韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2004, 2. 제 43권, 제 1호, 97-107.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Feb. 2004, Vol. 43, No. 1, 97-107.

수학교실에서 설명, 정당화와 논증 분석을 위한 이론적 관점[1)]

Erna Yackel (Purdue University Calumet)
주 미 경 (이화여대) 역

도입

수학적 활동으로의 참여에서 핵심적인 것으로 간주되는 수학적 사고에 대한 최근의 강조(National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Yackel & Hanna, 2003)와 더불어 교실담화를 수학 학습의 주요 방편으로 보는 관점은 수학교실에서의 설명, 정당화, 그리고 논증의 탐구에 대한 관심을 증대시켰다. "설명, 정당화, 논증의 의미가 무엇인가?", "학생들은 이들을 어떻게 학습하는가?"와 같은 논제들은 연구자와 수학교사 모두에게 중요한 관심사이다. 이 논문의 목적은 수학교실에서 발생하는 설명, 정당화와 논증의 의미를 파악하는데 유용한 것으로 증명된 두 이론적 관점을 설명하는 것이다. 이 두 이론적 관점은 기호적 상호작용주의(Blumer, 1969)와 Kreummheuer(1995)에 의해 수학교육에 알맞게 수정보완된 Toulmin(1969)의 논증도식이다. 나는 각각의 관점에 대해 차례로 논하고 교실연구로부터의 구체적인 사례를 통해 이들 관점이 분석에 활용되는 방법을 보이고자 한다.

배경

나의 동료[1)]들이 참여해 온 연구 활동은 교실에 그 기초를 두며 6주에서 일 년, 또는 대학의 한 학기 동안 행해진 교실교수실험과 관련되어 있다. 이 연구 활동은 일련의 수업요목과 접근방법을 개발하는 것과 더불어 그것이 교실에서 실제로 행해지는 상황에서 교수-학습 과정을 탐구하는 것이다. 개발연구(Gravemeijer, 1994)라고 불리는 이러한 유형의 연구에서, 연구자는 교실활동을 분석하고 그 결과를 수업 계획과 결정의 기반으로 사용한다. 또한 이러한 연구 활동은 교실에서 진행된 학습의 속성을 설명하고 학습상황의 중요한 측면을 해석하기 위한 회고적 분석과 관계한다.

교실의 복잡성이 연구자에게 제기하는 어려움은 분석뿐만 아니라 분석 과정 그 자체를 개념화하는 것에서도 나타난다. 우리의 연구를 통해, 우리는 사회적 상호작용을 포함하는 학습의 사회적 측면과 학습의 개인적 측면 양자를 모두 설명하는 것의 중요성을 이해하게 되었다(Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb, Yackel & Wood, 1989; Yackel, Cobb, Wood, Wheatley & Merkel, 1990; Yackel & Rasmussen, 2002; Yackel, Rasmussen & King, 2001). 따라서, 우리는 사회학적 관점을 심리학적 관점과 통합하여 교실을 분석하기 위한 해석적 틀을 개발하였다. 뿐만 아니라, 우리는 우리의 경험을 기반으로 하여 이 해석적 틀 안에서 이론을 추출하였다(Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996). 다양한 사회학적 관점 가운데서, 우리는 다음과 같은 두 가지 이유에서 기호적 상호작용주의를 이론적 관점으로 택했다. 첫째, 기호적 상호작용주의는 개인의 학습을 탐구하기 위해 도입한 심리학적 구성주의와 양립가능하다(Cobb & Bauersfeld, 1995). 둘째, Voigt(1996)가 지적한 바와 같이, 기호적 상호작용주의는 특히 그것이 개인의 의미구성 과정과 사회적 과정을 동등하게 중요하게 다룬다는 점에서 탐구지향적 수학교실[2)]에서의 학습을 연구하는데 유용하다. 따라서, 우리는 사회적 과정으로부터 개인의

1 내가 지난 20년간 함께 교수실험을 행하고 분석해온 동료는 Paul Cobb, Terry Wood, Koeno Gravemeijer, Diana Underwood Gregg, Chris Rasmussen, Michelle Stephan이다.

2 "탐구지향적 수학교실"이라는 용어를 사용함에 있어서 나는 Richards (1991)를 따라 학생과 학생, 그리고 학생과 교사 사이에 진행되는 실제적인 수학적 토의가 이루어지는 수학교실을 의미한다. 탐구지향적 수학 수업을 특징짓는 사회적 그리고 사회수학적 규범에 대한 자세한 논의는 Yackel(2000)에 나타나 있다.

유용하다. 따라서, 우리는 사회적 과정으로부터 개인의 학습을 이끌어내지 않으며 그 반대로 개인의 학습으로부터 사회적과정을 유도하지도 않는다. 대신, 개인은 교실 규범과 교실의 수학적 관행에 대한 진행 중인 협상에 참여하면서 개인적 의미를 구성해가는 것으로 생각된다.[4] 우리의 이론적 틀에서 중요한 측면은 우리가 사회학적 구성개념과 그에 대응하는 심리학적 구성개념 사이의 반영적 관계를 가정한다는 것이다.

수학적 설명, 정당화와 논증은 다양한 관점에서 연구될 수 있다. 상호작용주의적 관점에 따라서, 이 논문에서의 나의 관심은 수학적 설명, 정당화, 논증을 논리적 주장이 아닌 상호작용을 통한 성취로 다루는 것에 있다. 설명, 정당화와 논증에 특히 유용한 해석적 틀로부터 제기되는 두 구성개념은 사회적 규범과 사회수학적 규범이다. 우리의 탐구는 설명, 정당화와 논증, 그리고 교실에서 이들을 촉발하는 방편이 수행하는 기능을 밝히는데 이들 구성개념이 가지는 중요성을 보여준다. 설명, 정당화, 논증을 상호작용적 성취로 다루는 것은 분석의 초점이 논증의 수학적 타당성보다는 참여자들이 개인적으로 그리고 공동체로서 수용가능한 것으로 생각하는 것이 무엇인지에 있음을 시사한다. Krummheuer에 의해 수정보완된 Toulmin의 논증도식은 이러한 목적에 유용한 분석 도구임이 밝혀졌다. 뿐만 아니라, 이 논증도식은 한 학생의 설명과 공동체의 학습이 상호작용적으로 구성되어 가는 과정을 밝히는데 유요한 방법론적 도구이다(Yackel, 1997).

이 논문에서, 나는 먼저 이론적 틀로서 기호적 상호작용주의에 대해 논할 것이다. 그런 뒤, 설명과 정당화의 의미를 설명하고 설명과 정당화에 관련된 수학교실의 규범적 측면에 대해 논의할 것이다. 그리고, Toulmin의 논증도식이 교실 활동의 분석과 교실에서의 학습을 재현하는 기법으로 사용되는 방법을 묘사할 것이다. 끝으로 이러한 연구가 교실 수업에 가지는 중요성에 대한 논의로 결론지을 것이다.

이론적 틀로서 기호적 상호작용주의

기호적 상호작용주의의 이론적 기원은 George Herbert Mead, John Dewey 등의 연구에서 찾아볼 수 있으며 Herbert Blumer(1969)에 의해 비약적으로 발달하였다. 기호적 상징주의를 정의하는 원칙 가운데 하나는 상호작용에서 해석과정이 가지는 중요성이다. 달리 말하자면, 기호적 상징주의의 입장에 따르면 상호작용에서 개인은 상대방이 무엇을 하는지 그리고 그 행동이 의도하는 바가 무엇인지를 해석해야 한다. 각 개인의 행동은 타인의 행동에 기초하여 자신의 계획을 변경, 포기, 보유 또는 개정하는 과정에서 부분적으로 형성된다.

개인은 타인의 행동을 해석할 뿐만 아니라 상호작용에 참여하면서 자신의 행동을 통해 타인에게 그들 자신의 의도가 무엇인지 알린다. 따라서, 행동은 그것을 행하는 이와 그 행동에 관련된 타인 양자에게 의미가 있다. 이러한 의미에서 참여하는 이들의 활동을 명백히 하는 과정에서 발생하는 공유된 행동이 존재한다. Blumer(1969)는 그러한 공유된 행동이 가지는 공동체적 성격의 중요성을 다음과 같이 강조하였다:

> 공유된 행동은 그것의 구성에 도입되는 다양한 단위행동으로 이루어지지만 각각의 단위활동과 다르고 그들의 단순한 합과도 다르다. 공유된 행동은 그 자체의 독특한 특징을 가진다. 그 특징은 명백히 표현 또는 결합지어질 수 있는 요소와 별개로 연결된 전체 또는 결합에 내재한 특성이다. 따라서 공유된 활동은 그 자체로 파악되어야 하고 그것을 구성하는 분할된 행동으로 쪼개지 않은 채 다루어져야 한다(p.17).

나아가 Blumer는 "공동체의 공유된 행동은 참여자 개인의 행동 사이의 내적 연합체"(p.17)이기 때문에 형성의 과정을 거친다고 지적했다. 공유된 행동이 사회적 행동의 형태로 확립된다고 해도, 공유된 행동의 각 경우는

---

3) "탐구지향적 수학교실"이라는 용어를 사용함에 있어서 나는 Richards (1991)를 따라 학생과 학생, 그리고 학생과 교사 사이에 진행되는 실제적인 수학적 토의가 이루어지는 수학교실을 의미한다. 탐구지향적 수학 수업을 특징짓는 사회적 그리고 사회수학적 규범에 대한 자세한 논의는 Yackel(2000)에 나타나 있다.

4) '교실 수학적 관행'이라는 구성개념은 교실 공동체의 집단적 발달을 주목한다. 이 구성개념에 대한 상세한 설명과 예시는 Cobb(1998)에 나타나 있다.

다시 한 번 형성되어야 한다. 결과적으로, 공동된 행동의 이면에 존재하는 의미와 해석은 지속적으로 도전받는다. 따라서, 개인의 행동과 공동체의 공유된 행동 모두 시간에 따라 변화할 수 있다.[5] 나아가, 공유된 행동에 대한 이와 같은 관점은 사회적 규칙, 규범과 가치가 사회적 상호작용의 과정에 의해 유지된다는 입장을 지지한다.

이러한 의미에서, 사회적 상호작용은 단순히 인간의 행동이 이루어지는 상황이라기 보다는 인간의 행동을 형성하는 과정이다. Blumer(1969)가 진술했듯이, "개인은 모종의 방법으로 타인의 행동에 자신의 행동을 맞추어야 한다. 타인의 행동에 주의를 기울여야 한다. 그것은 단순히 한 사람이 행하고자 의도하는 바를 표현하는 장이 될 수 없다."(p.8). 나아가 Blumer는 기호적 상호작용주의라는 용어가 상호작용이 행동의 해석과 관련된다는 점을 주목한다고 명시했다. 결과적으로, 한 사람의 사고를 설명하고자 하는 시도나 상대방의 설명을 이해하고자 하는 시도에서 볼 수 있듯이, 의사소통하고자 하는 시도는 상대방의 행동이 가지는 의미를 이해하는 것과 관련되어 있기 때문에(Rommetveit, 1985) 기호적 상호작용과 관련된다.

해석의 중요성 이외에, 기호적 상호작용주의를 정의하는 두 번째 원칙은 의미가 사회적 산물이라는 점이다. Blumer(1969)는 이 점을 다음과 같이 설명한다:

> 기호적 상호작용주의는 의미가 사물의 내재적 성질이라고 생각하지 않는다. 또한 기호적 상호작용주의는 의미가 개인에 내재한 심리적 요소의 융합과정에서 기인한다고 보지도 않는다. 대신 기호적 상호작용주의는 의미가 사람들 사이의 상호작용과정에서 발생한다고 본다. 하나의 사물에 대해 개인이 가지고 있는 의미는 그 사물을 둘러싸고 타인이 그 사람에게 행동하는 방식에서 발생한다. 타인의 행동은 한 개인이 그 사물을 정의하는 방식에 영향을 준다. 따라서, 기호적 상징주의는 의미를 사회적 산물, 즉 상호작용하는 사람들 사이에 사물을 정의하고자 이루어지는 활동의 맥락에서 그리고 그것을 통해 형성된 창조물이라고 본다(pp. 4, 5).

의미에 관한 이와 같은 관점은 우리가 교실담화활동의 결과를 해석하는 방법에 중요한 시사점을 제공한다. 의미는 사회적 상호작용으로부터 발생하므로, 각 개인이 가지고 있는 사회적 의미와 이해는 그 상호작용을 해석하는 과정 속에서 그리고 그 과정을 통해 형성된다. 그렇지만 규범적 이해는 구성된다. 학생들이 교실담화활동에 대한 자신의 해석을 발달시켜가는 것은 이러한 규범적 이해가 구성되는 과정을 통해서이다. 이들 이해가 규범적이라는 주장의 의미는 학생들의 해석이 조화롭게 양립하는 것을 보여주는 증거를 교실 대화와 활동으로부터 찾아볼 수 있다는 것이다. 이러한 의미에서 우리는 학생들의 해석 또는 의미가 '공유된 것으로 받아들여진다'고 말한다(Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992).

설명과 정당화

이 논문에서 나의 관심사는 개인의 구성체가 아닌 사회적 구성체로서 설명과 정당화에 있다. 이 경우에, 설명과 정당화는 교사와 학생에 의해 상호작용적으로 구성되어 의사소통의 기능을 담당하는 담화의 측면으로 생각될 수 있다. 설명과 정당화는 부분적으로 그들이 담당하는 기능에 의해 구별될 수 있다. 학생과 교사는 자신의 수학적 사고의 측면을 명백히 하기 위해 수학적 설명을 제시하는데 이 설명은 상대방에게 즉시 명확한 것으로 수용되지 않을 수도 있다. 그들은 규범적인 수학적 활동을 명백히 위반하는 것에 대한 도전에 대응하여 수학적 정당화를 제공한다(Cobb, et al., 1992). 예를 들어, "16+8+14가 얼마인지 어떻게 알았는가?"라는 질문을 생각해 보자. 만일 아동이 "16에서 하나를 떼어 14에 더해서 15와 15를 얻게 된다. 그리고 그 15와 15를 더해서 30을 얻고, 다른 8을 더해서 38을 얻는다."고 대답한다면, 우리는 그 아이가 자신의 해를 다른 사람에게 설명하고 있다고 추론한다. 그러나, "너는 먼저 16과 8을 더하고 그 합에다 14를 더해야 한다."는 반박은 정당화를 요구하는 것이다.

5) 이러한 관점이 탐구지향적 수학 교실에서 나타나는 학생들의 수학적 신념의 변화를 설명하는데 어떻게 적용될 수 있는지에 대한 자세한 논의는 Yackel & Rasmussen(2002)에 나타나 있다.

수학적 설명과 정당화에 관련된 교실 규범은 사회적 규범과 사회수학적 규범이 있다. 규범은 사회학적 구성 개념이며 한 집단에 의해 규범적이거나 공유된 것으로 받아들여지는 이해나 해석을 의미한다. 따라서, 규범은 개인적인 것이 아니라 공동체적 개념이다. 우리가 연구한 교실규범에서, 규범을 묘사하는 한 방법은 교실 안에서 형성되는 기대와 의무를 묘사하는 것이다.

초기 교수 실험으로부터의 자료를 분석함으로써, 우리는 교실 상호작용을 특징지을 수 있는 사회적 규범 몇 가지를 추출할 수 있었다. 이들 사회적 규범은 학생들이 개인적으로 의미있는 해를 구해야 한다든가, 그들의 사고와 해를 설명하고 정당화해야 한다든가, 다른 학생들의 해석과 문제해결방법을 경청하고 그 의미하는 바를 파악해야한다든가, 이해가 되지 않거나 동의하지 않을 때 질문을 하거나 반박을 해야 한다는 것 등을 포함한다. 이들 사회적 규범이 교실에서의 상호작용을 특징짓는다고 말할 때, 나는 이들 행동 양식과 타인의 행동을 해석하는 양식이 공유됨을 의미한다. 후속 교실 교수 실험에서, 우리는 이들 규범을 외연적인 목표로 설정하였다. 위에서 묘사했듯이, 이들 각각의 규범이 사회적 구성 개념으로 받아들여질 때 설명과 정당화에 관련됨은 명백하다.

우리는 또한 수학 교과에 독특한 상호작용의 규범적 측면을 추출할 수 있었다. 우리는 이러한 유형의 규범을 사회수학적 규범이라고 불렀다(Yackel & Cobb, 1996). 수학적으로 다른 것, 정교한 것, 효율적인 것 그리고 우아한 것은 무엇인가에 관한 규범적 이해는 사회수학적 규범의 예이다. 마찬가지로, 수학적 설명과 정당화로서 수용가능한 것을 결정하는 것 역시 사회수학적 규범이다. 사회적 규범과 사회수학적 규범 사이의 구별은 미묘한 차이에 있다. 예를 들어, 학생들이 그들의 풀이방법을 설명하길 기대한다는 것을 이해하는 것은 사회적 규범이다. 반면, 어떤 수학적 설명이 수용가능한가에 대한 이해는 사회수학적 규범이다.

우리는 어떻게 수용가능한 설명을 결정하는 요소와 같은 개념이 학생들에게 의미를 가지게 되는지 의문을 가질 것이다. 이 질문에 답하기 위해, 우리는 의미에 대한 기호적 상호작용주의의 입장으로 돌아간다. 즉, 의미가 상호작용을 통해 발생한다는 것이다. 따라서, 수용가능한 수학적 설명에 대한 의미는 학생들에게 미리 주어져 적용되는 것이 아니다. 대신, 그것은 교실에서 참여자들의 상호작용의 맥락 속에서 그리고 상호작용의 과정을 통해 형성된다. 모든 규범적 이해와 같이, 외연적인 협상과 암묵적 협상 양자 모두 이러한 이해의 발달에 기여한다.

다음 문단에서 나는 초등학교 교실 교수 실험으로부터의 예를 통해 수용가능한 수학적 설명과 정당화는 무엇인지에 대한 사회수학적 규범이 협상되어가는 과정을 예시할 것이다. 이 사회수학적 규범은 어떻게 학생 개개인의 설명이 시도되고 공동체로서 교실의 수학적 관행이 상호작용을 통해 구성되어 가는지 명확히 하는데 도움이 된다는 점에서 이 논문의 논의에 핵심적이다.

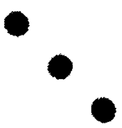
수용가능한 수학적 설명과 정당화의 요소에 대한 협상의 주도

우리가 연구했던 탐구지향적 교실에서는, 그것이 초등학교 1학년수준이었든 대학수준이었든, 설명과 정당화가 학생들에게 경험적으로 실제적인 수학적 대상에 대한 활동을 묘사하는 것과 관련되어야 한다는 것이 규범이 되었다. 결과적으로, 그러한 역할을 수행하지 못한 설명은 자주 반박되었다. 이러한 반박은 다시 교사와 학생들에게 사용가능한 수학적 설명은 무엇인지 협상하는 상황을 초래하였다.

한 초등학년 프로젝트 교실에서 이러한 협상은 그 학년도가 시작되는 첫 날부터 시작되었다.[6] 그 학년도 초기에 사용된 몇몇 활동들은 몇 개의 점으로 만들어진 패

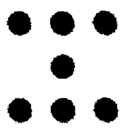
6) 이 학급의 학생들은 수학수업에서 탐구지향적 방법을 처음으로 접해보았다는 지적할 필요가 있다. 그들은 그들의 사고를 설명하는 경험을 가져본 적이 없다. 사실, 이 예가 보여주듯이, 그들은 과제의 어떤 측면이 수학적이라고 생각될 수 있는지 배워야 했다. 따라서, 교사는 설명과 수학적 설명을 구성하는 것이 무엇인지에 대한 규범의 협상을 주도해야 하는 위치에 있었다.

턴과 관련되었다. 한 활동에서 이러한 점 패턴을 OHP 위에서 몇 초간 보였다 감추었다 하는 것을 몇 차례 반복하였다. 아동들에게 주어진 과제는 거기에 몇 개의 점이 있었는지 알아맞히고 어떻게 알았는지(how they saw it) 설명하는 것이었다. 이 과제의 목표는 시각적 이미지의 발달을 촉진하고 작은 수에 대해 수관계에 대한 토의를 이끌어 내는 것이었다. 예를 들어, 첫째 날 사용된 첫 번째 패턴은 [그림 1]과 같다. 문제의 질문에 대해, 몇몇 아동은 다음과 같이 답하였다: "그 점들을 보았어요.", "눈으로요.", "대각선 방향으로 세 점을 보았어요.", "기울어진 선을 보았어요.", "세 보았어요.". 이들 답변은 주어진 과제를 수학적인 것, 즉 이 경우 설명은 수와 관련되어야 한다는 생각을 구성하는 것을 시도하기 위한 기초를 형성하였다. 따라서, "대각선 방향으로 세 점을 보았어요."는 수용가능하지만, "눈으로요."는 그렇지 않다. 이처럼 매우 사소한 예를 통해 교실에서 수학적 의사소통으로 생각되는 것이 무엇인지는 구성되어야 함을 입증할 수 있다. 학생들이 교실활동과 토의에 참여하면서, 그들은 그들의 교실에서 수학적 설명을 구성하는 것이 무엇인지 배운다. 동시에, 그들의 활동은 수용가능한 수학적 설명을 구성하는 것은 무엇인지에 결정하는데 기여한다.



[그림 1] 세 개의 점으로 이루어진 패턴

이 사례는 교실 안에서 수용가능한 수학적 설명으로 생각되는 것이 학생과 교사의 상호작용을 통해 구성되는 방식을 보여준다. 그 다음 날 주어진 과제에 대한 아동의 응답은 전날 시작된 암묵적 협상의 효율성을 보여주는 자료이다. 다음 날, 교사는 [그림 2]의 패턴을 보여주었다. 이 때, 아동들의 응답은 세기를 활용한 설명과 세기를 사용하지 않는 설명 양자를 포함한다. 예를 들어, 몇몇 학생은 다음과 같이 대답했다: 세 개와 하나와 또 다른 *세 점을* ***보았으므로*** 일곱 개의 점을 보았다. 하지만 "눈으로요."와 같은 응답을 한 아동은 없었다. 그러나, 수용가능한 설명에 관한 규범은 지속적으로 협상되어 가고 재협상된다. 이 경우, "세 개와 하나와 또 다른 세 점을 보았으므로 일곱입니다."라고 답한 아동들은 그들이 어떻게 3, 1, 그리고 3에 기초하여 7이라는 합에 도달했는지 설명하는 데까지 이르지 않았다. 이들은 그들의 설명이 충분하다고 여기는 듯 했다. 즉, 그들은 다른 학생들도 3+1+3=7임을 즉시 깨닫는다는 것을 의심하지 않았다. 그러나, 학기 초에 아동들을 대상으로 행한 개인면담과 교실활동관찰을 통해 몇몇 아동은 덧셈을 하기 위해 하나씩 세기를 하는 아동이 있음을 알 수 있었다. 동시에, 이 학급의 모든 아동은 "첫 번째 줄에 세 개, 두 번째 줄에 하나, 세 번째 줄에 세 개"가 있음을 지각할 수 있었다(최소한 한 아동은 패턴의 각 줄에 있는 점의 수는 이런 방식으로 명백히 언급하였다.). 따라서, 위에 제시된 설명이 적절한 지의 여부는 최소한 이 학급의 몇몇 학생들에게 의문의 여지가 있다. 이는 설명을 공동체적 개념으로 받아들일 때 중요한 측면을 지적한다. 설명의 적절성은 말하는 이가 아닌 듣는 이의 관점에 따라 결정된다. 뿐만 아니라, 듣는 이의 개념적 이해는 무엇이 그들에게 개인적으로 적절한 것인지 결정한다.



[그림 2] 일곱 개의 점으로 이루어진 패턴

이제 우리는 설명이 학생들에게 경험적으로 실제적인 수학적 대상에 대한 행동과 관련된다는 앞서의 주장을 설명할 수 있다. 한편으로, 우리는 설명이 계산절차의 단순한 반복이 되어서는 안되며 학생들의 사고에 의해 생성된 행동과 관련되어야 한다고 본다. 다른 한편으로, 우리는 행동과 그 행동이 가해지는 대상이 설명을 시도하고 그 설명을 이해하려는 학생들에게 개념적으로 의미있어야 한다고 본다. 이 논의를 좀더 확장하기 위해 우리는 설명의 적절성과 같이 논증의 과정에서 진술이 수행하는 다양한 기능을 묘사하는 분석적 도구가 필요하다. Toulmin의 논증도식은 이러한 목적에 유용하다.

Krummheuer에 의해 수정보완된 Toulmin의 논증도식

논증에 대한 Krummheuer의 연구는 이 연구에서 택한 접근법의 배경을 제공한다. 그의 논증의 민족학에 관한 연구에서, Krummheuer는 결론, 자료, 확증과 지지로 이루어진 Toulmin의 도식을 이용하여 논증을 분석하였다. 이 도식에 따르면, 결론은 확실한 것처럼 여겨지는 진술이다. 그것은 하나의 주장이다. 이 주장을 뒷받침하는 것이 자료이다. 자료는 몇 가지 근거에서 의문시 될 수 있다. 자료의 타당성에 대한 의문이 제기될 수 있다. 그런 경우, 또 다른 자료가 제공되거나 별도의 논증이 주어짐으로 의문시된 자료를 하나의 확립된 주장으로 취급하는 것이 필요하다. 다른 종류의 도전은 자료의 설명적 타당성에 대한 의문이 제기될 때 일어난다. 이런 경우 확증이 필요하다. 확증은 자료의 합법성, 즉 왜 주어진 자료가 결론을 뒷받침한다고 생각하는지에 대한 이유를 설명한다. 지지는 확증에 대한 뒷받침, 즉 지지는 왜 확증이 권위를 가진 것으로 받아들여져야 하는지 이유를 나타낸다(Toulmin, 1969). 지지는 일반적인 이론, 신념, 그리고 초보적 전략을 지칭하고(Krummheuer, 1995) 이들 이론, 신념, 전략 등이 토의에 참여하는 이들 사이에서 얼마나 공유되어 있는지의 정도에 비례해서 성공적이다(Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Brown, 1998). Ball과 Bass(2000)는 '공적 지식의 기반'이라는 개념을 "수학적 주장을 구성하고 그것을 정당화하는데 관여하는 특정 공동체의 공적으로 이용될 수 있는 수학적 지식"(p.201)이라는 개념으로 확장하였다. Toulmin의 논증도식에 비추어 볼 때, 공적 지식의 기반이란 수학 교실의 공동체적 논증을 지지하는데 선택되는 지식을 가리킨다. Krummheuer가 인용한 초등학년수업의 예에서 지지는 손가락을 이용하여 하나씩 세가는 절차를 통해 덧셈을 이해하는 것이다.

Toulmin의 도식을 이용하여 논증 분석하기

위에서 제시한 초등학년 수업으로부터의 사례로 돌아가서 Toulmin의 도식이 논증의 분석에 활용되는 방법을 보이고자 한다. 그 예에서 몇몇 학생은 그들이 그림에서 세 점, 한 점 그리고 또 세 점을 보았으므로 일곱 개의 점을 보았다고 설명했다. 위에서, 나는 이 설명이 셋과 하나와 셋을 더해서 일곱이 된다는 사실을 즉각적으로 알지 못하는 아동에게는 부적절할 수 있음을 지적했다. Toulmin의 논증도식의 언어를 사용하면, 결론은 "일곱 개의 점이 있다.", 자료는 "세 개, 한 개, 그리고 세 개의 점이 있다."이다. 이 자료는 3+1+3=7임을 아는 아동에게 적절하다. 그러나 이것을 모르는 아동은 확증을 원할 수 있다. 확증은 자료의 설명적 타당성, 즉 왜 삼과 일과 삼이 일곱이라는 결론과 관련이 있는지 설명하는 것이다. 이러한 아동에게 전체를 세는 것은 (아마도 필요한) 지지가 될 것이다.

논증을 분석하기 위해 이러한 접근법을 취하는 것의 중요한 측면은 확증과 지지의 필요성, 그리고 하나의 진술이 수행하는 기능이 학생 마다 다를 수 있다는 것이다. 결과적으로, 논증의 분석은 참여자와 그들이 만든 해석을 고려해야만 한다. 이러한 의미에서, 논증이란 상호작용적 성취이며 그 속성상 공동체적이다. 하나의 진술이 가지는 기능은 그 진술이 맥락화되어 있는 상호작용과 유리되어 있지 않다. 따라서, 자료, 확증, 지지를 구성하는 것은 미리 정해진 것이 아니라 참여자들 사이의 상호작용과정에서 협상된다.

논증에 대한 이러한 접근법은 시간에 따라 진행되는 변화를 입증할 수 있는 방법을 제공하기 때문에 교실에서의 집단적 학습을 상세히 재현하는데 유용하다. 뿐만 아니라, 이러한 접근법은 개인과 공동체, 즉, 학생 개개인이 특정 상황에서 제시한 설명과 정당화, 그리고 공유된 교실수학 관행 사이의 관계를 밝히는데 도움이 된다. 논증의 언어를 사용할 때, 우리는 교실수학 관행의 진화가 학생들이 자료, 확증, 지지로 받아들이는 것이 무엇인가에서 나타나는 진화와 평행하다고 주장한다. 이것은 다시 학생 개인의 개념적 이해와 가능성에 밀접히 관련되어 있다. 교실에서 공유된 것으로 받아들여지면서 수학적 관행은 정당화의 범주를 벗어나고 따라서 자료로서, 확증으로서, 그리고 지지로서 요구되는 것은 진화한다. 마찬가지로, 설명과 정당화에 대한 자료, 확증, 지지

로서 주어지는 근본적인 이유의 유형은 교실공동체에서 공유된 것으로 받아들여지는 것의 발달에 기여한다.

예를 들어, 앞서 논의한 초등학년교실에서 사고전략과 관련된 해법에 대한 설명은 시간에 따라 암호화된다. 몇 주 후 교사는 열 개의 칸으로 만들어진 틀을 사용하는 과제를 제시했다. 교사는 두 개의 틀에 칩 몇 개를 놓고 OHP 위에서 그 이미지를 보였다 없앴다 하는 것을 반복했다. 과제는 그 틀 안에 몇 개의 칩이 있었는지 맞추고 어떻게 그 개수를 알아냈는지 설명하는 것이다. 교사는 각 줄에 다른 색의 칩을 사용하였다. 그럼으로써 교사는 학생들이 그 과제가 두 양 사이의 합을 구하는 것으로 해석할 수 있는 상황을 만들었다. 이 수업 활동의 중요한 특징은 그 과제가 일련의 순서로 나열되어 후속과제가 선수과제에 연관되어 있다고 생각될 수 있다는 것이다. 교사는 학생들이 자발적으로 과제를 서로 연관시켜 생각할 수 있는 기회를 만들었다고 할 수 있다. 아홉 번째 수업에서 교사는 그러한 과제를 여러 개 제시했다. 첫 번째 과제는 다음과 같다:

과제 1: 첫 번째 틀에 다섯 개의 칩과 두 번째 틀에 다섯 개의 칩
과제 2: 첫 번째 틀에 여섯 개의 칩과 두 번째 틀에 다섯 개의 칩

몇몇 아동은 그들의 응답 속에서 과제를 연관시키고 있음을 보였다. 예를 들어, 과제 2에 대한 풀이를 설명하라는 요청에 대해, Hakeem은 다음과 같이 답했다: "다섯과 다섯은 열이고…, 여섯에는 점이 하나 더 있어요. 다섯에 점 하나가 더 있어서 여섯이 되고 그것들을 합께 놓으면 11이 되요." 나중에, 다른 학생이 질문을 했을 때, Hakeem은 다음과 같이 부연설명했다: "왜냐하면 잘 봐. 나는 10을 구했고 거기에 선생님은 하나를 더 놓으셨고 그러만 봐, 그게 여섯이 되고 이건 다섯이고 그러면 이것 여기로 가고(먼저 다섯 손가락을 모두 편뒤 거기에 한 손가락을 더해서 여섯으로 바뀌는 것을 보인다.). 그래서 그게, 그게 11이 돼." 이전에 Hakeem이 과제 1의 풀이를 설명하면서 양손을 모두 들고 "그러면 나는 이거 모두를 보는 거예요. 그래서 열인 줄 알았어요." 라고 언급했기 때문에 이와 같은 부연설명은 특히 그 학급 토론에 대해 많은 것을 알려준다. 따라서, 그의 두 설명이 함께 주어졌을 때 그로부터 Hakeem이 두 과제 사이의 연관성을 인식하고 있고 그 연관성을 두 번째 문제를 해결하는데 사용하는 방법을 명확히 하는 것으로 해석할 수 있다. 이러한 이미에서, Hakeem은 그의 주장에 대한 자료와 확증 모두를 제공하고 있다. 이처럼 이전에 풀어본 문제를 직접적으로 언급하는 것은 수업토론에서 중요해진다. 그 이유는 다른 학생들이 유사한 전략을 주목하고 사용하려고 시도하기 때문이다. 이 수업에서, 한 남학생은 Hakeem의 과제 2 풀이를 '천재적인' 풀이라고 하면서 통찰력이 있는 것으로 언급하였다.

그 이후 몇 주 동안, 점진적으로 많은 학생들이 앞서 해결한 문제와 주어진 문제를 연관지으며 해를 구하기 시작했다. 뿐만 아니라, 그들이 그들의 사고를 설명하는 방법은 보다 간략해져 갔다. 예를 들어, "다섯에 점이 하나 더 있으면 여섯이 된다."와 같은 Hakeem의 장황한 설명은, "그냥 하나 더 있어요.", "그냥 하나만 더하면 되니까 11이에요.", "하나 더. 그래서 16."과 같은 설명이 흔히 주어졌다. 이와 같은 차이는 사소해서 중요해 보이지 않을 수 있다. 그러나, Krummheuer의 논증 분석에 따르면, 이와 같은 간결한 진술이 점차 확증이나 부가적인 지지 없이 결론에 대한 자료 역할을 하고 있음을 추론할 수 있다.[7] 학생들에게 무엇이 충분한지와 관련하여 나타나는 이와 같은 진화는 과제를 해결하는 관행을 선수 과제와 연결지음으로써 공유된 교실의 수학적 관행으로 언급하는 것을 가능하게 하는 것이다.

나는 이 사례를 이용하여 결론, 자료, 확증, 지지로서 받아들여지는 것이 무엇인지를 근간으로 논증을 분석함으로써 시간에 따른 진화를 증명할 수 있음을 보였다. 자료, 확증, 지지로 요구되는 것이 무엇이고 무엇이 주어지는 지에서의 진화는 공동체로서의 교실의 진보를 보여준다. 나아가, 그것은 아동 개개인의 이해와 전체로서의 교실이 가지는 이해가 상호작용적으로 진화하는 과정을 보여준다.

---

7) Hakeem이 다섯에 점 하나를 더한다는 것을 언급하는 것은 다섯과 다섯이 10이 되는 것이 타당한 것에 대한 근본적인 이유를 제공한다. 어떤 아동에게, 이와 같은 부가적 정보는 확증의 역할을 했다.

교실 수업에 대한 중요성

앞서의 논의가 교실 수업에 가지는 중요성은 그것이 교사가 교실 담화의 제측면을 개념화하는 방법을 시사한다는 것이다. 그러한 개념화는 진행 중인 수업을 분석하는데 유용할 뿐만 아니라 앞으로의 수업을 준비하는데 잠재적으로 유용하다. 이 절에서, 나는 설명, 정당화, 논증에 대한 사회적·사회수학적 규범에 주목하여 계획된 대학수준 미분방정식 수업으로부터 예를 묘사하고 그러한 수업이 주는 혜택에 초점을 둘 것이다.

여기서 제시하는 사례들은 나의 동료 Chris Rasmussen이 지도한 공학이나 수학을 전공하는 대학생들을 상대로 개설된 미분방정식 강의로부터 택했다. 지난 수년간, Rasmussen은 자신이 강의를 담당한 교실에서 미분방정식 교수 학습을 연구하는 교수 실험을 행해왔다. 각 교수 실업의 구체적인 목표는 탐구지향적 수업에 독특한 사회적·사회문화적 규범을 구성하는 것이었다. 설명 · 정당화와 관련된 규범은 학생들이 그들의 사고를 설명하고 정당화하는 것, 다른 학생의 설명을 경청하고 그 의미를 이해하는 것, 설명은 그들에게 경험적으로 실제적인 대상에 대해 취해진 행동이어야 한다는 것을 포함한다. 첫 번째 교수 실험으로부터 수집된 자료의 분석을 통해 이들 규범이 형성되었으며 어떻게 규범의 협상을 교사가 주도해가는지 보여주었다(Yackel & Rasmussen, 2002; Yackel, Rasmussen & King, 2001).

첫 번째 교수 실험의 두 번째 차시에서 관찰된 다음의 예는 설명을 촉발하는 사회적 규범의 형성을 보여준다. 교사는 수업을 시작하면서 그가 학생들의 수학적 활동에 대해 가지고 있는 기대를 간단히 진술하였다. 그런 후 약 20분간 학생과 교사는 그 전 시간에 다룬 바 있는 전염병에 걸렸다 회복되는 인구의 변화율을 표현하는데 미분방정식을 사용하게 되는 이론적 근거에 대해 토의하였다. 이 논문의 목적에 비추어 이 수업 장면이 가지는 중요성은 교사가 사회적 규범협상 과정에 의식적으로 주목하고 있다는 점이다. 그가 학생들에게 주는 대부분의 코멘트는 명시적으로 또는 암묵적으로 기대에 관한 것이다. 예를 들어, 그는 다음과 같은 진술을 하였다:

좋아요. 그러면 왜 그게 1/14 곱하기 I 가 되는지 설명해 줄 수 있습니까?
나머지 사람들은 이 점에 대해 어떻게 생각합니까?
여러분도 이와 비슷하게 생각했나요?
누구 이 설명에 좀더 부가설명하고 싶은 사람 있나요? 그것을 좀더 확장해서 설명할 사람 있나요?
그러니까 그 질문을 한 번 정리해 봅시다. 당신의 질문은… 이렇게 이야기한 건가요?

이러한 말들을 하면서, 교사는 어떻게 토의에 참여하는 가에 관한 학생들의 해석에 영향을 주려 시도하고 있다. 이러한 관점에서, 교사는 사회적 규범의 재협상에 기여하는 유일한 사람으로 보일 수도 있다. 그러나, 규범은 개인이 상호작용하는 과정에서 형성된다. 이 경우에, 이 수업에 대한 일화가 전개되면서, 학생들은 점차 그 기대에 부합하여 행동함으로써 규범의 협상에 기여했다. 토의가 진전되면서, 학생들은 교사의 질문에 응답할 뿐만 아니라, 동시에 그들이 그 교실에서의 참여구조에 대한 이해가 변화하기 시작했음을 보이는 코멘트를 했다. 예를 들어, 토의가 진행되고 몇 분후, 한 학생은 "나는 저 학생이 한 말을 잘 이해하지 못했다."고 말하고 몇 초 후 그가 이해한 바를 설명한 뒤 "내가 이해하지 못하는 것은, 내가 질문하려고 하는 것은…"이라고 말했다.

위의 수업 일화가 계속되면서, 몇몇 학생은 질문을 하고, 설명을 제시하고, 또 부연설명을 요구하였다. 그러면서, 그들은 또한 학생들이 그들의 사고를 설명하고 다른 사람의 설명을 이해하지 못할 때 질문이나 반박을 해야한다는 사회적 규범의 계속적인 형성에 기여하였다. 나아가, 그 학기를 통해서 진행된 교실상호작용의 분석결과는 이들 규범이 잘 확립되었음을 입증해준다. 뿐만 아니라, 여기서 증거자료를 제시하지는 않았지만, 설명이 학생들에게 경험적으로 실제적인 수학적 대상에 대한 행동이라는 것이 규범화되었다.

다음의 사례는 보다 최근의 교수 실험에서 취해진 것으로 논증에 대한 세심한 강조로부터 얻을 수 있는 혜택을 명백히 예시하기 위해 포함했다. 이 교수 실험에서,

Rasmussen의 수업 접근법은 설명과 정당화를 앞서 수업에서보다 훨씬 강조하였다. 그 접근법은 짧은 소집단 토의 상황에 이어지는 좀더 긴 전체 학급토의로 구성되었다. 소집단은 그들의 생각을 공유하기까지 대략 2분간 토의를 하였다. 뿐만 아니라, 소집단 활동에서 학생들의 과제는 대체로 구체적인 문제를 푸는 것이라기보다는 질문이나 주제에 대해 생각하는 것이었다.

그 학기의 두 번째 수업은 한 쌍의 미분방정식으로 묘사되는 피식자-포식자 문제에 관한 토의로 시작되었다. 학생들은 주어진 미분방정식의 해를 구하는 분석적 기술을 가지고 있지 않지만 비형식적이고 질적인 사고를 통해 그 상황의 의미를 파악하였다. 토의를 통해 교사는 반복해서 학생들에게 그들이 제시한 주장의 근거를 질문하였다. 학생들이 이유를 설명할 때, 교사는 그 이유의 타당성을 평가하지 않고 대신 다른 학생들에게 제시된 이유에 대한 생각과 다른 논증을 제시할 것을 권하였다. 예를 들어, 교사는 다음과 같은 말들을 하였다: "그의 생각에 대해 어떻게 생각합니까?", "좋아요. 좋은 생각입니다. 다른 의견이 있는지 들어봅시다." 규범의 시각에서 볼 때, 교사는 학생들이 그들의 주장을 정당화하는 논의를 제공할 것, 그리고 하나의 주장을 뒷받침할 수 있는 논증은 한 가지 이상 존재할 수 있다는 기대를 이끌어내고 있다. 논증의 관점에서, 논의는 주장 그 자체가 아니라, 주장을 뒷받침할 수 있는 자료, 확증, 지지에 초점을 맞추고 있다고 할 수 있다.

그런 뒤 교사는 한 가지 종에 국한된 단순화된 문제를 제시하고 학생들에게 "이제부터 몇 분 동안 각자 그래프를 그려보고 소집단의 친구들과 자신의 그래프가 어떻게 생겼고 왜 그 그래프가 그렇게 생겼다고 생각하는지 이야기해 보세요."라고 말했다. 2분 정도 지난 뒤, 교사는 전체 학급을 주목시키고, 칠판에 양의 기울기를 갖는 직선을 그린 뒤, 학생들에게 이 그래프에 동의하는 또는 동의하지 않는 이유를 설명해 보라고 했다. 이 일화에서 흥미로운 점은 교사가 학생들이 그린 그래프에 대해 이야기해 보라고 하지 않았다는 것이다. 대신, 그는 하나의 결론을 제기하고 학생들에게 주어진 주장을 뒷받침할 수 있는 이유, 즉 자료, 확증, 지지를 제시하라고 하였다. 토의가 진행되면서, 몇몇 학생들은 왜 그들이 직선 그래프에 동의하는지 또는 동의하지 않는지 이유를 제시하였다. 결과적으로, 인구증가는 지존의 인구 크기에 의존하고 특정한 종의 인구 증가 비율을 설명하는 데 매개변수를 생각하는 것이 합당하다는 주장을 포함하여 인구증가문제와 관련된 주요 이슈 몇 가지가 학생들에게 의해 제기되었다.

나는 이 일화를 통해 이 수업에서 학생들의 수학적 활동이 결론을 뒷받침하는 이유를 생각해 내려는 시도를 중심으로 이루어지고 누군가에 의해 주장된 이유가 도전과 반박에 열려있다는 것, 그리고 부가적인 수학적 아이디어와 도구가 제시된 주장을 지지하거나 반박하기 위해 개발되어야 한다는 기대가 규범화되고 있음을 예시하고자 했다. 사고에 대한 지속적인 강조로 인해, 전체 학급 토의는 기울기장, 분기도와 위상평면을 포함하는 주요한 개념의 발생으로 이어졌다. 이러한 의미에서, 이 수업 접근법은 학생들의 토의를 통한 심도있는 개념적 발달의 가능성이 크다고 볼 수 있다. 이유를 강조하는 것은 토의를 종결짓는 것이 아니라 수학적 목표를 진척시키는 기회를 창출하는 효과를 가지고 있다. 이러한 결과는 그것이 '수학적 내용'이라고 불리는 것이 NCTM의 원칙과 규준집에서 주창하는 접근법을 따르는 수업을 통해 어떻게 발달하는지 보여준다(NCTM, 2000). 이러한 의미에서 수학적 내용은 수업이 학생들의 의미 이해를 심각하게 참고할 때 협상된다는 주장에 대한 비판을 뒤엎는다.

결론

이 논문에서 나의 목적은 수학교실에서 나타나는 설명, 정당화, 논증을 분석하는 이론적 관점을 상세화하고 교실 사례를 이용하여 이들 관점이 분석에 활용되는 방법을 예시하는 것이었다. 첫 째로, 나는 기호적 상호작용주의가 설명, 정당화, 논증과 관련된 규범을 분석하는데 유용하게 쓰이는 방법을 보였다. 특히, 나는 초등학년 교실로부터의 사례를 통해 수용가능한 수학적 설명에 관한 사회수학적 규범이 상호작용을 통해 형성되어가는 과정을 보였다. 그리고 나는 Toulmin의 논증도식을 사용하여 시간에 따른 진화를 상세히 설명하는 방법을 보였다.

이러한 목적을 달성하기 위해, 나는 같은 수업에서의 사례를 통해 학생들이 자료, 확증, 지지로서 요구하고 제시한 것이 학기가 진행되면서 진화되어가는 것을 보였다. 끝으로, 나는 대학수준 미분방정식으로부터의 사례를 통해 탐구지향적 수업에 독특한 설명과 정당화에 대한 사회적·사회수학적 규범에 주목하여 세심하게 계획된 수업이 강력한 수학적 개념의 발생으로 이어짐을 보였다. 이러한 방법으로, 나는 이론적 관점이 수학교사와 연구자가 초등학년으로부터 대학수준 수학 수업을 계획하고 수행하는데 유용한 지침을 제공하는 과정을 보였다. 특히, 나는 수학적 사고를 수학적 활동의 핵심으로 강조하는 수업이 교실에서 어떻게 실현될 수 있는지 보였다.

참 고 문 헌

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Making believe. The collective construction of public knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education. Constructivism in education* (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Cobb, P. (1998). Analyzing the mathematical learning of the classroom community: The case of statistical data analysis. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 1, pp. 33-48). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interacitonal analysis. *American Educational Research Journal*, 29, 573-604.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175-190.

Cobb, P.; Yackel, E. & Wood, T. (1989). Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*(pp. 117-148). New York: Springer-Verlag.

Theoretical Perspectives for Analyzing Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms

Erna Yackel
Department of Mathematics, Computer Science & Statistics
Purdue University Calumet

Current interest in mathematics learning that focuses on understanding, mathematical reasoning and meaning making underscores the need to develop ways of analyzing classrooms that foster these types of learning. In this paper, I show that the constructs of social and sociomathematical norms, which grew out of taking a symbolic interactionist perspective, and Toulmin's scheme for argumentation, as elaborated for mathematics education by Krummheuer, provide us with means to analyze aspects of explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms, including means through which they can be fostered. Examples from a variety of classrooms are used to clarify how these notions can inform instruction at all levels, from the elementary grades through university-level mathematics.