가 아닌 것을 함수의 특성에 따라 분류해보는 것을 통하여 함수 개념을 익히도록 하는 것을 들 수 있다.

둘째, 예측과제는 일부분만 주어진 그래프를 보고 그래프의 다른 점들에서의 상황을 추측하거나 전반적인 그래프의 모양을 예측하는 것과 같이, 주어진 예들을 보고 어떤 규칙을 추측하는 과제로, 학생들에게 수치값 또는 그래프 표현만으로는 문제의 해를 쉽게 발견할 수 없고 다른 표현이나 관계들의 특징을 생각하도록 하는 과제를 말한다(Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). 패턴 식별과 그것을 기술하는 것은 예측과제에서 중요하다. Hung(1995)은 함수에서 패턴을 식별하는 학생들의 전략을 반복 연산, 반

복 연산의 간략화, 간략화 된 연산의 전략을 묶어 확장해 보기, 보조적인 그래프 사용 등이 있을 수 있다고 한다.

셋째, 번역과제는 학생들이 함수 문제를 해결하기 위해 시각적 표현과 언어적 표현, 수치 표현, 대수적 표현들 사이의 이동을 할 수 있도록 구성된다. 번역과제는 학생들이 다른 표현 양식 중 같은 함수를 인식하거나 대응되는 표현들 중 주어진 함수를 가장 적합하게 표현할 수 있거나 이를 구별할 수 있는 문제를 말한다. 함수는 주로 수치적, 그래프적, 대수적 표현으로 나타내지는데, 번역은 함수에 대한 이러한 표현으로부터 다른 함수적 표현으로 변환하는 과정을 말한다. 직선의 방정식 표현으로부터 그래프적 표현으로의 번역이 전형적인 예이다. 또한 그래프로부터 수치 값을 읽는 과제도 번역과제로 볼 수 있다. Rizzuti(1991)는 학생들에게 표로부터 방정식을 만들어보거나, 수치들의 표로부터 그래프를 예측하고 표현해 보도록 하는 것을 번역과제라고 하였다.

넷째, 해석과제는 그래프, 방정식, 상황으로부터 특수한 조건을 고려하여 문제를 해결하기 위해 그 의미를 국소적으로 또는 전반적으로 이해하도록 패턴, 연속성, 기울기와 같은 비 개념을 묻는 문제 등으로 구성된 과제를 말한다. 예를 들어, 그래프에서 변수에 대응하는 값 찾기, 변수들 간의 관계를 진술하기, 그래프로부터 상황이나 추상적인 함수적 관계를 표현하기 등을 뜻하며, y=mx+b와 같은 대수식에서 m을 기울기로, b를 y절편이나 y=mx의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동한 양으로 해석해 내는 것 등을 말한다. 또한 다양한 표현으로부터 기존의 양적인 해석을 습득하는 것뿐만 아니라 주어진 상황을 표현하는 그래프나 대수식의 표현으로부터 다양한 질문을 하면서 스스로 그 상황을 질적인 변화과정에 맞춰 재해석하거나 이를 새로운 과제에 인용할 때 근거로 사용하면서 정당화하는 행동을 말한다. 이 때, Janvier(1987)는 번역과제와 해석과제를 세분하여 다음의 <표Ⅱ-1>과 같은 분류 기준을 제시하였다.

다섯째, 척도과제는 학생들에게 그래프적 표현에서의 척도에 대한 단위를 선택할 뿐만 아니라 그래프에 대한 전체 척도를 구성하도록 도움을 준다. 대부분의 학생들은 척도에 거의 주의를 기울이지 않고 그래프들의 좌표축은 등간격이라고 가정하고 문제를 해결하기 때문에, 좌표축들을 서로 다른 척도로 제시할 경우, 현상을 왜곡되게 해석하거나 같은 그래프인데도 서로 다르게 해석하는 등의 어려움을 겪기도 한다. 척도에 대한 이해와 해석을 강조하기 위해서 실재적인 수들을 적용하여 척도 변화를 손으로 그리는 교수와 그래픽 테크놀로지를 사용하여 역동적인 척도 변화도 인식할 수 있는 교수도 필요하다. 특히, Yerushalmy(1997)는 다양한 등간격 좌표체계와 비등간격 좌표체계에

<표Ⅱ-1> Janvier의 번역과제와 해석과제 분류

번역할 것	번역방법	번역된 것	해석할 것	해석방법	해석된 것
수식	계산	표	그래프	그래프의 해석	언어
표	좌표찍기	그래프	표	구두로 규칙 설명하기	언어
			언어	질적인 그래프 그리기	그래프
			그래프	자료 생성	표
			표	규칙 찾기	수식

서 같은 일차함수의 x축과의 각과 기울기 개념과의 관계에 대한 그래프 표현과 해석을 연구하였다. 이 때 일차함수의 기울기는 척도의 등간격 변화가 아니어도 변하지 않는다는 관점과 일차함수의 기울기는 x축과 함수를 표현하는 직선사이의 각 α에 의해 tanα로 정해질 때 척도의 변화에 따라 변한다는 관점이 나타난 것으로 볼 때, 직선으로서의 일차함수의 기울기는 등간격 체계에서 함수를 표현하는 기울기인데도 학생들은 혼란을 경험하고 있었다. 이에, Yerushalmy는 기울기의 이해를 강화시킬 수 있도록 직선의 기울기라는 시각적 기울기와 함수의 변화율이라는 해석적 기울기를 구별하여 사용할 수 있도록 교수해야 한다고 주장한다.

Yerushalmy(1997)의 척도과제에서의 오류에 대한 연구 외의 학생들의 각 과제별 오류에 대한 연구를 간단히 살펴보면, 다음과 같다. 예측과제에서 학생들의 오류는 그래프의 시각적인 정보에 의존하거나, 함수가 식일 뿐이라면 함수값을 계산하는 활동에 의해 문자에 수를 대입하는 연산으로 제한되어 버리는 개념이미지로 인한 오류를 범한다고 한다(이종희와 김부미, 2003). 번역과제에서는 학생들이 기울기 개념에 대한 대수적 표현에 집착하기 때문에, 기울기를 그래프로 번역할 때 그 의미하는 바를 어려워한다고 한다(Janvier, 1987). 그리고 Schoenfeld & Arcavi(1988), Clement(1989), 이종희와 김부미(2003)에 의하면, 해석과제에서는 관계적 해석과 판단에서의 장애로 인한 오개념과 변수 개념에 대한 장애가 주로 나타난다. 예를 들어, 기울기와 높이를 함수의 그래프에서 혼동하거나 그래프의 전체적인 모양과 문제 상황의 시각적 특징들 또는 x축과 y축이나 변수에 대한 판단부족으로 나타난 오개념 연구에서 찾아 볼 수 있다. 또한, 학생들이 그래프에 나타나는 독립변수와 종속변수 사이의 관계와 같은 함축된 의미를 완전히 이해하지 못하기 때문에 그래프를 해석하지 못하는 것이라고 한다.

III. 연구 방법

본 연구는 인천의 G여자 중학교 2학년 학생 200명을 대상으로 2003년 8월 20일부터 9월 15일까지 실시하였다. 학생들은 일차함수 단원을 교과서를 중심으로 이미 학습한 상태로, 일차함수 개념과 그래프에 대한 내용 및 그래프, 표, 함수식 등의 표현 간 번역을 할 수 있었다. 이 때, 학생들은 일차함수의 활용단원은 학습하지 않은 상태였고, 7차 교육과정에 제시된 일차함수 활용단원은 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계를 이해하는 내용, 두 일차함수의 그래프를 통하여 연립일차방정식의 해를 이해하는 내용, 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 푸는 내용으로 구성된다.

본 연구에서는 학생들의 일차함수 학습에서의 오류 유형을 범주화한 다음, 일차함수의 활용단원을 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습을 한 경우, 모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 경우, 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 재구성한 과제기반 표현변환 학습을 실시한 경우로 나누어 그 교수학적 효과를 분석하였다. 이 때, 학생들의 각 과제별 오류 교정과 질적인 그래프로 제시된 함수적 상황 해석에서의 오류 교정 측면에서 어떤 양상을 보이며, 강의식 학습방법과 두 학습간의 교수학적 측면에서 유의적인 차이가 있는 지를 조사하였다. 또한, 모델링 관점에서의 학습과 과제기반 학습 방법간에 교수학적 효과 면에서 유의적인 차이가 있는 지를 분석하였다. 특히, 본 연구에

서 사용한 용어인 '표현 간 변환'의 의미는 단순히 표현 간 번역을 의미하는 것이 아니라, Presmeg(2002)이 의미하는 바와 같이, 수학적 개념을 구성하기 위해 그 속에 내포된 의미와 관계를 해석하고 문맥의 변화와 상황의 변화에 맞게 의미를 이동하면서 관계를 파악하는 인지적 활동을 하면서 표현 간 번역을 하는 것을 의미한다.

먼저, O'keefe III(1992), Zalsvavsky(1997), 강행고 외(2002)을 참고하여 동형인 사전, 사후검사지를 제작하여 사용하였다. 이 때, 분류과제는 중학교 1학년 과정에서 다루는 함수의 정의와 관련하여 제시되는 문제로 구성된 것으로서, 그 관계가 함수인지를 결정하거나 서로 다른 관계들 속에서 함수를 식별하는 것을 주로 다룬다. 이는 일차함수 관계를 만족하는 상황을 제시한 본 연구와는 관련이 적으므로 분류과제는 다루지 않았다. 검사지는 학생들의 표현에 대한 선수 학습과 이전 경험을 고려하여 일차함수 단원을 앞서 제시한 Leinhardt, Zaslavsky, & Stein(1990)의 과제에 대한 정의와 Janvier(1987)의 번역과제와 해석과제의 분류 기준에 의거하여, 예측, 번역, 해석, 척도과제로 나누어 총 8개 문항 영역에서 20문제로 제작하였으며, 각 과제별 문항은 다음의 <표Ⅲ-1>과 같이 구성하였다.

<표 Ⅲ-1> 사전/사후검사 문항의 구성[4)]

문항	표현	검사 내용
P 1-(1),(2),(3). 일차함수에서의 점과 그래프의 관계 예측	그래프 표현	그래프로 제시된 직선과 점의 함수적 관계를 예측하여 설명한다.
P 2. 일차함수에서의 한 점으로부터 다른 점의 위치 예측	기호적 표현 (대수식)	함수 관계식을 사용한 기호적 표현으로 제시했을 때의 점과 일차함수의 그래프의 관계를 파악한다.
T/I 3-(1). 일차함수간의 관계 번역 및 진술	수표, 언어적 표현	수표의 패턴을 추리하여 일차함수 관계로 해석하여 두 함수 간의 관계를 해석한다.
T/I 3-(2). 일차함수간의 관계의 번역 및 진술	그래프, 언어적 표현	표로 제시된 함수 관계를 그래프로 표현하고언어로 진술한다.
I 3-(3). 일차함수 관계 해석	기호적 표현	대수식을 사용한 기호적 표현으로 번역하여 일차함수 관계를 파악한다.
I 3-(4). 일차함수 관계 해석	기호적 표현	기호적인 함수 관계식 표현으로부터 평행이동의 개념을 해석한다.
I 4. 기울기의 해석	기호적 표현	대수적인 기호적 표현으로부터 기울기의 의미를 해석한다.
T 5. 기호적/그래프적 표현의 번역	그래프, 기호적 표현	기호적 표현과 기호적 표현을 상호 번역한다.
I 6-(1). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(평행)으로 해석한다.
I 6-(2). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(y절편)으로 해석한다.
I 6-(3). 기호적 표현의 해석	기호적 표현	기호적 표현으로 제시된 대수식을 그래프적 개념(x절편)으로 해석한다.
S 7. 척도의 차이 이해	그래프 표현	일차함수의 그래프에서 척도의 차이를 인식한다.
I 8-(1). 질적 함수의 해석	그래프 표현	질적 함수를 해석한다.
I 8-(2)-①,②,③,④. 질적 함수의 해석	언어적 표현	질적 함수에 수치를 주었을 때, 관계를 해석하여 기울기를 계산할 수 있다.

4) <표Ⅲ-1>에서 예측과제는 P, 번역과제는 T, 해석과제는 I, 척도과제는 S로 표시한다.

사전검사를 45분간 실시하였으며, 각 문항의 배점 기준은 다음의 <표Ⅲ-2>과 같다. 그리고 사전검사에서 학생들의 각 과제별 오류 유형을 조사하였다.

사전검사 결과, 강의식 표현변환 학습 방법을 실시한 학급과 모델링 관점에서의 표현 간 변환 학습을 실시한 학급과 과제기반 표현변환 학습을 실시한 학급의 평균성적은 각각 53점, 52점, 50점으로 일원분산분석을 실시한 결과, 유의수준 .05에서 F값이 1.682로 평균의 차이가 없는 동질 집단으로 볼 수 있었다.

그런 다음, 일차함수의 활용단원을 교과서[5]에 입각하여 실시한 강의식 표현변환 학습을 40명의 학생을 대상으로 실시하였고, 모델링 관점에서 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습은 각각 80명의 학생을 대상으로 두 학급 모두 조별 협동 학습의 형태로 실시하였다. 이때, 교사는 자연스럽게 학생들을 관찰하고, 조별 활동 시 학생들이 질문을 하면 직접 답을 알려주지 않고 조언을 하였다. 각각의 학습이 진행되는 수업 전개 과정에서 조별 활동을 시작하여 일차적으로 학습지의 문제를 모두 해결한 후, 각 문항에 대한 정답지를 제공하였으며, 옳지 않은 문항은 다시 토의하여 해결하도록 하였다. 각 조별 학습지 활동이 끝난 후, 잘 해결되지 않는 문제는 교사와 반 전체 학생들과 함께 해결하였으며, 주요 개념을 함께 정리하였다.

모델링 관점에서 표현변환 학습은 해바라기 관찰, 원가-수입-이익, 음료수의 양과 높이, 용돈과 저축액의 적립현황, 다이어트와 체중과의 관계, 케이블 TV 가입신청자수와 시청 시간을 소재로 6차시 동안 일차방정식과 일차함수의 관계, 두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 해를 이해하는 내용을 학습하였다.

해바라기 관찰을 소재로 한 학습지의 일부는 [그림Ⅲ-1]과 같다.

<표Ⅲ-2> 배점 기준

배점기준	점수
정답을 쓰고 그 이유(풀이과정)를 옳게 서술함.	5
정답을 썼지만 이유(풀이과정)의 서술이 약간 부족함.	4
정답은 쓰지 않고 옳은 이유(풀이과정)만 서술함.	3
정답만 쓰고 이유(풀이과정) 서술을 하지 않음.	2
정답은 못썼으나 이유를 부족하지만 약간 옳게 서술함.	1

5) 이준열 외(2002) '중학교 수학8-가'를 사용함.

은수네 학교에서는 수행평가를 위해 다음과 같은 과제가 제시되었다. 그런데 4명의 학생 보아, 강타, 동완, 효리는 보고서를 완성하지 못하고, 이름도 쓰지 않고 제출하였다.

--- 다음 ---

주제: 해바라기 관찰
보고서 작성 양식 : (1) 시간과 해바라기 키에 대한 대응표
(2) 시간과 해바라기 키 사이의 그래프
(3) 관찰 내용(서술식)

4명이 제출한 보고서(II)를 보고, 각 학생의 보고서를 찾아서 그 번호를 아래 빈칸에 쓰고 그 이유를 서술하세요. 그리고 완성하지 못한 보고서를 완성해보세요.

<보고서 II>

A.

시간(주)	0	1	2	3	4	5
높이(cm)	10	12.5	17.5	25	35	47.5

B.

시간(주)	0	1	2	3	4	5
높이(cm)	10	10	10	10	10	10

C. 나는 그늘 진 곳에 해바라기를 심었다. 해바라기는 자라고 있었지만, 빨리 자라진 못했다. 높이는 매주 같은 크기로 증가했다. -동완-

D. 나는 해바라기를 매우 잘 보살폈다. 햇볕, 좋은 토양, 그리고 나는 말도 걸어주었다. 매주 그 전 주보다 많이 성장하였다. -보아-

E. 나는 메마른 땅에 해바라기를 심었고, 물을 많이 주지 못했다. 조금씩 자라긴 했지만, 점점 자라는 속도가 느려졌다. -강타-

F.

[답안] 4명의 학생이 제출한 보고서를 찾아서 아래 빈 칸에 쓰고 선택 이유를 써라.

	표		그래프		관찰 내용 서술	
보아						
	이유		이유		이유	
강타						
	이유		이유		이유	
동완						
	이유		이유		이유	
효리						
	이유		이유		이유	

[그림Ⅲ-1] 모델링 관점에서의 표현변환 학습의 학습지의 예

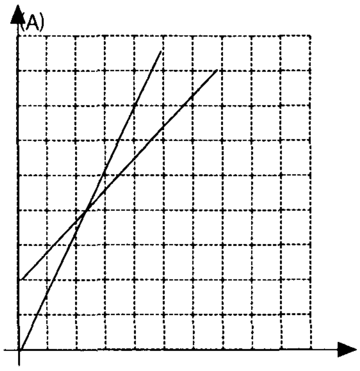
과제기반 표현변환 학습은 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계, 연립방정식의 해를 이해하는 내용을 각 과제 유형으로 재구성하여 표현 간 번역을 학습하도록 하였으며, 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 푸는 내용은 붓꽃의 성장과 시간, 양초가 타들어가는 길이와 시간, 사이클 경기를 소재로 재구성하여 6차시 동안 학습하였다. 아래의 [그림Ⅲ-2]는 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계, 연립방정식의 해를 이해하는 내용에 대한 과제기반 표현변환 학습지의 일부분이다.

교과서를 위주로 강의식 표현변환 학습 방법

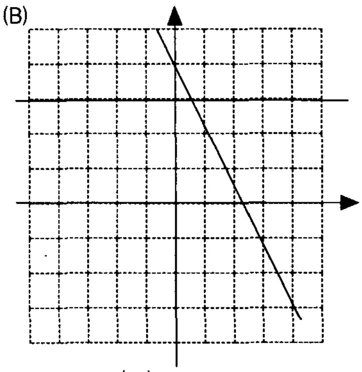
1.다음은 서로 다른 표현 방법으로 같은 방정식을 표현한 것이다. 같은 표현끼리 서로 대응시키고 그 선택이유를 써라.

(1) x+2=2x (2) 4-2x=3 (3) -2x+3=2-x
(4) 5-x=2-2x (5) 2x-4=4x+10 (6) 5-3x=-4

(A)



(B)



(ㄱ)

x	y
-1	5
0	3
1	1
2	-1
3	-3

(ㄴ)

x	y
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1

x	y
0	5
1	2
2	-1
3	-4
4	-7

(ㄷ)

x	y
0	4
1	2
2	0
3	-2
4	-4

x	y
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3

답: □-□-□ 대응
이유:

답: □-□-□ 대응
이유:

답: □-□-□ 대응
이유:

답: □-□-□ 대응
이유:

[그림Ⅲ-2] 과제-기반 표현변환 학습지의 예

* 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$x+y-2=0---①$
$x-3y=-6---②$

(1) 위 연립 방정식의 해를 구하여라.

(2) ①과 ② 각각을 그래프로 그려보자.

(3) 위의 (1)과 (2)를 비교해 보아라.

(4) 해는 무엇인가? 그리고 그 이유를 써라.

[그림Ⅲ-3] 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습지의 예

을 실시한 학급도 일차함수의 활용단원을 교과서의 내용인 그래프를 이용한 연립방정식의 해 구하기, 두 대의 자동차가 만나는 시간, 도서관과 집까지의 시간에 따른 속도변화 그래프 해석하기, 야구 문제, 키와 뼈의 길이관계, 물풍선 터뜨리기와 일차함수의 관계를 중심으로 6차시 동안 학습지를 위주로 실시하였으며, 다음의 [그림Ⅲ-3]은 사용한 학습지의 일부 예이다.

교과서 위주의 강의식 표현변환 학습을 실시한 수업에서는 표현 번역을 교과서의 문제에

따라 학생들 스스로 먼저 풀어보도록 한 뒤, 교사와 함께 강의식으로 다시 한번 풀어보았으며, 이 때 학생들 개개인이 반성 활동을 할 수 있는 시간을 주었다. 모델링 기반 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습을 실시한 학급에서 교사는 다양한 표현을 하도록 유도하며, 문제에 제시된 함수적 상황과 독립변수와 종속변수의 관계를 해석하도록 안내하였다. 세 학습 방법을 실시한 모든 학급에서 학생들은 질적인 그래프로 제시된 함수적 상황을 해석하는 것을 학습하였다. 그러나 교과서를 위주로 한 강의식 표현변환 학습 방법에서는 주어진 그래프를 보고 거리 등의 해를 구하는 대수적 방법을 주로 학습하였으며, 모델링 관점에서의 표현변환 학습에서는 문제 상황을 제시하면서 학습지를 구성하였기 때문에 직접 질적 그래프를 그려보는 것을 주로 학습하였다. 그리고 과제기반 표현 간 변환 학습에서는 상황을 과제별 표현 간 번역을 할 수 있도록 재구성하였기 때문에, 질적 그래프를 보고 상황을 언어적으로 해석하는 학습을 주로 하였다.

사후검사는 6차시 동안의 교과서 위주, 모델링 관점과 과제기반 학습 후 동시에 실시하였으며, 검사 시간은 45분이었다. 사후검사 결과는 SPSS 11.0 for windows 프로그램을 사용하여 분산분석(ANOVA)을 실시하여 분석하였다. 이 때, 다중비교 사후분석인 Turkey방법도 함께 실시하여, 모델링 관점의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습의 두 학습 방법간의 유의적인 차이와 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습과 다른 두 표현변환 학습 사이의 유의적인 차이의 유무도 검증하였다. 또한, 모델링 관점의 학습과 과제기반 학습의 과정과 사전·사후검사에서 나타난 학생들의 결과를 바탕으로 두 학습 사이에 어떤 양상이 나타나며 유의적인 차이가 있는지도 조사하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 학생들의 오류 범주화

연구 문제 1에서는 학생들의 일차함수에 대한 문제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 분류할 때, 각 과제별 오류 유형과 질적 함수 해석에서의 오류 유형을 분석하였다. 오류 유형은 사전검사에서 학생들이 실제로 수행한 결과, 특히 그렇게 생각한 이유에 대한 서술과 풀이과정을 바탕으로 공통적으로 행하고 있는 오류를 중심으로 각 과제별로 분류하였다. 일반적으로, 학생들은 일차함수에서 알게 된 성질을 여러 표현으로 번역하거나 각 표현에서 그 의미를 해석할 때 오류를 범하는 경향이 있었다. 다음은 과제별로 분류한 오류 유형에 대한 구체적인 설명이다.

첫째, 예측과제에서 나타난 오류는 크게 두 가지로 그래프 정보의 해석 오류와 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류이다. 먼저, 그래프 정보의 해석 오류는 그래프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하거나, 그래프 위의 점들의 좌표로부터 기울기, y절편, x절편 등의 정보를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 오류를 범함으로써, 그래프 위의 다른 점들의 좌표를 예측하지 못하는 오류이다. 예를 들어, 사전검사지의 P1([그림Ⅳ-1] 참고)의 (3)번 문제에서 점($-\frac{1}{4}$, 1.2)이 주어진 그래프 위의 점인 지를 판단할 때, 주어진 그래프로부터 기울기와 y절편 등의 정보를 해석하여 함수식으로 번역하여 점($-\frac{1}{4}$, 1.2)의 그래프상의 위치를 확인해야 하는데도, 학생들의 80%가 그래프의 시각적인 정보만을 보고 예측하는 오류를 범하였다. 오직 12%의 학생들만이 점($-\frac{1}{4}$,

1.25)이 주어진 그래프 위의 점이라는 것을 확인하였으며, 2%의 학생들은 답을 하지 않았고, 6%의 학생들은 그래프의 정보를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 번역할 때 옳게 행하지 못하여 오류를 범하였다.

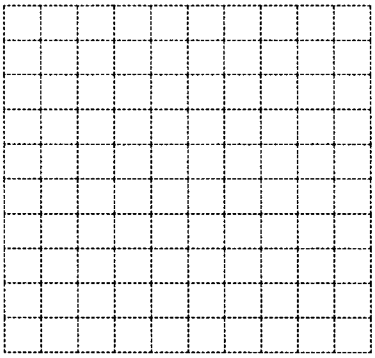
다음으로, 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류는 일차함수의 관계식을 대수적으로 해석하여 일차방정식으로의 전환을 제대로 행하지 못하거나 점을 대입하여 일차방정식으로 변형하여 연산할 때 계산 실수를 저지르는 오류를 말한다. 사전검사 결과, P2 문제를 풀 때 일부 학생들은 그래프 위의 점이라는 의미가 함수식에 그 점의 좌표를 대입하면 등식이 성립한다는 것을 이해하지 못하여 y절편 k를 구하지 못함으로써 그래프 상의 다른 점을 예측할 수 없었다. 또한 몇몇 학생들은 그 관계를 이해했지만 일차함수식에 점의 좌표를 대입하여 일차방정식을 풀 때 연산 실수를 하였다.

둘째, 번역과제의 오류는 표현 번역에서 나타나는 오류로, 그래프적 표현에서 기호적 표현으로 번역할 때와 기호적 표현에서 그래프적 표현으로 번역할 때 오류가 주로 발생하였다. 또한 기호적 표현과 언어적 표현 사이의 번역에서 그리고 그래프적 표현과 언어적 표현 사이의 번역을 할 때도 오류가 발생하였다. 학생들은 3번 문제를 풀 때 주어진 식에 수를 대입하여 함수값을 구하면서도 y라는 문자가 주어지지 않았기 때문에 함수식으로 표현을 하지 못하였다. 그리고 수표에 주어진 대수식으로 함수값을 구하거나, 기호적 표현으로 주어진 함수식을 이용하여 평행이동한 양의 값을 구하면서도 일차함수가 평행하다는 그래프적 개념으로 번역하지 못하였다. 다만, 그래프로 그려보도록 안내하는 문제를 풀어본 후, 두 대수식이 의미하는 바가 서로 평행인 일차함수를 의미한다는 것을 인식하였다. 주어진 그래프 표현과 기호적 표현사이의 관계를 알고 상호적으로 번역하도록 학생들에게 특정값을 제시하지 않고 그래프 개형으로 판단하도록 요구하자, 일부 학생들은 기호적 표현에서 기울기, y절편, x절편 등의 개념 해석을 옳게 하고 있음에도 불구하고, 그래프 상에서는 제대로 표현을 하지 못하는 오류를 보였다.

셋째, 해석과제에서 나타난 오류는 두 가지 유형으로 분류된다. 먼저, 표에 주어진 변수 관계를 해석할 때 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류인 변수 관계의 해석 오류가 발생하였다. 특히, 학생들은 3번 문제를 풀 때 주어진 식에 수를 대입하여 함수값을 구하면서도 독립변수 x와 종속변수 y의 관계로 해석하지 못하였다. 둘째는 표현 간 번역에서 관계 해석의 오류로, 표현 간 번역을 할 때 그 내포된 관계인 기울기, x 절편, y 절편, 평행이동, 연립방정식의 해와 두 일차함수의 교점의 관계 등을 잘못 해석하여 발생하는 오류와 함수식을 일차방정식으로 동치변형 할 때 저지르는 연산 오류, 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류가 이에 해당된다. 아래의 [그림Ⅳ-1]는 사전검사지의 예측과제, 번역과제, 해석과제 문제의 일부이다.

1. 아래의 그래프를 보고, 다음 표의 각각의 점이 직선 위에 있는 지를 해당 칸에 O,×표로 답하고 그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

점	직선 위에 있다	직선 위에 있지 않다	이 유
(1) (-2, 3)			
(2) (3.5, -2.5)			
(3)($-\frac{1}{4}$, 1.2)			



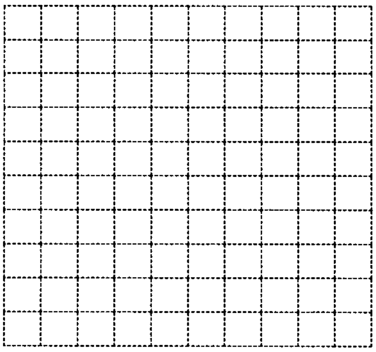
2. 일차함수 y=-2x+k는 두 점 (-2, 5), (2, □)를 지난다. 이 일차함수의 그래프는 (3.7, -6.4)를 지난다고 할 수 있는가? 자신의 답에 대해 그렇게 생각한 이유를 써라.

3. 다음 표를 완성하고 물음에 답하여라.

x	2x-6	2x+4
14		32
9		
-4		
	-10	0
	11	

(1) x에 대하여 변화하는 두 경우는 서로 어떤 관계가 있는가? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가?

(2) 각각의 그래프를 그린 후, 두 그래프 사이의 관계는 서로 어떤 관계가 있는가? 그렇게 생각한 이유를 써라.



(3) y=2x의 그래프에 평행하고 (-2, -10)을 지나는 일차함수를 구하여라(단, 풀이과정도 서술하시오).

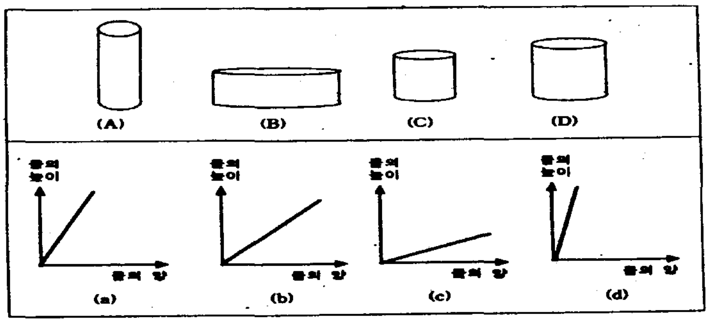
(4) 다음의 문장을 완성하고 그렇게 답한 이유를 쓰세요.

y=2x-6의 그래프를 y축의 (양 , 음)의 방향으로 □만큼 평행이동한 그래프는 (14, 32)를 지난다.

[그림Ⅳ-1] 사전검사지의 일부

8. 아래 그림은 모두 100g의 물을 담을 수 있는 물통이다. 일정한 속도를 유지하면서 각각 크기가 다른 네 물통에 호스로 물을 넣을 때, 네 개의 물통과 물통에 채워지는 물의 높이와 물의 양 사이의 관계를 나타낸 그래프를 서로 짝지어라.

(1)



(1) A와 ( ), B와 ( ), C와 ( ), D와 ( ).

그렇게 생각한 이유를 쓰세요.

(2) 물통 A의 높이를 50cm, 물통 B의 높이를 10cm, 물통 C의 높이를 30cm, 물통 D의 높이를 20cm라 할 때, 각 물통과 연결된 그래프의 기울기를 구하여라(단, 풀이과정도 서술하시오).

①물통 A와 연결된 그래프의 기울기:

②물통 B와 연결된 그래프의 기울기:

③물통 C와 연결된 그래프의 기울기:

④물통 D와 연결된 그래프의 기울기:

[그림Ⅳ-2]사전검사의 문제 8번

넷째, 척도과제에서 나타나는 오류는 척도 변화 인식의 오류로 주어진 그래프에서 시각적인 직선의 기울기에만 의존하여 척도를 고려한 기울기를 계산하지 않아서 발생한 오류이다. 대부분의 학생들은 모눈 칸에 주어진 단위거리를 인식하지 않고 기울기의 경사가 가파르면 빠른 것으로 생각하는 오류를 범하였고, 소수의 학생들은 기울기를 x의 증가량과 y의 증가량으로 해석하지 못하는 오류를 범하였다.

마지막으로, 질적 함수의 해석에서 나타난 오류 유형은 문맥 해석 오류와 표현 전환 오류가 있다. 문맥 해석 오류는 주어진 문제의 맥락을 해석하여 그 안의 숨은 관계를 해석할 때 오류를 저지르는 것을 의미한다. 예를 들어, 아래의 [그림Ⅳ-2]에 나타난 사전검사의 문제 8을 풀 때, 학생들은 그릇의 용기의 단면적이 작을수록 수면의 높이가 빠르게 올라간다는 것을 표현으로의 전환 오류로 분류될 수 있다. 물통 기울기와 관련시켜 해석하는 것을 어려워하였다. 표현 전환 오류는 해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류와 해석한 문맥의 기호적과 물의 높이에서 내포된 관계를 옳게 해석하였음에도 불구하고 해석한 문맥을 그래프 표현으로 잘못 전환하여 발생하는 오류는 해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류에 대한 예이며, 해석한 문맥에 특정한 수치를 주고 이를 대수적인 식과 같은 기호적 표현으로 변환하여 기울기 등으로 계산하도록 할 때 연산 실수로 발생하는 오류는 해석한 문맥의 기호적 표현으로의 전환 오류이다.

다음의 <표Ⅳ-1>는 사전검사를 토대로 작성한 것으로, 백분율로 계산한 오류 유형별 분석

표이다.

이상의 사전검사 결과, 중학생들은 일차함수 그래프의 주어진 정보로부터 점과 직선의 위치 관계를 해석하여 그래프 위의 다른 점의 좌표를 예측할 때는 그래프의 시각적 정보에 의존하는 오류를 주로 범하였고, 그래프의 전반적인 개형을 예측할 때는 일차방정식과 일차함수의 관계 해석에서 오류를 보였다. 또한, 대부분의 학생들이 번역과제에서 오류를 저지르는 비율이 다른 과제에 비해 높은 것을 볼 때, 표현간의 번역을 자유롭게 하지 못한다는 것을 알 수 있다. 번역과제와 마찬가지로, 학생들은 해석과제를 매우 어려워하였는데, 연산 오류보다는 함수식이나 그래프 등의 다양한 표현과 그 표현간의 번역에서 함수의 내포된 관계를 해석하지 못하는 오류의 비율이 더 높았다. 그리고 질적 함수의 해석 오류도 높은 비율을 보이고 있는데, 이는 일차함수 상황에서 질적 함수의 형태로 제시된 문항을 해결하려고 할 때, 문맥 해석의 오류나 표현 간 전환 오류를 저지르기

<표Ⅳ-1> 사전검사에서 오류 유형 분류

오류유형				합계 (200명)
예측 과제	그래프 정보의 해석오류	그래프의 시각적인 정보 읽기에만 의존하는 오류		84%(168명)
		그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 발생한 오류		6%(12명)
	일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류	일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류		51%(102명)
		연산 실수로 인한 오류		16%(32명)
번역 과제	표현 간 번역의 오류	그래프적 표현과 기호적 표현의 번역 오류	기호적 표현→그래프적 표현 번역에서의 오류	81%(162명)
			그래프적 표현→기호적 표현 번역에서의 오류	67%(134명)
		기호적 표현과 언어적 표현의 번역 오류		56%(112명)
		그래프 표현과 언어적 표현의 번역 오류		53%(106명)
해석 과제	변수 관계의 해석 오류	표에 주어진 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류		49%(98명)
	표현 간 번역에서 관계 해석 의 오류	표현 간 번역을 할 때, 내포된 관계의 해석 오류		73%(146명)
		함수식의 동치변형에서의 연산 오류		23%(46명)
		기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류		68%(136명)
척도 과제	척도변화 인식의 오류	시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류		86%(172명)
		기울기 개념의 해석 오류		13%(26명)
질적 함수의 해석 오류	문맥 해석 오류	주어진 문제의 맥락 해석의 오류		85%(170명)
	표현 전환 오류	해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류		12%(24명)
		해석한 문맥의 기호적(대수적) 표현으로의 전환 오류		85%(170명)

때문인 것으로 볼 수 있다.

2. 강의식, 모델링 관점, 과제기반에서 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석

강의식 표현변환 학습, 모델링 관점에서 표현변환 학습, 과제기반 표현변환 학습의 교수-학습 방법이 일차함수 활용단원 학업 성취도면에서 유의적인 차이가 있는지를 사후검사 점수를 종속변수로 하여 유의 수준 .05에서 분산분석(ANOVA)으로 검증한 결과, F-검정값이 3.864로 유의적인 차이가 나타났다. 이에 분산 분석에서 사후 비교 분석을 한 결과, 강의식 표현변환 학습 방법과 모델링 관점 및 과제기반에서의 표현변환 학습사이에는 유의적인 차이가 나타났다. 이 때, 강의식 표현변환 학습을 실시한 학급의 사후검사 평균 점수는 57.46점, 모델링 관점에서 표현변환 학습을 실시한 학생들의 사후검사의 평균은 68.04점, 과제기반 표현변환 학습을 실시한 학생들의 평균은 63.16점이었다. 따라서, 교과서 위주의 강의식 학습 방법보다는 모델링 관점에서의 표현변환 학습이나 과제기반 표현변환 학습이 표현간의 유연성과 학생들의 선수 경험과의 연결성 측면에서 교수학적 효과가 있는 것으로 해석할 수 있다.

그러나 Turkey 방법으로 다중비교 사후분석 결과, 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습에서 두 학습 방법 사이의 유의적인 차이는 나타나지 않았다. 하지만, 사전검사에서 각각 52점, 50점이었던 평균점수가 각각 63.16점, 68.04점으로 향상된 것으로 보아 두 학습법 모두 효과가 있는 것으로 볼 수 있다. 이를 검증하기 위해서 각각의 학습법에 대한 사전·사후검사 점수로 유의수준 .05에서 SPSS 11.0 for windows 프로그램을 사용하여 두 종속표본 t-검정을 실시하였다. 검정결과, t-검정값이 각각 유의 수준 .05에서 6.92와 5.53으로 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습이 학생들의 일차함수 활용 단원의 문제해결 능력 향상에 도움이 된다고 해석할 수 있다. 보다 자세히 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습간의 차이를 살펴보면 다음과 같다.

모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 경우, 학생들은 조별 활동을 통해 처음에는 표현에 대한 자신이 알고 있던 경험을 모두 시도하는 편이었다. 주로 표를 이용해 패턴을 찾거나, 그래프로 그려보거나, 그래프에서 특정한 정수좌표를 설정하여 식을 구하는 활동을 하였다. 그러나 점차 수업이 진행되어 가면서 교사의 조언과 학습지에서 다양한 표현으로 해석하여 문제를 해결하도록 한 결과, 학생들은 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 자연스럽게 형성해 나갔다. 두 일차함수에서의 변화를 비교할 수 있도록 모델링 관점의 학습 초기에는 관계식이나 패턴 등을 비교하고 이미 알고 있던 기울기 개념과 변화 관점을 함께 해석하도록 조언하였다. 그러나 점차 학생들 스스로 조별 활동을 하면서 그래프와 대수식 등을 비교하고 해석해 나가는 경향이 나타났다.

예를 들면, 원가-수익-이익에 대한 모델링 학습에서 주식시장의 변동 추세나 이익에 대한 그래프로 제시된 예측 문제를 풀 때, 먼저 그래프의 개형을 그리고 이를 해석한다. 그런 다음, 토론활동을 하면서 변화 추세를 예측하고 함수값들을 리스트화 해보며 기호적 표현을 사용하여 관계식을 구하려는 경향이 강하였다. 특히, 학생들은 예측과제를 풀 때 함수값들을 수표를 만들어 보거나, 수표나 그래프로부터 패턴을 찾기 위해 함수식을 구하려는 경향이 일반적으로 나타났다. 또한 일정한 물의 양에 홍차와 설탕의 농도사이의 관계에서 일차함수

와 상수함수의 관계가 혼합되어 수표로 주어진 아이스티 문제를 해결하려고 할 때, 학생들 스스로 변화의 비율을 비교·해석하여 일차함수의 규칙을 지니는 패턴과 상수 함수의 패턴을 발견하고 이를 언어적으로 해석할 수 있었다. 그리고 시간의 흐름에 따른 저축액의 증가 비율을 그래프로 그리도록 하는 용돈의 저축 문제를 제시하자, 학생들은 상황을 적절히 해석하여 질적인 그래프를 자연스럽게 그려나갔다.

위 <그림Ⅳ-3>의 체중 감량 문제는 그래프로 제시된 문제를 해석하여 주어진 상황을 보고서로 작성하기 위해 다양한 표현을 하도록 하는 문제이다. 최초의 몸무게만 주어진 문제였지만, 학생들은 그래프의 변화에 알맞은 수치 자료를 만들어 그래프에 나타난 독립변수와 종속변수의 공변화 관계를 해석할 수 있었다. 대부분의 학생들은 현주의 몸무게가 처음에는 일정하게 유지되다가 감소한 뒤 다시 일정하게 유지된다는 것을 해석하여 언어적으로 표현할 수 있었다. 그러나 감소하는 비율에 대해서는 <표Ⅳ-2>와 같이 해석이 서로 달랐는데 일정한 비율로 감소하는 것을 해석해 내는 학생은 80명의 학생 중 대략 50%정도였다.

6차시 동안 실시된 모델링 관점에서의 표현변환 학습에서 학생들은 공통적으로 함수를 다양한 표현 방법으로 해석하려는 경향을 보였다. 특히 질적 함수의 그래프에서 전반적인 경향에 대한 예측 문제를 비교에 의해 잘 해결하였고, 그래프의 특징을 언어적으로 정확하게 표현하였다. 예를 들어, 사후검사의 문제 8-(1)을 풀 때 모델링 관점에서 표현변환을 강조한 학습을 한 학생들은 물통의 모양과 물이 채워지는 속도의 관계를 그래프의 기울기로 해석해 보는 시행착오를 거치기도 하였지만, 소리 내어 생각해보는 과정을 거치면서 끈기 있게 물의 높이와 물의 양 사이의 관계를 기울기로 옳게 해석하였다. 그리고 과제기반 표현변환 학습을 한 학생들에 비해서, (c)와 (d)의 물통 모양처럼 윗부분과 아래 부분의 물통 모양이 같을 때는 물의 높이를 나타낼 때의 기울기가 같다는 것을 더 정확히 표현하였다. 이러한 결과는 모델링 관점에서의 표현변환학습이 학생들

다음의 그래프는 12일 동안 현주의 몸무게가 변화한 것을 나타냅니다. 시간이 지남에 따라 56.5 kg이었던 현주의 몸무게가 어떻게 변화되었는지를 해석해 보고, 그 근거를 제시하여 다이어트 상황을 보고서로 작성해 보세요.

현주의 몸무게

시간

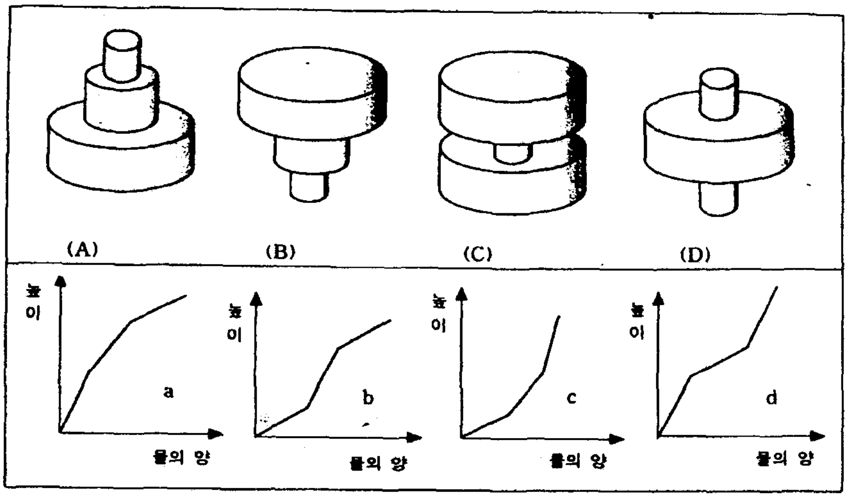
[그림Ⅳ-3] 모델링관점에서의 표현변환 학습 중 체중감량 문제

<표Ⅳ-2> 체중감량 문제에서 학생 4명의 활동 예

일 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
현주의 몸무게	56.5	56.5	56.5	56.5	56	55	54	53	53	53	53	53
현주의 몸무게	56.5	56.5	56.5	55.5	54.5	53.5	52.5	51.5	50	50	50	50
현주의 몸무게	56.5	56.5	56.5	55	54.5	53	52.5	51	51	51	51	51
현주의 몸무게	56.1	56.1	56	55.9	55.8	55.7	55.6	55.5	54	54	54	54

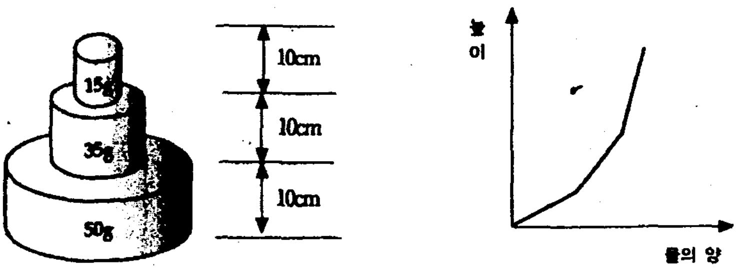
8. 아래 그림은 모두 100g의 물을 담을 수 있는 물통이다. 일정한 속도를 유지하면서 각각 크기가 다른 네 물통에 호스로 물을 넣을 때, 네 개의 물통에 채워지는 물의 높이와 물의 양 사이의 그래프를 서로 짝지어라.

(1)



A와 ( ), B와 ( ), C와 ( ), D와 ( )

(2) 다음은 물통 A의 각 부분의 높이와 각 부분에 들어갈 수 있는 물의 양, 그리고 이 물통과 연결된 그래프를 나타낸 것이다. 물통의 아랫부분, 중간 부분, 윗부분에 해당하는 그래프의 함수식을 구하여라.



(1) 아랫부분:

(2) 중간부분:

(3) 윗 부분:

[그림Ⅳ-4] 사후검사의 8번 문항

로 하여금 일차함수 관계를 파악하고 그에 대한 수학적 개념 학습을 할 때, 직접 물리적 실험은 하지 않았지만 실제에서 발생할 수 있는 상황에 대한 역동적이고 상호작용적인 모델링 관점에서 주어진 문제 맥락을 해석하고 이를 다양한 표현으로 번역할 수 있게 한다고 볼 수 있다. 이는 모델링 관점에서 표현변환 학습이 기존에 학습했던 일차함수의 속성들을 학생 스스로 유의미하게 내적으로 재구성할 수 있게 돕는 역할을 수행하는 것으로 해석될 수 있다. 또한 이 과정은 함수의 그래프를 해석하는 능력의 향상에도 영향을 주는 것으로 보인다. [그림 Ⅳ-4]은 사후검사의 8번 문항이다.

표현 간 번역을 강조한 과제기반 학습을 한

5. 다음의 방정식 중 어느 것이 주어진 직선의 그래프를 나타낼 수 있는 방정식인가? 정답을 골라 ( )에 표시하고 선택한 이유를 써라.

① y=x+5 ( )
선택 이유:

② y=2x-4 ( )
선택 이유:

③ y=-2x+3 ( )
선택 이유:

④ y=-3x-5 ( )
선택 이유:

⑤ 위의 방정식 중 어느 것도 주어진 직선의 방정식이 아니다.
왜냐하면,

[그림Ⅳ-5] 사후검사의 5번 문항

학생들은 교사의 조언이 있을 때만 일차함수의 표현에서 공변화 패턴을 자발적으로 해석하는 경향이 있는 것으로 볼 때, 모델링 관점의 학급 학생들보다 함수적 상황을 공변화 관점에서 해석하는 능력은 약한 편으로 볼 수 있다.

그러나 [그림Ⅳ-1]의 3번과 동형인 사후검사지의 3번 문항과 같이 과제별로 제시된 표현을 번역할 때는 정답율이 세 학습 방법 중 가장 높았다. 또한 기울기의 변화가 큰 부분에서 두 변수가 모두 증가할 때를 번역하는 것을 가장 쉬워하였으며, 한 독립변수는 증가하는데 종속변수는 감소할 때를 하 수준의 학생들은 어려워하였다. 그러나 과제기반 학습을 수행한 학생들은 모델링 관점의 학습을 한 학생들보다 기호적 표현을 더 잘 사용할 수 있었다. 예를 들어, [그림Ⅳ-4] 문제 8-(2)를 풀 때 모델링 학습을 한 학생들은 질적인 그래프의 해석은 잘 하였지만, 직접 수치를 넣어서 기울기를 계산할 때는 과제기반 학습을 한 학생들이 연산 실수를 거의 하지 않았다. 또한, 대수적인 해석과 이를 활용한 문제해결을 잘 수행하였다. 이는 과제기반 학습을 행한 학생들이 모델링 관점에서의 표현변환 학습을 수행한 학생들보다 그래프를 기호적으로 정교하게 표현 번역을 더 잘 하는 것으로 해석할 수 있다.

그러나 과제기반 표현변환 학습을 한 학생들은 그래프의 기울기가 거의 변화하지 않을 때와 기울기가 음이 될 때 해석하는 것을 어려워하였다. 예를 들어, 붓꽃의 성장과 시간의 관계를 수표로 번역해 보고 그래프로 번역할 때, 기울기의 변화가 없는 부분을 성장이 다 이루어져서 붓꽃의 키가 시간이 지나도 변함이 없다고 해석하는 것을 어려워하였다.

양초의 길이와 시간의 관계, 붓꽃의 성장과 시간의 관계, 자동차 경주에 대한 문제를 표와 그래프 표현간의 번역, 표와 기호적 표현간의 번역, 그래프 표현과 기호적 표현간의 번역을 할 때, 각각에 내포된 관계를 해석하였다. 이때, 학생들은 이미 알고 있던 일차함수의 기울기, y절편, x절편, 평행이동, 연립방정식의 해가 두 일차함수를 나타내는 직선의 교점과 같다는 개념을 문제해결 과정에서 자발적으로 확인하는 경향이 있었다. 즉, 모델링 관점에서의 학습을 행한 학생들보다는 일차함수에 대한 선수 교과 내용에 대한 충실한 반성의 시간을 가질 수 있었다. [그림Ⅳ-5] 사후검사의 5번 문항과

같이, 주어진 직선의 그래프로부터 기울기와 y절편 등의 정보를 읽고 대수적 표현으로 번역해 보는 문제를 풀 때, 학생들은 자신이 알고 있던 기울기와 y절편의 성질을 스스로 확인하는 것을 모델링 관점의 학습을 한 학생들보다 더 정확하게 행하였다.

그리고 모델링관점에서 표현변환 학습은 학습 초기에 교사의 조언이 세 학습 방법 중 가장 많이 행해졌다. 반면, 과제기반 학습에서는 수업을 행하기 전에 과제별로 재구성하여 조직해 놓은 학습지의 문제를 풀면서 학습하기 때문에 교사의 조언이 모델링 관점의 학습보다 적었다. 이 때, 학생들의 질문도 모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 학생들의 질문보다 구체적이었으며, 주로 기호적 표현과 그래프적 표현을 할 때 수치적으로 번역하여 해석하는 국소적인 관점을 취할 때가 많았다.

이상의 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습에서의 차이점을 요약하면 다음과 같다. 모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 학생들이 보다 다양한 표현 방법을 사용하는 경향이 있으며 질적 함수의 해석을 잘하는 것으로 볼 수 있다. 그러나 대수식, 방정식 등의 기호적 표현을 사용할 때는 과제기반 학습의 학생들보다 정교성이 떨어지는 경향이 있었다. 과제기반 표현변환 학습을 한 학생들은 표와 그래프 표현, 기호적 표현간의 번역을 하면서 문제를 풀 때, 이미 알고 있던 일차함수의 기울기, y절편, x절편, 평행이동, 연립방정식의 해가 두 일차함수를 나타내는 직선의 교점의 좌표값과 같다는 개념을 문제해결과정에서 자발적으로 확인하는 경향이 있었다.

3. 오류 교정의 측면에서 교수학적 효과 분석

연구 문제 3에서, 일차함수의 활용단원을 강의식 표현변환 학습을 한 경우와 모델링 관점에서 표현 간 변환을 강조하여 학습한 경우, 과제기반 학습에서 표현 간 변환을 강조하여 학습한 경우, 학생들의 각 과제와 질적 함수의 해석의 측면에서 오류 교정은 어떤 양상으로 나타나는지와 세 학습간의 유의적인 차이가 있는지를 조사하였다.

먼저 각각의 학습에서의 오류 교정 효과를 살펴보면, 다음의 <표Ⅳ-3>으로 정리된다. 사전검사의 학생수는 각각의 학습에서 오류를 보였던 학생들의 총수이며 사후검사의 학생수는 오류가 교정된 학생수를 나타낸다.

이상의 표를 중심으로 오류 교정에 대한 연구 결과를 살펴보면, 강의식 표현변환 학습 보다 다른 두 학습에서 오류 교정 효과가 더 큰 것을 알 수 있다. 그리고 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습 모두에서 대부분의 오류가 50%이상 교정되는 것을 알 수 있다. 특히 모델링 관점에서의 표현 간 변환을 강조한 학습을 실행한 경우, 해석과제 영역과 질적 함수의 해석 영역에서 오류를 가장 효과적으로 교정하는 것을 볼 수 있었다. 또한, 과제기반 표현 간 변환 학습을 한 경우는 예측과제와 번역과제 영역에서 가장 큰 오류 교정의 효과를 얻었다.

그러나 표현 간 번역의 오류 중 기호적 표현과 그래프적 표현에서 언어적 표현으로 번역할 때는 모델링 관점에서 표현 간 변환 학습을 한 경우가 교정율이 각각 60%, 70%로 가장 높았다. 이러한 결과는 모델링 관점에서의 표현변환 학습에서 일차함수 관계를 파악할 때 학생들이 직접 물리적 실험을 하지는 않았지만, 실제 발생할 수 있는 상황에 대하여 모델링 관점에서 주어진 문제 맥락을 해석하고 조별 토론 활동을 하여 언어로 표현하는 것을 자연스럽게 익혔기 때문인 것으로 생각된다. 즉, 다른 두

<표Ⅳ-3> 오류 교정 효과 분석

오류 유형			강의식			모델링 관점			과제기반		
			사전검사(명)	사후검사(명)	교정율(%)	사전검사(명)	사후검사(명)	교정율(%)	사전검사(명)	사후검사(명)	교정율(%)
예측과제	그래프정보의 해석오류	그래프의 시각적인 정보 읽기에 의존하는 오류	34	12	35%	65	35	54%	69	40	58%
		그래프 상의 한 점의 좌표를 읽은 후 그 관계를 함수식으로 옳게 번역하지 못하여 발생한 오류	3	1	33%	4	2	50%	5	3	60%
	일차방정식과 일차함수의 관계 석상의 오류	일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류	20	7	35%	40	23	58%	42	28	67%
		연산 실수로 인한 오류	7	3	43%	15	8	53%	10	7	70%
번역과제	표현 간 번역의 오류	그래프적 표현과 기호적 표현의 번역 오류: 기호적 표현→그래프적 표현 번역에서의 오류	33	12	36%	67	38	57%	62	38	61%
		그래프적 표현과 기호적 표현의 번역 오류: 그래프적 표현→기호적 표현 번역에서의 오류	27	8	30%	56	32	57%	51	32	63%
		기호적 표현과 언어적 표현의 번역 오류	22	6	27%	46	28	60%	44	24	55%
		그래프 표현과 언어적 표현의 번역 오류	22	8	36%	40	28	70%	44	26	59%
해석과제	변수관계의 해석 오류	표에 주어진 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류	20	8	40%	38	31	82%	40	30	75%
	표현 간 번역에서 관계 해석 의 오류	표현 간 번역을 할 때, 내포된 관계의 해석 오류	30	10	33%	56	42	75%	60	38	63%
		함수식의 동치변형에서의 연산 오류	10	4	40%	16	9	56%	20	10	50%
		기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류	17	6	35%	60	32	53%	59	30	51%
척도과제	척도변화 인식의 오류	시각적인 직선의 기울기에만 의존한 오류	35	20	57%	69	55	80%	68	54	79%
		기울기 개념의 해석 오류	5	1	20%	9	5	56%	12	7	58%
질적 함수의 해석 오류	문맥 해석 오류	주어진 문제의 맥락 해석의 오류	34	6	18%	69	45	65%	67	33	49%
	표현 전환 오류	해석한 문맥의 그래프 표현으로의 전환 오류	5	1	20%	10	6	60%	9	5	56%
		해석한 문맥의 기호적(대수적) 표현으로의 전환 오류	34	5	15%	65	38	58%	71	36	51%

학습 방법 보다 모델링 학습에서는 함수적 상황을 다양하게 표현하기 전에 말로 문맥상 의미나 그래프 표현을 언어적 표현으로 번역하도록 함으로써, 함수의 그래프 해석 능력에 대한 언어적 표현 능력이 전반적으로 향상된 것으로 보인다.

척도과제의 경우, 시각적인 직선의 기울기 정보에만 의존하여 발생하였던 오류는 세 학습 모두에서 50%이상 교정되었지만, 다른 영역의 오류가 교정될 때와 유사하게 모델링 관점과 과제기반 표현 학습의 경우의 교정율이 강의식 학습의 경우보다 20%이상 높았다. 그러나 모델링 관점과 과제기반의 두 학습 간의 교정율은 80%, 79%로 큰 차이가 나타나지는 않았다.

V. 결론

함수는 다양한 맥락에서 자유롭게 표현을 창조적으로 응용할 수 있도록 교수될 필요가 있으며, 그래프와 대수식, 표와 같은 함수의 표현들을 나타내는 것과 이러한 표현들 사이를 자유롭게 번역하는 능력은 함수학습에서 매우 중요한 요소이다. 본 연구에서는 일차함수의 활용 문제를 학습-지도할 때 학생들의 표현에 대한 이전 경험과 주어진 현상을 해석하기 위해 기존에 알고 있는 표현을 사용하는 방법을 효과적으로 연결시켜 교수하는 방법을 조사하였다. 이 때, 일차함수의 활용 단원을 강의식 표현변환 학습, 모델링 관점에서의 표현변환 학습, 과제기반 표현변환 학습을 실시하여, 세 학습-지도 방법상의 유의적인 차이를 통계적으로 분석하여 그 교수학적 효과를 조사하였다. 또한, 학생들의 일차함수에 대한 각 과제별 오류 교정과 질적 함수의 해석측면에서 나타나는 오류 교정의 측면에서 분석하였다.

먼저, 일차함수를 학습한 중학교 2학년 학생들을 대상으로 일차함수 단원을 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제로 세분화하여 각각에 대한 학생들의 오류를 분석한 다음, 일차함수의 활용 단원을 교과서 위주의 강의식 표현변환 학습, 모델링 관점에서 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습을 실시하였다.

연구 결과, 학생들의 일차함수에 대한 문제를 예측과제, 번역과제, 해석과제, 척도과제와 질적 함수의 해석으로 분류할 때, 각 과제별 오류 유형은 다음과 같다. 예측과제에서 나타난 오류는 그래프 정보의 해석 오류와 일차방정식과 일차함수의 관계 해석상의 오류가 나타났다. 번역과제에서의 오류는 표현 번역에서 나타나는 오류로, 그래프적 표현에서 기호적 표현으로 번역할 때와 기호적 표현에서 그래프적 표현으로 번역할 때 오류가 주로 발생하였다. 해석과제에서 나타난 오류는 표에 주어진 변수 관계를 해석할 때 독립변수와 종속변수의 공변화 관점을 인식하지 못하여 각각의 변화 패턴만을 해석하는 오류와 표현 간 번역에서 관계 해석의 오류, 함수식을 일차방정식으로 동치변형 할 때 저지르는 연산 오류가 있었다. 척도과제에서 나타나는 오류는 주어진 그래프에서 시각적인 직선의 기울기에만 의존하여 척도를 고려한 기울기를 계산하지 않아서 발생한 오류가 대부분이었으며, 질적 함수의 해석에서 나타난 오류 유형은 문맥 해석 오류와 표현 전환 오류가 있었다.

연구 문제 2에서, 표현변환 학습에서 강의식, 모델링, 과제기반 학습의 교수학적 효과를 사후검사 점수를 중심으로 분석한 결과, 강의식 학습보다는 모델링 관점과 과제기반 학습에서의 표현 간 변환 학습이 더 효과적인 것으로

나타났다. 그리고 강의식 학습 방법을 제외한 다른 두 학습 방법의 사전검사의 평균 점수가 각각 52점, 50점이었으나, 모델링 관점에서 표현변환 학습을 실시한 후 학생들의 사후검사의 평균은 68.04점, 과제기반 표현변환 학습을 실시한 후 학생들의 평균은 63.16점으로 향상되었다. 그러나 유의 수준 .05에서 분산분석에서 사후 비교 검증을 실시한 결과, 두 학습방법간의 학업성취도 면에서의 유의적인 차이는 나타나지 않았다. 그러나 모델링 관점에서의 표현변환 학습과 과제기반 표현변환 학습 과정을 관찰한 결과, 모델링 관점에서 표현변환 학습을 한 학생들이 보다 질적 함수의 해석을 잘하였으며, 과제기반 표현변환 학습을 한 학생들은 표와 그래프 표현, 기호적 표현간의 번역을 하면서 문제를 풀 때, 학생들은 이미 알고 있던 일차함수의 기울기, y절편, x절편, 평행이동 등의 개념을 스스로 확인하는 경향이 있었다.

연구문제 3에서 오류 교정 효과는, 일차함수의 활용단원을 모델링 관점에서 표현 간 변환을 강조하여 학습한 경우와 과제기반 학습에서 표현 간 변환을 강조하여 학습한 경우, 강의식 표현변환 학습보다 다른 두 학습에서 대부분의 오류가 50%이상 교정되었다. 특히 모델링 관점에서의 표현변환을 강조한 학습을 실행한 경우, 해석과제 영역과 질적 함수의 해석 영역에서 오류 교정에 더 효과적이었으며, 과제기반 표현변환 학습은 예측과제와 번역과제 영역에서 오류 교정에 더 효과적이었다. 그리고 척도과제의 경우, 두 학습 모두 오류가 교정되었으나 두 학습 간의 유의미한 차이가 나타난 것은 아니었다.

이상의 연구 결과에서 볼 수 있듯이, 다양한 표현들은 일차함수 개념의 다른 측면을 보다 명백하게 표현할 수 있도록 하며 이러한 복합적인 표현으로부터 얻은 정보는 한 가지 표현으로부터 얻은 정보보다 일차함수적 상황을 해석하는데 더 많은 도움과 안목을 제공할 것으로 생각된다.

그리고 다양한 표현들 사이의 관련성을 구체적으로 학습자들의 경험과 결부시켜 이해하도록 하는 모델링 관점의 학습은 의사소통의 기회를 제공할 수 있다.

이는 모델링 관점에서 일차함수 활용문제를 해결할 때 학생들은 문제 상황을 이해하고 해결법에 대한 의견을 교환할 수 있어 언어적 추론을 통한 문제해결을 할 수 있음을 시사한다. 또한, 일상생활과의 연관성을 접할 수 있는 기회를 가질 수 있으며, 수치적 표현이나 기호적 표현, 그래프적 표현의 유용성과 한계성을 체험할 수 있는 기회가 된 것으로 보인다.

이에, 본 연구에서 제시한 두 가지 학습-지도 방법은 학생 개개인의 사고방식에 적합하게 문제를 표현하고 다양한 방법으로 문제를 해결하도록 도울 수 있을 것으로 생각된다. 또한, 여러 가지 표현의 장단점을 깨닫고 다양한 표현들을 자유롭게 변환하면서 두 학습-지도 방법을 상호보완적으로 교수한다면 보다 효과적일 것이다.

마지막으로, 학생들이 다양한 표현 방법을 응용할 수 있는 효과적인 문제와 과제를 고안하고 이를 실천할 수 있는 보다 다양한 학습-지도 방법의 개발과 검증이 있어야 할 것으로 생각된다. 또한, 이에 대한 학생들의 표현 능력을 평가할 수 있는 다양한 방법들에 대한 연구가 있어야 할 것이다.

참고문헌

강행고 외(2002). **중학교 수학 8-가 교과서**. (주) 중앙교육진흥연구소.

이준열 외(2002). **중학교 수학 8-가 교과서**. (주) 도서출판 디딤돌.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

이종희 · 김부미(2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석. **학교수학** 5(1). 115-133.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

정인경(2002). **일차함수 지도에서의 그래핑 테크놀로지의 활용효과**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

Abrams, J. P. (2001). Teaching mathematical modelling and the skills of representation. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Carraher. D. & Earnest, D. (2003). Guess my rule revisited. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education2*. 173-180.

Chazan, D. (1993). F(x)=G(x)? An approach to modelling with algebra. *For the Learning of Mathematics 13*(3), 22-26.

Clement, J. (1989). Misconceptions In Graphing *Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [ED411130]

Diezmann, C. & English, L. (2001). Prompting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Doerr, H. M. (2003). Using students' ways of thinking to re-cast the tasks of teaching about function. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*. 333-340.

Doerr, H. M. & Tripp, J. S. (1999). understanding how students develop mathematical models. *Mathematical Thinking and Learning, I*(3), 231-254.

Dunham, P. H. & Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students' Graphing Difficulties *Focus on Learning Problems in Mathematics 13*(4), 35-49.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems : Is the concept of a variable so difficult for students to understand? *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1*. 49-65.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goldenberg, E. P. et al. (1992). Representation and the development of a process understanding of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of

America.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Hung, C. (1995). *Students' reasoning about functions using dependency ideas in the context of an innovative, middle school mathematics curriculum.* Unpublished doctorial dissertation, University of Wisconsin-Madison.

Izsak, A. (2003). We want a statement that is always true: criteria for good algebraic representations and development of modelling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191-227.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Origins and evolution of model-based reasoning in mathematics and science. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructi- vism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NJ.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr(Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NJ.

Lesh, R. & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NJ.

Moschovich, J., Schoenfeld, A.H. & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: on multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, and T. P. Carpenters (Eds.), *Intergrating research on the graphical representation of function*, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics: An overview.* National Council of Teachers of Mathematics Reston, VA:Auther.

O'keefe III, J. J. (1992). *Using dynamic representation to enhance students' understanding of the concept of function.* Unpublished doctorial dissertation, University of Boston College.

Presmeg, N. (2002). Shifts in meaning during transition. In G. Abreu, A. J. Bishop, N. C. Presmeg (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practices.* Kluwer Academic Publishers.

Rizzuti, J. M. (1991). *Students' conceptualizations of mathematical functions: the effects of a pedagogical approach involving multiple representation.* Unpublished doctorial dissertation, Cornell University.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*, 145-152.

Schoenfeld, A. H. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs, *International Journal of mathematics education and science technology, 23*(1), 39-50.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Image and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables, *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 431-446.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001). A visual course to the concept of function. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Zalsvavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1). 20-44.

An Analysis of Teaching and Learning Methods Focusing on the Representation-Shift of the Functional Context.

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)
Kim, Bu Mi (Graduate School of Ewha Womans University)

This paper investigates the teaching and learning of Linear function relating functional contexts and suggests the improved methods of representation-shift through this analysis. The methods emphasize the link between students' preacquired knowledge of mathematical representations and the way of using those. This methods are explanatory teaching, teaching and learning based on modelling perspectives or tasks(interpretation, prediction, translation and scaling).

We categorize the 8th grade middle school students' errors on the linear function relating real contexts and make a comparative study of the error-remedial effects and the teaching and learning methods. We present the results of a study in which representation-shift methods based on modelling perspectives and tasks are more effective in terms of flexible connection of representations and error remediation. Also, We describe how students used modelling perspective-taking to explain and justify their conceptual models, to assess the quality of their models and to make connection to other mathematical representation during the problem solving focusing on the students' self-diagnosis.

* **Key words**: representation(표현), modelling perspective(모델링관점), task-based teaching and learning method(과제기반 학습-지도방법), linear function(일차함수), mathematical error remediation(오류교정)