大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 14 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.1, 1-17. Feb 2004

중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰[1)]

김 흥 기*

본 연구는 중학교 과정에서 순환소수의 취급에 관하여 알아보는 것으로 교육과정에 제시된 관련 내용을 분석하고 그에 따른 현행 교과서를 살펴보아 문제점을 알아보았고, 다음에 관련된 분야의 일부 외국교과서를 비교 분석하여 보았다. 현행 교육과정과 교과서 보다 바람직한 지도방안은 우선 체계적인 학습을 할 수 있도록 교육과정에서 보다 적합한 학습내용과 그 취급을 제시해야만하고, 이에 따라 교과서도 보다 적합하게 순환소수를 취급하고 그에 따른 무리수를 도입하는 것이 바람직 할 것이다. 특히 순환소수는 무한소수가 아닌 그냥 소수로 도입하여 숫자 0 을 순환마디로 사용할 것을 제시하고, 교육의 다양성을 위해서 직관적이기는 하지만 현행교과서에서의 취급보다는 일반적인 방법으로 순환소수와 유리수의 관계를 명확히 규명하여 무리수의 도입을 무한소수로서 잘 도입하도록 제시하였다. 그리고 무리수라는 용어의 도입만은 현행 교육과정과는 달리 순환소수의 취급 과정에서 함께 다루는 것이 바람직함을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

순환마디가 10 인 순환소수 0.101010 … 이 어떤 수인가를 명확히 알려면 극한 개념을 사용하여야 한다. 곧, 수열

$x_1 = 0.10,\ \ x_2 = 0.1010,\ \ x_3 = 0.101010,\ \cdots,$

$x_n = \frac{10}{99}\left\{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right\}$, …에서 0.101010… $= \lim_{n\to\infty} x_n$ 이다. 따라서 순환소수를 엄밀히 다루기 위해서는 극한개념이 필요하다. 그러나 중학교 과정에서는 극한 개념의 학습이 없이 순환소수를 다루고 있다. 따라서 순환소수의 취급은 직관적일 수밖에 없고 그에 따른 문제점도 일어나게 된다. 특히 0.999 … 는 이론적이 아닌 경험적으론 9 를 아무리 계속하여 한없이 나열하여도 1 보다는 작은 수로 생각되어 0.999 … = 1 을 이해하는 것이 쉽지 않고 이에 대하여 많은 학생들이 의문을 제기하고 있다.

또 수학에서 이항연산 $a+b$, $a-b$, $a\times b$, $a\div b(b\neq 0)$는 a, b가 명확하게 정해진 대상일 때 정의되는 것이다. 그런데 0.101010 … 은 극한 개념을 학습하지 않은 중학교 과정에서는 명확하게 정해진 수로 받아들이기가 어렵다. 따라서 순환소수를 분수로 표현하기 위한 과정에서 중학교에서 하는 계산 곧 10 의 거듭제곱을 곱하고 또 그들을 빼는 이를테면, 100×0.101010 … , 100×0.101010 … − 0.101010 …등은 수학적으로 의미가 없는 식들이다. 이

* 단국대학교, hkkim@dankook.ac.kr

1) 이 연구는 2002 학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

와 같은 문제점이 있는데도 중학교 과정에서 순환소수를 취급하는 것은 무엇 때문일까? 그 이유 중 가장 큰 것은 무리수의 도입 때문일 것이다. 무리수 도입 이전에 귀류법증명 방법에 관하여 학습하였다면 $x^2=2$가 되는 수 x, 곧 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보여 유리수가 아닌 수가 있음을 보일 수 있고, 또 실수의 연속성을 사용하여 $x^2=2$가 되는 수 x가 존재함을 보임으로써 무리수를 도입할 수도 있지만, 귀류법 증명이나 실수의 연속성을 사용하지 않고서 유리수가 아닌 수가 있음을 보이려면 수의 소수 표현을 이용하면 된다. 무리수의 도입 이전에 귀류법 증명을 취급하지 않는 우리 나라에서는 이에 맞추어 교육과정에서도 무리수의 도입은 무한소수를 이용하도록 하고 있다. (실은 무한소수로 보다는 소수를 이용하여 도입하는 것이 바람직하다. 왜냐하면 순환소수의 도입을 무한소수보다는 소수로 도입하는 것이 보다 간결하기 때문이다.)

교육과정에 따르면 유리수의 소수표현을 규명하고 그것에 의해 무리수를 도입해야하므로 수의 소수표현에서 우선 유리수와 그 수의 소수 표현의 관계 곧, "모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있고, 모든 순환소수는 유리수로 나타낼 수 있다"를 밝혀 유리수와 순환소수가 수로서 같은 수임을 알아야 한다. 그런 후에 소수 중에는 순환소수가 아닌 수의 보기는 쉽게 들 수 있으므로 이러한 보기를 통하여 순환소수가 아닌 수 곧 유리수가 아닌 수가 있음을 보여 무리수를 도입해야 한다 .

그러나 이와 같은 취급을 하도록 한 교육과정에 제시된 내용 중에는 문제점을 안고 있고, 이에 따른 현행 교과서를 살펴보면 그들 나름대로 문제점을 내포하고 있는 것들이 있다.

여기서는 우선 관련 내용에 관한 교육과정과 교과서들을 살펴보고 보다 바람직한 도입 및 지도 방안을 제시하고, 특히 직관적이기는 하지만 보다 일반적인 경우에서의 순환소수의 지도를 제시하려고 한다.

II. 제 7차 교육과정과 현행 교과서의 분석

1. 제 7차 교육과정

〈8-가 단계〉에서의 유리수와 순환소수에 대한 내용으로 교육과정에서 제시한 것은 다음과 같다.

「 1 유리수와 소수
①유리수를 소수로 나타낼 수 있다.
2 유리수와 순환소수
①유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.
<학습 지도상의 유의점>
① 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 강조하지 않는다.
② 순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것을 강조하지 않는다.
[심화 과정]
① 순환소수의 대소 관계를 알 수 있다.」

위 2의 "①유리수와 순환소수의 관계를 이해한다."는 유리수와 순환소수의 관계를 알도록 하여 〈9-가 단계〉에서 무리수 도입에 무한소수를 사용하기 위한 것으로 올바른 제시이다. 왜냐하면 귀류법 증명이 제시되지 않은 현 교육과정에서 무리수의 존재는 학습지도상의 유의점으로 제시한 「무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다.」에 따를 수밖에 없기 때문이다. 그런데 위의 <학습 지도상의 유의점> ①은 오히려 유리수와 순환 소수 관계를 간결하게 규명하는 것을 막고 있어 그 제시가 타당하지 않다. 왜냐하면 일반으로 유한소수도

순환소수로 나타낼 수 있으므로 이 사실을 사용하면 현행 우리 나라의 교과서에서 유리수와 순환소수의 관계를 규명하면서 주로 많이 사용하는 표현 「유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.」를 「유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다.」와 같이 간결하게 나타낼 수 있기 때문이다. 일반적으로 순환 소수를 분수로 고칠 때에는 주어진 순환 소수의 순환 마디의 개수가 n 일 때 그 순환 소수에 10^n을 곱한 것에서 주어진 순환 소수를 빼는 방법으로 구할 수 있으므로, 순순환소수와 혼순환소수의 분수 표현에 대한 공식에 관한 언급인 위의 <학습 지도상의 유의점> ②와 같은 내용도 제시될 만한 가치가 없다. 또 [심화과정]에서 「① 순환 소수의 대소 관계를 알 수 있다.」는 순환 소수를 분수로 고쳐서 비교하는 것으로 이것은 결국 분수의 대소 관계를 구하는 것으로 초등학교에서 취급하는 내용이 되어 의미가 없다. 실제로 현행 교과서에서는 초등학교에서 유한소수들의 대소를 비교하듯이 순환소수의 소수점 아래의 숫자의 크기를 비교하여 판별하는 방법을 사용하고 있는데 이것은 잘못된 지도이다.

〈9-가 단계〉에서는 무리수를 도입하기 전에 우선 제곱근의 뜻을 알고 그 성질을 이해한 후에 무리수의 개념을 이해하도록 다음과 같이 제시하였다.

「 1 제곱근과 실수
① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
② 무리수의 개념을 이해한다.
③ 수직선에서 실수의 대소관계를 이해한다.
2 근호를 포함한 식의 계산
① 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈을 익숙하게 할 수있다.
② 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈을 익숙하게 할 수있다
<학습 지도상의 유의점>
① 무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다.
② 제곱근의 근사값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하고, 제곱근 풀이법은 다루지 않는다.
〔심화 과정〕
① 임의의 두 실수 사이에 존재하는 실수를 찾는 방법에 대하여 알아본다.」

위의 <학습 지도상의 유의점> ①에서 무리수의 도입은 무한소수, 곧 순환하지 않는 무한소수를 소재로 하도록 하였는데, 실제로 순환소수와 유리수의 관계는 1년 전인 〈8-가 단계〉에서 다루었으므로 연계성에 긴 간격이 있게 된다. 결국 다시 순환소수와 유리수와의 관계 규명이 필요하게 된다. 따라서 용어 무리수의 정의는 〈8-가 단계〉에서 순환소수와 함께 다루고, 이곳에서는 제곱근으로 표현되는 수들 중에도 무리수가 있음을 알려 주고 이들 무리수를 다루는 것이 바람직할 것이다.

2. 현행 우리 나라의 교과서

우선 용어의 정의에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

① 유한소수의 정의는 모든 교과서에서 "소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수"라고 하고 있고, 이 경우 소수점 아래의 숫자로 0만 있는 경우는 생각하지 않는 경우이다. 실제로 미국의 많은 교과서에서는 숫자 0을 순환마디로 사용하면서 유한소수를 순환마디가 0인 소수로 정의하고 있고, 이와 같은 정의는 직관적이기보다는 상당히 엄밀한 정의로 그 의의가 크다. 서언에서의 순환소수 0.101010 ⋯ 을 살펴보면 소수점 아래의 숫자로 0이 계속하여 나타나는데 이와 같이 다른 수와 함께 나

타나는 0은 순환마디의 숫자로 인정하면서 같은 숫자 0에 대하여 0 하나만의 숫자는 순환마디로 인정하지 않는다는 것은 타당하지 않다고 생각된다.

② 순환소수에 대한 정의로 "소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 끝없이 되풀이되는 무한소수를 순환소수"(강옥기 외, 2002 ; 강행고 외, 2002 ; 박규홍 외, 2002 ; 전평국 외, 2002 ; 최용준 외, 2002), "소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 무한소수를 순환소수" (박두일 외, 2002 ; 박윤범 외, 2002 ; 배종수 외, 2002 ; 이준열 외, 2002 ; 조태근 외, 2002), "무한소수 중에서 0.555... 와 같이 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 소수"(황석근 외, 2002)와 같이 순환소수를 무한소수를 사용하여 정의한 경우와 "소수점 아래의 어떤 자리에서부터 한 숫자 또는 몇 개의 숫자들이 계속 반복되는 소수" (금종해 외, 2002 ; 고성은 외, 2002)와 "소수점 아래의 어떤 자리에서부터 몇 개의 숫자가 같은 순서로 되풀이되는 소수"(양승갑 외, 2002) 와 같이 순환소수의 정의에서 무한소수라는 용어를 사용하지 않고 그냥 소수라는 용어를 사용한 경우가 있다. 여기서 주목할 것은 순환소수 정의에서 무한소수를 사용하지 않고 그냥 소수로 정의한 경우에는 숫자 0만을 순환마디로 갖는 순환소수를 사용할 수 있으며, 이 때 순환소수와 유리수와의 관계는 "모든 순환소수는 유리수로 나타낼 수 있고, 모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다." 와 같이 보다 간결한 표현으로 나타낼 수 있어 편리하다. 그러나 유리수와 순환소수의 관계 표현에서 이와 같이 간결한 표현을 사용한 교과서는 없다.

③ 유한소수의 특성화에 따른 유리수의 순환소수 표현에 대하여는 "분모가 2와 5이외의 소인수를 가지는 기약분수는 순환소수로 나타내어진다."(강옥기 외, 2002 ; 금종해 외, 2002 ; 강행고 외, 2002 ; 고성은 외, 2002 ; 최용준 외, 2002), 분수를 순환소수로 고치라는 문제 다음에 "유리수를 소수로 나타내었을 때, 유한소수가 아닌 것은 모두 순환소수이다."(박규홍 외, 2002), 유리수와 순환소수라는 제목아래 이를테면, 나눗셈 계산 과정에 대한 보기 문제가 없이 "분수를 소수로 고치면 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다."(박윤범 외, 2002), "정수가 아닌 유리수는 항상 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."(양승갑 외, 2002), $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{7}$를 순환소수로 나타내는 보기를 들고 유리수는 유한 또는 순환소수로 나타낼 수 있다는 언급은 없이 참고란에 "나눗셈을 할 때 나머지는 언제나 나누는 수보다 작다. 따라서 나눗셈을 계속하면 일정한 나머지의 배열이 반복해서 나온다"(이준열 외, 2002), $\frac{1}{7}$의 나눗셈을 한 후 "유리수를 기약분수로 고쳤을 때, 분모가 2나 5이외의 소인수를 가지면 그 수는 무한소수가 되며, 이 무한소수는 반드시 순환소수가 된다 따라서 유한소수로 나타내어지지 않는 유리수는 모두 순환소수로 나타낼 수 있다"(전평국 외, 2002), $\frac{2}{7}$의 나눗셈을 한 후, "유한소수로 나타낼 수 없는 모든 유리수는 항상 순환소수로 나타낼 수 있다."(조태근 외, 2002)와 같이 처리하였고, 박두일 외(2002)는 순환소수와 유리수와의 관계는 언급 없이 유리수와 순환소수의 제목 하에 순환소수 표현(순환마디 위에 점 표현)과, 순환소수를 분수로 고

치는 방법만 취급하였고, 배종수(2002)는 관계 규명이 미약한 상태로 "유한소수와 순환소수는 유리수이다."라 하였으며, 황석근 외(2002)는 이끌어 내는 과정이 미흡하지만 다음과 같은 내용 "0 을 제외한 모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."를 제시하였다. 이상을 살펴보면 우선 전체적으로 유리수를 소수로 표현할 때 일반적인 경우 곧 $\frac{a}{b}$ (단, a, b 는 정수, $b \neq 0$)의 경우는 제시되지 않았는데 이 내용의 취급이 어려운 것은 아니다. 그리고 유리수의 소수 표현에서 유한소수와 순환소수를 분리하여 강조한 것이 반드시 좋은 가는 생각해볼 일이기도 하다.

④ 순환소수의 유리수 표현은 우선 순순환소수를 분수로 고치는 경우에는 모두 순환마디의 숫자 개수만큼 10을 곱하여 빼는 같은 방법을 사용하였고, 혼순환소수를 분수로 고치는 경우에는 고성은 외(2002)에서만 순순환소수의 경우에서와 같은 방법을 사용하였다. 여기서 고성은 외(2002)와 같은 방법을 사용하면 <학습지도상의 유의점> 에 제시한 "② 순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것을 강조하지 않는다."는 필요 없게 되는 이점이 있다.

⑤유리수와 순환소수와의 관계에 대하여 강옥기 외(2002)는 "모든 순환소수는 유리수로 나타낼 수 있고, 모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."로, 강행고 외(2002), 금종해 외(2002), 박윤범 외(2002), 전평국 외(2002)는 "유한소수와 순환소수는 유리수이고, 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."로, 고성은 외(2002)는 "순환소수는 유리수이다." 로, 배종수 외(2002)는 "유한소수와 순환소수는 유리수이다." 로, 이준열 외(2002)는 '유리수는 유한 또는 순환소수로 나타낼 수 있다' 라는 언급은 없이 순환소수의 분수로 고치기를 한 후 "순환소수는 분자 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 있으므로 모든 순환소수는 유리수이다. 또 유한소수로 나타낼 수 없는 유리수는 반드시 순환소수가 된다. 즉, 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."로, 최용준 외(2002)는 "모든 순환소수는 분모, 분자가 정수이고 분모가 0이 아닌 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다."로, 황석근 외(2002)는 "1. 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다. 2. 0 을 제외한 모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다."로, 양승갑 외(2002)는 순환소수를 분수로 고치는 예제 두 개와 문제를 들고 $0.\dot{9} = 1$임을 보인 후 "마찬가지로 $2 = 1.\dot{9}$, $-3 = -2.\dot{9}$, … 와 같이 모든 정수를 순환소수로 나타낼 수 있고, 또 $0.5 = 0.4\dot{9}$, $0.27 = 0.26\dot{9}$, … 와 같이 유한소수로 나타내어지는 유리수도 순환소수로 나타낼 수 있다." 와 유리수와 순환소수의 제목 하에 순환소수 표현(순환마디 위에 점 표현)과, 순환소수를 분수로 고치는 방법만 취급하고 순환소수와 유리수와의 관계는 언급이 없는 경우는 박두일 외(2002)가 있다.

순환소수와 유리수와의 관계를 명확하게 규명하는 것은 무리수를 소수로 도입하기 위하여 필요한 내용으로 아무리 강조하여도 과하지 않은 내용이다. 그러나 대개의 교과서가 너무나 간단히 취급을 하고 있으므로 순환소수를 다루는 목적에 미흡한 상태이다. 이러한 상태라면 순환소수를 분수로 고치거나 유리수를 순환소수로 나타내는 과정이 없이 순환소수의 정의 정도만 다루고 무한소수로서 순환소수가 아닌 소수로 나타내어지는 수를 생각하여 무리수를 도입하는 것이 오히려 바람직한 방법이라고 생각된다. 특히 부족하기는 하지만 그래도 유리

수와 유한소수 및 순환소수의 관계를 규명한 몇몇 교과서에는, 한 숫자 0만을 순환마디로 사용하고 있지 않기 때문에 순환소수와 유리수의 관계규명을 '유리수와 순환소수'가 아니라 '유리수와 유한 및 순환소수'로 유한소수를 함께 생각하여 처리할 수밖에 없어 간결한 표현을 할 수 없게 되어있다.

⑥ 순환소수의 대소관계에 대하여 강옥기 외(20020, 고성은 외(2002), 박윤범 외(2002), 최용준 외(2002)는 "두 순환소수의 대소관계는 순환마디가 반복되도록 풀어 쓴 후 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하거나 분수로 고쳐서 비교한다."로, 또 이 경우에 금종해 외(2002) 는 보기에서 각 자리의 수를 비교하는 경우만 다루었고, 이준열 외(2002). 전평국 외(2002)는 두 순환소수의 대소관계는 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하여 구한 후, 다른 풀이로 분수로 고쳐서 비교하였고, 강행고 외(2002), 박두일 외(2002), 배종수 외(20020, 양승갑 외(2002) 조태근 외(2002)는 정수, 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하는 방법만을 사용하였으며, 박규홍 외(2002)는 순환소수의 대소관계를 구별하는 방법을 소개하지 않고 보충문제에서 $0.6\dot{4}$, $0.\dot{6}\dot{4}$ 의 대소 비교에 대한 참고로 $0.6\dot{4} = 0.6444\cdots$, $0.\dot{6}\dot{4} = 0.6464\cdots$ 를 제시하였으며, 황석근 외(2002)는 순환소수를 분수로 고쳐서 구한 후에 무한 소수의 자리의 수를 비교하는 것으로 되어 있다.

순환소수의 대소관계 제시는 교육과정의 [심화 과정] "① 순환소수의 대소 관계를 알 수 있다." 에 따라 제시 된 것인데, 순환소수를 분수로 고쳐서 그 대소관계를 비교하는 것은 결국 초등학교 과정에서 다룬 분수의 대소관계를 알아보는 것이므로 이 내용이 중학교 과정에서 심화 과정으로 취급할만한 가치가 있는지 의문이다. 특히 모든 교과서에서 순환소수의 대소관계를 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하여 알아보도록 하였는데 이 방법의 지도에는 문제가 있다. 이를테면 $0.1000\cdots$ 과 $0.0999\cdots$ 의 대소 관계를 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하는 방법으로 알아본다면 $0.1000\cdots$ 이 $0.0999\cdots$ 보다 더 큰 수가 된다. 따라서 순환소수의 대소관계는 그 내용을 삭제하던가, 아니면 순환소수를 분수 표현으로 바꾸어 대소관계를 알아보는 방법을 사용하고, 소수점 아래의 각 자리의 숫자를 비교하는 방법은 참고 자료로나 제시하던가 아니면 취급하지 않는 것이 바람직하다.

⑦ 무리수의 도입 방법에서는

강옥기 외(2003), 강행고 외(2003)는 "앞에서 구한 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수를 무리수라고 한다. 이를테면 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 등은 모두 무리수이고 , 7단계에서 배운 π도 무리수임이 알려져 있다. 또한 $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}+1$ 을 소수로 나타내면

$\sqrt{2}+1 = 1.414213562\cdots + 1 = 2.414213562\cdots$,

$\sqrt{3}+1 = 1.73205080\cdots + 1 = 2.7320508075\cdots$

이므로 순환하지 않는 무한소수가 된다."고 하였다. 그런데 여기서 무한소수에 대한 합을 구하는 것보다는 유리수의 성질을 이용하여 $\sqrt{3}+1 = (\text{유리수})$ 라면 $\sqrt{3} = (\text{유리수}) - 1 = (\text{유리수}) - (\text{유리수}) = (\text{유리수})$가 되어 모순임을 보이는 방법의 설명을 이용하는 것은 어떨까 생각된다. 특히 강옥기 외(2003)는 귀류법증명 방법을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보이는 것을 "좀더 생각해 보자"에서 취급하였는데, 이는 본문 내용에서 이 내용을 다룬 것 보다 적합한 취급이다. 고성은 외(2003)는 "주사위를 무한히 던져 만들어지는 소수 이를테면 $0.252435\cdots$ 는 순환소수가 아니므로 $0.252435\cdots$ 는 유리

수가 아님을 알 수 있다. 이와 같이 유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다." 고 하였다. 여기서 순환소수의 정의로 무한소수를 사용하는 쪽을 먼저 생각한다면, "0.252435 …. 는 순환소수가 아니다. 이와 같이 순환소수가 아닌 수를 무리수라고 한다."와 같이 순환소수가 아닌 무한소수로 무리수를 정의한 후 무리수는 유리수가 아님을 언급하는 것이 보다 교육과정에서 요구하는 방법에 맞는 방법일 것이다. 그리고 바로 "$\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보이자. 먼저 $1<2<4$ 에서 $1<\sqrt{2}<2$ 이므로 $\sqrt{2}$ 는 정수가 아니다. … 즉 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다." 와 같이 하고 다음에 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 구하였는데, $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보이기 위하여 실제적으로 귀류법 증명을 사용하였고, 이와 같이 귀류법을 사용하여 무리수가 있음을 보인다면 순환하지 않는 무한소수로 소수 표현에 의한 무리수의 도입을 할 필요가 없다. 또한 $\sqrt{2}$ 의 근사값으로의 소수 표현도 교육과정에서 제시한 무리수의 도입 방법에 어떤 의미를 줄 수 있는 것인지 의문이다. 금종해 외(2003)는 "이러한 방법으로 $a\sqrt{2}$의 값을 구해나가면 $\sqrt{2}=1.414213562373095\cdots$ 와 같이 순환하지 않는 무한 소수로 나타내어진다. 이제 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보이자. $\sqrt{2}$ 가 유리수라면 정수 또는 기약분수로 나타낼 수 있다. 그런데 $1<\sqrt{2}<2$ 이므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다.… 즉, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다." 와 같이 취급하였는데, "$\sqrt{2}$ 의 값을 구해나가면 $\sqrt{2}=1.414213562373095\cdots$ 와 같이 순환하지 않는 무한 소수로 나타내어진다"를 언급한 후 바로 이와 같은 수를 무리수라고 정의하는 것이 교육과정에서 요구하는 무리수의 도입 방법인데도, 여기서는 아무 언급이 없이 계속하여 다시 $\sqrt{2}$ 가 기약 분수로 나타낼 수 없음을 보여 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아니라 하고, "이와 같이 유리수가 아닌 수를 무리수라 하는데 무리수는 순환하지 않는 무한 소수로 나타내어진다"고 한 것은 무리수의 도입이 교육과정의 의도와 차이가 있다. 박규홍 외(2003)는 유리수를 소수로 나타낼 때 유한 또는 순환소수로 나타남을 간단히 설명하고 순환하지 않는 무한소수로 표현되는 수를 들어 무리수를 정의했다. 그리고 유리수와 무리수의 구별을 위해 결국 제곱근의 수로서 보기를 들었는데 결국은 귀류법을 사용한 것이 되었다. 박두일 외(2003)는 2학년 과정에서는 유리수와 순환소수와의 관계 규명이 미약한 상태였는데 이곳에서는 "순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다."고 도입하였다. 그리고,

$\sqrt{2}+1=1.4142135\cdots+1=2.4142135\cdots,$

$\sqrt{2}-1=1.4142135\cdots-1=0.4142135\cdots$

등도 순환하지 않는 무한소수이므로 무리수라고 하였다. 박윤범 외(2003)는 "유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 즉 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타나는 수이다."와 같이 무리수를 도입하였는데 교육과정에 제시한 내용에 맞추어 앞에서와 같이 순환소수의 정의를 먼저 무한소수를 사용하여 하고 다음에 무리수는 유리수가 아님을 언급하는 것이 바람직하다고 생각된다. 배종수 외(2003)는 내용에서 " 그러나 $\sqrt{2}=1.4142135623\cdots$ 이므로 순환하지 않는 무한소수로 알려져 있다. … $\sqrt{2}$, π 와 같이 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다." 고 한 후에 $\sqrt{2}$ 의 근사값 소수표현을 구하는 과정을 설명하였는데, 오히려 $\sqrt{2}$ 의 근사값 소수표현 구하는 과정을 서술하고 그 결과가 순환하지 않는 무한소수로 알려져 있음을 알려 무리수를 도입하는 것이 바람직하다고 생각된다. 양승갑 외(2003)는 " 실제로 $\sqrt{2}$ 의 값

을 소수로 나타내면 $\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$ 과 같이 순환하지 않는 무한소수가 됨이 알려져 있다. 이와 같이 소수로 고쳤을 때 순환하지 않는 무한소수로 나타나는 수를 무리수라고 하며 … " 라 하였고 $\sqrt{2}$ 의 소수표현의 근사값 처리과정은 다루지 않았다.

" … 한편, 유한소수나 순환소수는 유리수이므로 $\sqrt{2}$ 는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 없다. 따라서 $\sqrt{2}$ 를 소수로 고치면 순환하지 않는 무한소수로 나타나야 하므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다." 고 하였는데 여기서도 결국은 귀류법 증명을 사용한 이 취급은 의미가 없다고 생각된다.

이영하 외(2003)는 "그런데 다음과 같이 순환하지 않는 무한소수가 있다. $0.1010010001\cdots$, $0.121121112\cdots$ 이와 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어지는 수를 무리수라고 한다." 고 한 후에 문제에서 " 다음 각 단계를 완성하여 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명해보자.

(1) 제곱하여 2 가 되는 정수는 없다. 그러므로 $\sqrt{2}$ 는 정수가 아니다
(2) 기약분수의 제곱은 기약분수이다. 그런데 제곱하여 2가되는 기약분수는 없다. 그러므로 $\sqrt{2}$는 기약분수도 아니다.
(3) 따라서 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다."

고 하였는데, 여기서 "그런데 제곱하여 2가되는 기약분수는 없다."는 결국 귀류법에 의하여 밝혀지는 것이므로 앞에서 언급한 것과 같은 문제점이 있다.

이준열 외(2003)는 소수점 아래에 수 1, 01, 001, 0001, … 이 계속되는 소수 $0.1010010001\cdots$, 소수점 아래에 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 이 계속되는 소수 $0.123456789101112131 4\cdots$ 가 순환소수인지 확인해보고 … . 소수 중에는 순환하지 않는 무한소수가 있음을 알 수 있다. 이와 같이 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다." 고 한 후에 " π, $\sqrt{2}$ 등은 다음과 같이 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수임이 알려져 있다" 하였다. 그리고 $\sqrt{2}$ 의 소수표현 근사값을 구하였다. 전평국 외(2003)는 $\sqrt{2}$ 의 소수표현 근사값을 구하는 과정을 통해 $\sqrt{2}$ 를 소수로 나타내면 $\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$ 과 같은 무한소수로 나타내어지고 이 무한소수는 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다고 한 후에 "이와 같이 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다. 따라서, 무리수는 유리수가 아니다."고 하였다. 그리고 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 귀류법 증명방법을 사용한 방법으로 제시하였는데 그 문제점은 앞에서와 같다.

조태근 외(2003)는 정수가 아닌 유리수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 모두 유리수임을 2학년에서 배웠음을 상기시키고, $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 앞에서와 같이 귀류법 증명방법을 사용한 방법으로 보이고, "$\sqrt{2}$ 가 유리수가 아니므로 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알 수 있다.

이와 같이 소수로 나타낼 때, 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 무리수라고 한다. 즉, 무리수는 유리수가 아닌 수이다." 고 하였는데 이는 무리수 도입에 앞에서와 같은 문제가 있다.

특히 다음의 학습보충의 문제(2)에서와 같은 내용은 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 도입한다기 보다는 무리수의 성질로 소수 표현에서 순환하지 않는 무한소수로 나타내어짐을 말하고 있다.

최용준 외(2003)에서는 “분수 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{11}$ 과 같은 유리수를 소수로 나타내면, $\frac{2}{5}=0.4$, $\frac{3}{11}=0.272727\cdots=0.\dot{2}\dot{7}$ 과 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있지만 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.4142135623\cdots$ 이 되어 순환소수로 나타낼 수 없다. 이와 같이 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다.”고 하였다.

황석근 외(2003)는 모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있고, 유한소수와 순환소수로 나타내어지는 수는 모두 유리수임을 8단계에서 배웠음을 상기시키고, 소수 0.123456789101112⋯는 유한 소수도 아니고 순환소수도 아니므로 유리수가 아니라고 한 후 “유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 따라서 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.”고 하였다. 여기서도 “무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타나는 수이다. 곧 무리수는 유리수가 아닌 수이다.”로 하는 것이 보다 바람직하리라 생각된다. 또 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 귀류법으로 보인 후 같이 생각하면, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ 등도 무리 수임을 알 수 있다고 한 것은 앞에서와 같은 문제점이 있다.

위의 내용을 종합적으로 살펴보면 우선 무리수의 도입 이전에 8단계에서 학습한 유리수와 순환소수와의 관계 규명의 일부 문제점과 또 시간적인 큰 간격으로 8단계에서의 순환소수의 학습이 9단계에서의 무리수 도입에 어떤 의미를 갖는가 의문이 들고, 또 귀류법 증명방법을 사용한 $\sqrt{2}$ 의 유리수 아님을 보인 것도 9단계에서의 무리수 도입에는 의미가 없다고 생각된다. 특히 몇몇 교과서에서만 제시한 0.1010010001⋯, 0.1121231234⋯ 등과 같은 순환하지 않는 무한소수의 보기를 드는 것이 $\sqrt{2}$, π와 같은 수의 소수표현이 순환하지 않는 무한소수라는 것을 언급하면서 무리수를 도입하는 것 보다 쉽게 이해할 수 있고, 교육과정에서 언급한 내용에로도 더 적합하다. 그리고 8 단계에서 유리수의 성질 이를테면 연산에서의 닫힘에 관한 내용, 조밀성 등을 취급하는 것이 무리수의 처리에도 도움을 줄 수 있으므로 그 취급이 있었으면 한다.

Ⅲ. 몇몇 미국 교과서의 분석

유한 소수와 순환소수에 대하여 미국에서 사용하는 교과서 중에서 R I. Champagne 외(1991)의 교과서 Addison-Wesley Mathematics Grade 7 을 살펴보면 우리 나라에서의 취급과 달리 다음과 같다.

「나머지가 0이면 유한소수를 얻는다. 때로 하나 또는 그 이상의 숫자들이 끝없이 반복되는 순환소수를 얻는다

보기

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} = 4\overline{)3.00} = .75$$

$$\begin{array}{r} .75 \\ 4\overline{)3.00} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

0(나머지는 0)

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} = \begin{array}{r} .666\cdots \\ 3\overline{)2.000} \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \end{array}$$

20(반복된다)
」

그리고 Grade 8에서는「유한소수는 반복되는 숫자 영으로 끝난다. 끝없이 반복되는 숫자들의 모임을 갖는 소수는 순환소수이다」이라고 하였다. A F. Coxford 외(1987)의 교과서 HBJ ALGEBRA 1 에서는,

「$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{11}$과 같은 유리수는 무한 순환소수로 나타내어질 수 있다.

$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$　　　$\frac{2}{11} = 0.1818\cdots = 0.\overline{18}$

위의 선은 반복되는 숫자를 표한 것임

0.75, 1.4 와 같은 유리수는 유한소수이다. 그러나 이들은 무한 순환소수로 나타낼 수 있다.

$\frac{3}{4} = 0.75 = 0.75000\cdots$　$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1.4 = 1.4000\cdots$

영이 반복되는 숫자임

무리수는 순환하지 않는 무한 소수로 나타낼 수 있다. 이것은 무리수의 소수 표현에서 아무리 많은 숫자를 사용하더라도 그 숫자들의 열이 결코 반복되지 않음을 뜻한다.」

라고 하였다. 여기서 주목할 것은 위의 두 종류의 교과서가 모두 숫자 0을 순환마디로 취급하고 있는 것과 교과서 R I. Champagne 외(1991)는 순환소수를 정의하는 데 「an infinite decimal」 대신에「a decimal」을 사용하였으며, A F. Coxford 외(1987)는 순환마디가 0인 소수도 무한소수로 한 것이다.

Isidore Dressler외(1981)의 교과서 Integrated Mathematics I 에서 무리수를 도입하는 과정은 다음과 같다.

우선 유리수의 집합에서는 「익숙한 수들은 양, 음의 정수, 분수, 영으로 구성되었다. 이를테면, 5, -3, $\frac{7}{4}$, $\frac{-5}{4}$, 0과 같은 수들이다. 이들 수들은 각각 $y = \frac{a}{b}$(여기서 a 와 b 는 정수이고 $b \neq 0$)형태로 나타낼 수 있다. 이 형태로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.」

고 하였고, 차례로 다음과 같은 유리수의 집합의 성질을 제시하고 그 각각에 간단한 보기들을 들었다.

「성질 1. 유리수의 집합은 덧셈, 곱셈, 뺄셈에서와 같이 0이 아닌 유리수의 나눗셈에 관하여 닫혀 있다. 한 유리수를 0이 아닌 다른 유리수로 나눌 때 그 결과는 항상 유일한 유리수를 얻는다.

성질 2. 0이 아닌 각 유리수에 대하여 이 수와의 곱이 곱셈의 항등원 1이 되게 하는 유일한 대응수가 존재한다.

성질 3. 유리수의 집합은 한 수직선 위의 점에 연결 지어 생각할 수 있다.

성질 4. 유리수의 집합은 순서집합이다. 임의의 서로 다른 두 유리수가 주어지면 어느 것이 큰 것인 가를 말할 수 있다.

성질 5. 유리수의 집합은 모든 곳에서 조밀하다. 즉 임의의 서로 다른 두수가 주어지면 그들 사이의 유리수를 찾는 것은 항상 가능하다. 그들 사이의 중간의 수인 평균이 그러한 수이다.」

다음에는 유리수의 소수 표현으로 그 내용 전개가 다음과 같다.

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{16}$의 각각에서 나눗셈을 수행할 때, 어떤 점 이후에서는 몫에 계속하여 0만을 얻는 점에 도달한다. 그와 같은 나눗셈에서 얻어지는 소수, 이를테면 .5, .75, .0625 를 유한소수라고 한다.

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$ 의 각각에서 나눗셈을 수행할 때 그 몫에 숫자들의 같은 집단이 같은 순서로 계속 반복됨을 안다. $.333\cdots$, $.181818\cdots$, $.1666\cdots$ 과 같이 한없이 반복되는 소수를 무한소수라고 한다. 그들을 또한 순환 또는 주기적인 소수라고 한다.」

순환소수의 표현으로 bar(—)를 사용한다고 하고 다음과 같이 나타내었다.

$.333\cdots = .\overline{3}$　　　$.181818\cdots = .\overline{18}$

$.1666\cdots = .1\overline{6}$

그리고 이들 보기들은 다음 명제들이 참임을 예시한다고 하였다.

「모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.」

그리고 다음과 같이 언급하였다.

「등식 $.5 = .5\overline{0}$, $.75 = .75\overline{0}$ 은 모든 유한소수는 어떤 한 점 다음부터는 모두 0 이 반복되는 순환소수로 나타낼 수 있음에 유의하라. 따라서 다음과 같이 말할 수 있다. 모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다. 모든 유한소수는 순환소수로 나타낼 수 있으므로 이제부터는 유한소수는 순환소수로 간주할 것이다.」

소수의 유리수 표현에 대하여는 그 내용과 전개가 다음과 같은 보기를 사용하였다.

a. $.3 = \frac{3}{10}$　　b. $.37 = \frac{37}{100}$

c. $.139 = \frac{130}{1000}$　　d. $.0777 = \frac{777}{10,000}$

그리고 순환소수를 유리수로 나타내는 보기로 두 순환소수 $.666\cdots$, $.4141\cdots$ 를 분수로 나타내고 이들이 모두 참임을 언급한 후에 다음과 같이 서술하였다.

「 모든 순환소수는 유리수를 나타낸다.
이 명제는 다음의 역임에 유의하라.
모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있다.
위의 명제와 그 역이 모두 참이므로 다음을 안다.

한 수가 유리수일 필요충분조건은 그 수가 순환소수로 표현될 수 있는 것이다.」

위의 내용을 요약하여 살펴보면 우리 나라와는 달리 0을 순환마디로 사용하여, "한 수가 유리수일 필요충분조건은 그 수가 순환소수로 표현될 수 있는 것이다." 라고 간결 명료하게 유리수와 순환소수의 관계를 규명한 것이다.

그리고 바로 다음의 2 절, " 2. 무리수의 집합에서는 순환소수를 이용하여 다음과 같이 무리수를 도입하였다.

「순환하지 않는 소수는 무수히 많다. 그와 같은 소수의 한 예는 $.03003000300003\cdots$이다. 이 수에서는 오직 숫자 0과 3만이 나타남을 주시하여라. 처음에는 한 개의 0앞에 3, 다음에는 두 개의 0 앞에 3, 다음에는 세 개의 0 앞에 3, 등등이다. 이것은 이 수가 순환소수를 나타내지 않음을 보이기 때문에 이것은 유리수를 나타낼 수가 없다. 순환하지 않는 (따라서 유한이 아닌)소수를 무리수라고 한다. 무리수는 $\frac{a}{b}$ (a, b($b \neq 0$)는 정수)꼴로 나타낼 수 없다.

....

무수히 많은 무리수들이 있다. 그들 가운데는 앞의 과정에서 이미 만났던가 또는 원을 배울 때 만나게 될 수 $= 3.14159\cdots$ 가 있다. 다른 무리수는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 나타내는 수이다. 뒤에서 배우게 될 이 무리수는 $\sqrt{2}$로 기호화된다.」

특히 이 교과서에서는 우리 나라와 달리 무리수와 실수의 도입 이후에 제곱근을 다루기 때문에 $\sqrt{2}$ 가 무리수임은 한참 뒤에서 보이고 있다.

위에서 살펴본 것을 종합하여 보면, 우선 위의 교과서들에서는 모두 숫자 0을 순환마디로 취급하고 있고 이에 따라 유한소수의 정의를 우리 나라의 경우와 달리 순환마디가 0인 순환소수로 하고 있다. 이는 정의가 엄밀하고, 따라서 이후에 고급 수학 학습을 하는데 연계성이 있는 장점이 있다. 다음에는 위의 교과서에도 우리 나라에서와 같이 무리수의 도입을 무한소수를 사용하여 도입을 하였는데, 우리 나라와는 좀 다르게 유리수와 순환소수의 관계를「한 수가 유리수일 필요충분조건은 그 수가 순환소수로 표현될 수 있는 것이다.」와 같이 간결하게 규명을 하여 사용하였고, 우리 나라의 교과서에 취급하고 있는 $\sqrt{2}$ 에 귀류법을 사용한 무리수 도입은 하고 있지 않다. 앞에서도 언급했지만 $\sqrt{2}$ 에 귀류법을 사용하여 무리수를 도입하는 방법은 현 교육과정에서는 다루지 않는 것이 바람직하다. 일본의 교과서에서는 藤田 宏 외(1998)의 일본 교과서를 살펴보면, 이 교과서에서도 중학교 3학년에서 무리수를 도입하고 있는데 이 교과서에서는 무리수 도입이전에 순환소수를 다루고 있지 않다. 따라서 우리 나라와 같은 방법으로 무리수를 도입할 수는 없고 다른 방법으로 귀류법을 사용하여 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보이는 방법을 사용하고 있다. 우리 나라 교과서에서 $\sqrt{2}$ 에 귀류법을 사용하여 무리수를 도입하는 방법을 다루는 것은 일본의 교과서가 참고되지는 않았는지 모르겠다.

Ⅳ. 기약분수 $\frac{a}{b}$ (단, $a < b$)의 소수 표현과 순환소수 $x = 0.a_1 a_2 \cdots a_m \dot{b}_1 b_2 \cdots \dot{b}_n$ 의 유리수 표현

순환 소수와 유리수를 학습한 후에 양의 정수에 대한 지수법칙을 학습하게 된다. 이때 이를테면 $a^2 \times a^3 = a^{2+3}$ 과 같은 특수한 경우의 지수에 대한 지수법칙을 알아본 후에, 일반으로 두 자연수 m, n에 대하 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 을 말하여 보다 일반화 하고있다.

유리수와 순환소수의 관계도 중학교 수준에서 이해할 수 있는 이 정도 수준으로 일반화한다면 그 활용에 도움을 줄 수 있을 것이다.

우선「유리수 ⇒ 순환소수」를 보이기 위하여 대부분의 교과서에서는 분수로 표현된 수 이를테면 분수 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$ 등을 나눗셈을 통하여 소수로 나타내고 이 소수 표현이 순환소수로 됨을 보이고 분모가 2와 5 이외의 소인수를 갖는 기약분수는 순환소수로 나타내어진다고 하거나, 유한소수로 나타내어지지 않는 모든 유리수는 항상 순환소수로 나타낼 수 있다고 하였다.

그러나 특정한 숫자로 주어지지 않은 분수 곧 $\frac{a}{b}$(단, $a < b$, a, b는자연수)는 소수로 나타내면 항상 순환소수로 나타내어짐을 다음과 같이 하여 알 수 있다.

① 기약분수 $\frac{a}{b}$(단, $a < b$)는 a를 b로 나누어 나머지가 0이 나온다고 하자. 이 경우는 이

분수의 소수 표현이 유한소수인 경우로, 이 수는 순환마디가 0 인 순환 소수로 나타낼 수 있다.

② 기약분수 $\frac{a}{b}$(단, $a < b$)는 a를 b로 나누면 무한소수로 나타내어진다고 하자.
이때, 0이 아닌 나머지로 나올 수 있는 수는 1, 2, $\cdots$,$(b-1)$ 이다. 따라서 이 나눗셈 과정에서는 많아야 $(b-1)$번의 나눗셈 계산 이내에 a와 같은 나머지가 나오게 되며, 그 때부터는 같은 숫자의 모임이 되풀이되는 순환소수가 된다.

한편「순환소수 ⇒ 유리수」를 보이기 위하여 고성은 외(2002)의 한 교과서를 제외한 모든 교과서에서 다음과 같이 하였다.

순 순환소수와 혼 순환소수에 대하여 순환마디의 개수가 n 인 순 순환소수에 대하여는 10^n을 곱하고, 순환하지 않는 숫자의 개수가 m 이고 순환마디의 숫자의 개수가 n 인 혼 순환소수에 대하여는 10^m 을 곱한 후에 다시 10^n을 곱하여 이를테면 다음과 같이 하여 분수로 나타내었다.

$x=0.\dot{2}\dot{3}$ 이라고 하면 양변에 100을 곱한 $100x=23.\dot{2}\dot{3}$ 에서 변끼리 빼면 $99x=23$ 에서 $x=\frac{23}{99}$ $x=0.2\dot{3}\dot{6}$ 이라고 하면 양변에 10을 곱한 $10x=2.\dot{3}\dot{6}$을 양변에 1000을 곱한 $1000x=236.\dot{3}\dot{6}$에서 빼면 $990x=234$.
$\therefore x=\frac{234}{990}$

혼 순환소수인 경우에 고성은 외(2002)는 순 순환소수의 경우에서와 같이 순환마디의 숫자의 개수가 n이면 양변에 10^n을 곱하여 변끼리 빼어 구하는 방법을 제시하였다.

그러나 위의 방법을 사용할 때 순환소수가 순 순환 소수이거나 혼 순환소수이거나에 구분없이 순환마디의 숫자의 개수가 n이면 양변에 10^n을 곱하여 변끼리 빼어 다음과 같이 분수 표현을 구할 수 있다

우선 혼 순환소수 $x=0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$ 의 양변에 10^n을 곱한 $10^n x$와 x 를 비교하여보면

$$10^n x = \overbrace{a_1 \cdots . \cdots\cdots b_n}^{\boxed{(m+n)\text{개의 숫자}}} b_1 \cdots b_n \cdots$$
$$x = \underbrace{\quad}_{\boxed{n\text{개의 숫자}}} 0.\underbrace{a_1 \cdots a_n \cdots a_m}_{\boxed{m\text{개의 숫자}}} b_1 \cdots b_n b_1 \cdots b_n \cdots$$

이므로

① $n < m$인 경우

$$10^n x = \overbrace{\underbrace{a_1 \cdots a_n}_{}.\, a_{n+1} \cdots a_m b_1 \cdots b_n}^{(m+n)\text{개}} b_1 \cdots b_n \cdots$$

(위 식에서 앞부분 위에 n개, 뒷부분 위에 m개)

$$x = 0.a_1 \cdots a_n \cdots a_m b_1 \cdots b_n b_1 \cdots b_n \cdots$$

에서 우변의 소수는 위의 소수의 두 번째 순환마디부터 소수점 아래의 자리의 숫자가 일치한다. 따라서,

$$10^n x - x = a_1 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots a_m b_1 \cdots b_n - 0.a_1 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots a_m$$

$\therefore$

$$x = \frac{a_1 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots a_m b_1 \cdots b_n - 0.a_1 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots a_m}{10^n - 1}$$

② $m < n$ 인 경우

$$10^n x = \overbrace{\overbrace{a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_{n-m}}^{n\text{개}} . \overbrace{b_{n-m+1} \cdots b_n}^{m\text{개}}}^{(m+n)\text{개}}\, b_1 \cdots b_n \cdots$$

$$x = 0.a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_n\, b_1 \cdots b_n \cdots$$

에서 우변의 소수는 위의 소수의 두 번째 순환마디부터 소수점 아래의 자리의 숫자가 일치한다. 따라서,

$$10^n x - x = a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_{n-m} . b_{n-m+1} \cdots b_n - 0.a_1 \cdots a_m$$

$$\therefore$$

$$x = \frac{a_1 \cdots a_m\, b_1 \cdots b_{n-m} . b_{n-m+1} \cdots b_n - 0.a_1 \cdots a_m}{10^n - 1}$$

위와 같이 순환소수가 순 순환 소수이거나 혼 순환소수이거나에 구분 없이 순환마디의 숫자의 개수가 n이면 양변에 10^n을 곱하여 변끼리 빼어 다음과 같이 분수 표현을 구하는 방법으로 순환소수를 분수로 고치게 학습한다면 순 순환소수와 혼 순환소수의 각각에 대한 분수 표현방법을 따로 따로 암기할 필요가 없으며, 교육과정의 <학습 지도상의 유의점>에서의 " 순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것을 강조하지 않는다." 를 언급하지 않아도 되는 장점이 있다..

V. 제언 및 결론

교육과정에 의하면 중학교 과정에서의 순환소수의 지도는 무리수 도입을 위한 과정에 두어야만 학습 단계의 순서에 적합하다. 그런데 순환소수의 지도는 <8-가 단계>에서 하도록 되어 있고, 무리수의 도입은 <9-가 단계>에서 하도록 되어 학습시간의 간격이 크다. 따라서<9-가 단계>에서 무리수를 도입할 때에는 순환소수에 대한 학습내용의 기억도 약해져 있기 쉽다. 또 무한소수의 사용과는 별개의 것으로 생각하여 교육과정에서 요구하는 것과 같지 않은 $\sqrt{2}$ 에 귀류법을 사용하여 무리수를 도입하는 경우도 생각하게 된다. 더구나 순환소수의 학습 후 바로 무리수 도입을 하지 않으므로 순환소수 학습이 무리수의 도입에 절실하게 느껴지지 안아서인지 순환소수와 유리수와의 명확한 관계, 곧 「한 수가 유리수일 필요충분조건은 그 수가 순환소수로 표현될 수 있는 것이다.」가 강조되고 있지 않는 경우도 있다. 이 관계의 정확한 이해는 유리수와 무리수의 소수표현이 서로 다름을 이해할 수 있게 하는 중요한 기본적인 내용이므로 아무리 강조해도 부족하지 않다.

수학 교육의 다양성을 위하여 순환 소수와 그에 따른 무리수의 도입은 분수의 순환소수 변환과 순환소수의 분수 변환을 다루지 않는 아주 직관적인 방법과, 우수한 학생들을 위해서는 순환소수와 유리수와의 명확한 관계 규명에 따른 방법을 사용하는 것이 바람직하다.

이와 같은 방법이 실현되기 위한 교과서가 제공되려면, 교육과정에 보다 구체적인 취급 방법을 제시하고, 교과서들도 그에 맞게 구성되어야만 한다. 교육과정에 구체적으로 제시되어야 할 내용을 열거하면 다음과 같다.

① 순환소수의 정의는 무한소수로 하기보다는 그냥 소수에서 정의한다.

② 유한소수의 정의는 순환마디가 0 인 순환소수로 알 수 있게 한다.

③ 유리수와 순환소수의 관계 "한 수가 유리수일 필요충분조건은 그 수가 순환소수로 표현될

수 있는 것이다" 를 알도록 한다.

④ 교육의 다양성을 고려하여 심화과정으로 기약분수 $\frac{a}{b}$(단, $a < b$)의 소수 표현과 순환소수 $x = 0.a_1 a_2 \cdots a_m \dot{b}_1 b_2 \cdots \dot{b}_n$ 의 분수표현을 다루도록 한다

⑤ 무리수의 정의만은 순환소수를 취급하는 과정에서 다루도록 한다.

위의 사항을 반영하여 교과서를 구성한다면 순환소수의 취급 목적이 분명해지고 무리수의 도입이 자연스럽게 이루어 질 수 있을 것이다.

그리고 첨가해서 제언하면 현행 교육과정의 심화과정에 제시된 순환소수의 대소 관계는 의의가 없는 것으로 삭제되었으면 한다. 왜냐하면, 두 유한 소수에서와 같이 소수의 대소관계를 소수점 아래의 숫자의 크기로 비교하는 방법(타당한 방법은 아니지만)은 초등학교 과정에서 학습한 내용이고, 또 순환소수를 분수로 고쳐서 두 분수의 대소관계를 알아보는 것도 결국은 초등학교 과정에서 두 분수의 대소관계를 알아보는 것이므로 <8-가 단계>에서는 필요한 내용은 아니라고 생각된다.

참고문헌

강옥기 외 2인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 두산.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 두산.

강행고 외 9인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 중앙교육진흥연구소.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 중앙교육진흥연구소.

교육부(1997). **수학과 교육과정(제 7차 교육 과정)**. 교육부.

__________(1999). **중학교 교육과정 해설 (Ⅲ)(제 7차 교육 과정)**. 교육부.

고성은 외 5인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 블랙박스.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 블랙박스.

금종해 외 3인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 고려출판.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 고려출판.

박규홍 외 7인(2002). **중학교 수학 8-가**. 두레교육(주).

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. 두레교육(주).

박두일 외 4인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 교학사.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 교학사.

박윤범 외 3인(2002). **중학교 수학 8-가**. 대한교과서.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. 대한교과서.

배종수 외 7인(2002). **중학교 수학 8-가**. 한성교육연구소.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. 한성교육연구소.

양승갑 외 6인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 금성출판사.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 금성출판사.

이준열 외 4인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주) 도서출판 디딤돌.

__________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주) 도서출판 디딤돌.

전평국 외 4인(2002). **중학교 수학 8-가**. 교학연구사.

___________(2003). **중학교 수학 9-가**. 교학연구사.

조태근 외 4인(2002). **중학교 수학 8-가**. (주)금성출판사.

___________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주)금성출판사.

최용준(2002). **중학교 수학 8-가**. (주)천재교육.

___________(2003). **중학교 수학 9-가**. (주)천재교육.

황석근 외 1인(2002). **중학교 수학 8-가**. 한서출판사.

___________(2003). **중학교 수학 9-가**. 한서출판사.

藤田 宏 외(1998). *新編 新しい數學 1, 2, 3.* 東京書籍

R G. Bartle, et al. (2000). *Introduction to real analysis.* John Wiley &Sons, Inc.

R I. Champagne, et al. (1991). *Addison-Wesley Mathematics(Grade 7, 8).* Addison-Wesley Publishlng Company.

R I. Charles, et al. (1998). *Middle School MATH Course.1-Course.3.* Scott Foresman Addison Wesley.

A F. Coxford, et al. (1987). *HBJ ALGEBRA 1,* Harcourt Brace Jovanovich. Publishers.

I. Dressler, et al. (1981). *Integrated Mathematics I.* AMSCO School Publication, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

A Thought on Dealing with Repeating Decimals and Introducing Irrational Numbers (in the Middle School Mathematics)

Kim, Heung Ki (Dankook university)

According to the 7-th curriculum, irrational number should be introduced using repeating decimals in 8-th grade mathematics. To do so, the relation between rational numbers and repeating decimals such that a number is rational number if and only if it can be represented by a repeating decimal, should be examined closely. Since this relation lacks clarity in some text books, irrational numbers have only slight relation with repeating decimals in those books.

Furthermore, some text books introduce irrational numbers showing that $\sqrt{2}$ is not rational number, which is out of 7-th curriculum.

On the other hand, if we use numeral 0 as a repetend, many results related to repeating decimals can be represented concisely. In particular, the treatments of order relation with repeating decimals in 8-th grade text books must be reconsidered.

* **Key words**: repeating decimal(순환소수), repetend(순환마디), pure repeating decimal(순 순환소수), mixed repeating decimal(혼 순환소수), rational number(유리수), irrational number(무리수), order relation(순서관계), terminating decimal(유한소수), infinite decimal(무한소수)