

수학교육에서 평가결과에 기초한 개별화 학습과정의 위계도¹⁾

변 두 원 (공주대학교 과학교육연구소)

정 인 철 (공주대학교 과학교육연구소)

박 달 원 (공주대학교)

노 영 순 (공주대학교)

김 승 동 (공주대학교)

1. 서론

제7차 교육과정에서는 열린교육 사회와 평생학습 사회의 건설을 비전으로 삼고 있으며, 이러한 비전의 실현을 위해 학습자 중심의 교육, 다양하고 특성화된 교육, 자율과 책무성에 바탕을 둔 교육, 자유와 평등이 조화된 교육, 교육의 정보화를 통한 21세기형 열린교육, 그리고 평가를 통한 질 높은 교육으로의 전환을 꾀하고 있다(교육인적자원부, 1998; 김태성, 1995; 박한식, 2001; 신현용, 2001; 홍성강, 1995). 이러한 세부 목표 중에서 맨 마지막의 “평가를 통한 질 높은 교육”이란 교육의 질을 높이기 위해서 교육과정에 적정의 평가가 필요함을 암시하고 있다. 또한 미국수학교사협회(1995)는 ‘학교수학을 위한 평가규준(Assessment standards for school mathematics)’에서 평가는 학생들이 배워야 하는 가장 중요한 것들을 반영하는 것이어야 한다고 강조하고 있다. 지금까지 학교교육에서의 대부분의 평가는 학력의 측정에 목적을 두고 실시하였으며, 간혹 진단평가와 형성평가를 실시하였다하더라도 그 평가 결과를 유용하게 활용하는 경우가 드물었다고 볼 수 있다. 이러한 원인은 평가결과로부터 개인별 정보를 얻을 수 있는 도구의 부

재와 평가 대상인 학생수가 너무 많기 때문이다.

요즘 사회문제로 대두되고 있는 사교육의 비대화는 개별 지도가 어려운 공교육의 문제에도 일부 원인이 있다. 그래서 교육 정책의 측면에서 볼 때 학습자 중심의 교육을 강조하지만 그것을 실천하는 것도 역시 어려운 문제이다. 학습자 개개인의 능력과 취향을 분석하여 적절한 교육 프로그램을 제공하는 것이 바로 수요자 중심의 교육이다(박종선, 1999). 그래서 학부모와 학생들은 이러한 학습이 가능한 사교육을 찾기 때문에 공교육을 동원히 하는 것이라 생각된다. 그러므로 학생 개개인에 맞는 학습과정의 설계는 현실의 공교육 문제를 다소나마 해결할 수 있는 방안임에 틀림없다.

수학교과에 대해서 제7차 교육과정이 중점을 두는 것 중 하나는 단계형 수준별 교육과정의 운영이다. 수학교과와 많은 내용은 수학적 개념의 도입 순서에 따라 서로 간의 위계가 결정된다. 한편, 같은 수학적 개념이라도 도입의 방식에 따라 또는 응용의 대상에 따라 학습의 순서가 결정된다. 이상과 같은 위계는 교사의 전문성과 경험으로 분석 가능한 경우가 많다. 그러나 실제 교육에서는 의외의 위계관계가 발생할 수 있다. 여기서의 의외성은 학생들의 지식상태에 대한 교사의 판단이 잘못 되었기 때문이라 볼 수 있다. 이것은 학생에 대한 이해의 부족으로 야기될 수 있으며, 특히 요즘과 같이 과학문명이 급속히 발전하면서 기성세대의 접근이 어려운 그들만의 영역의 존재에 기인한다. 그러므로 비록 지식적인 내용이라 할지라도 이들의 위계를 학생들에게 직접 투영한 결과를 이용하는 것이 가장 바람직하다고 볼 수 있다.

학생들로부터 얻은 평가결과를 해석하는 방법은 지식

* 2003년 8월 투고, 2003년 12월 심사완료.

* ZDM분류 : C70

* MSC2000분류 : 97C40

* 주제어 : 평가, 수학적 연계성, 개별화 학습, 지식구조, 수학의 이해

1) 본 논문은 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음 (KRF-2001-005-B22005).

공간론을 활용하면 어느 정도 가능하다. 이 이론은 Jean-Paul Doignon과 Jean-Claude Falmagne(1999)에 의해서 주창된 것으로 지식의 위계성에 바탕을 둔 이론이다. 그러므로 비교적 위계가 강한 수학교과와 내용에 적합하다. 또한 이 이론을 이용하여 평가결과를 해석할 때, 통계처럼 양적인 요소를 사용하지 않는다(공주대학교 과학교육연구소, 2002). 그러므로 정량화 과정에 따른 오류가 없다.

본 논문에서는 학생들의 평가결과를 지식공간론을 활용하여 분석하고, 이것으로부터 얻은 위계를 도식화함으로써 개별화 학습을 위한 이정표로 활용하려 한다. 본 연구에 사용되는 자료는 비교적 크기 때문에 컴퓨터를 사용하였으며, 이 때 사용한 알고리즘을 간단히 소개한다.

2. 지식공간론 개요

대부분의 교과교육 평가에서 학생들의 정답 문항은 몇 가지 유형으로 분류된다. 이것은 각 문제를 해결하기 위한 배경 지식이 어떤 관계를 갖고 있기 때문이다. 예를 들어, 두 문항에 대한 각각의 배경 지식이 상하의 위계관계를 갖고 있다면 많은 학생의 답안에서도 그 관련성이 나타날 것이다. 역으로 우리는 학생들의 평가결과를 이용하여 각 문제에 관련하는 지식의 체계를 분석하는 것이 가능하며, 이러한 이론적 근거가 지식공간론이다. 본 절에서 위계도의 도식화 알고리즘의 이해에 필요한 지식공간론의 일부를 소개하며, 사용되는 정의와 정리는 기존의 여러 문헌에 등장하는 것으로 독자의 편의를 위해 다시 소개하도록 한다.

1) 지식구조

평가 결과를 분석할 때, 분석 결과의 신뢰성은 학생들이 얼마나 성실한 태도로 평가에 임하였는지에 좌우된다. 평가에 어떤 학생이 성의없이 임했다면 평가 결과로부터 얻은 정보는 그 학생에 관한 참된 정보라 할 수 없다. 그러므로 합리적인 수학적 모형을 구성하기 위해서 평가에 임하는 모든 학생에 대하여 다음과 같은 두 가지 조건을 가정하기로 한다: (1) 모르는 문제를 우연히 맞히는 경우는 없다; (2) 맞힐 수 있는 문제를 실수로 틀리는 경우는 없다.

모든 학생들에게 위의 두 전제가 보장되는 평가라면

가장 이상적인 평가라 할 수 있지만 실제 상황에서는 이러한 경우를 기대할 수 없다. 그러므로 이 문제에 대한 보완책으로 위의 전제를 만족하는 답안만을 골라 평가에 활용하는 방법을 택할 수 있다.

본 논문에서 취급하는 평가문항은 모두 이분문항²⁾이다. 평가에 있어서 어떤 학생이 맞힌 문항의 집합을 지식상태(knowledge state)라 한다. 이 집합은 그 학생에 대한 지식정보를 갖고 있으며, 충분히 많은 학생이 같은 평가문항으로 평가를 받았다면 다른 학생의 지식상태와 비교하여 그 학생의 현재의 지식 수준을 알 수 있을 것이다. 여기서 충분히 많은 학생에 대한 정보를 기준으로 삼는 이유는 정보를 최대한 객관화하기 위함이다. 이것은 아무리 많은 학생이 평가에 참여하더라도 학생 각자의 답안은 몇 가지의 유형으로 분류 될 것이고, 따라서 평가에 참여하는 학생의 수가 어느 정도 이상이라면 지식상태의 종류와 개수는 일정할 것으로 예상되기 때문이다. 그러므로 어떤 평가에 대해서 지식상태의 모임 전체는 대체로 일의적으로 결정된다고 볼 수 있다.

지식상태들의 모임에 대하여 수학적 해석의 편의를 위해 다음과 같은 정의를 도입하자.

정의 2.1 Q 를 평가문항의 집합이라고 하고 K 를 지식상태의 어떤 집합이라 하자. 이 때, 집합 K 가 공집합 ϕ 와 전체집합 Q 를 포함하면, 순서쌍 (Q, K) 를 지식구조(knowledge structure)라 한다.

(Q, K) 가 지식구조이면 K 의 원소의 합집합은 Q 가 된다. 즉, $\bigcup_{K \in K} K = Q$ 가 성립한다. 그러므로 특별히 혼란이 없을 경우, 지식구조 (Q, K) 를 K 로도 표기한다.

지식구조란 평가결과로부터 얻어지는 하나의 집합이다. 이 집합에 ϕ 또는 Q 가 없는 경우 이들을 첨가하여 지식구조를 구성할 수 있다. 공집합 ϕ 는 모든 문항을 틀린 학생이 있다는 것을 의미하고, 전체집합 Q 는 모두 맞힌 학생의 존재를 나타낸다. 그러므로 지식구조 K 의 각 원소를 지식상태로 생각하자. 이러한 방법은 실제 상황을 고려하면 타당한 정의이다.

앞으로의 대부분의 논의는 지식구조로부터 시작하며, 지식구조의 원소 하나 하나를 지식상태로 본다.

2) 맞음"과 "틀림" 두 가지로 판명할 수 있는 문항

2) 평가문항의 분류

정의 2.2 지식구조 (Q, K) 와 Q 의 원소 q 에 대해서 K_q 는 q 를 포함하는 모든 지식상태의 집합이다. 즉, $K_q = \{K \in K \mid q \in K\}$ 이다.

예를 들어 설명하자. 평가문항의 집합 $Q = \{a, b, c, d, e, f\}$ 에 대해서

$$K = \{\phi, \{d\}, \{a, c\}, \{e, f\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{d, e, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, Q\}$$

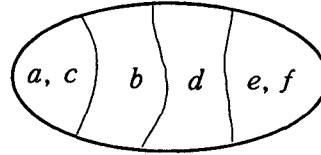
라 하면 (Q, K) 는 지식구조가 된다. 지식구조 (Q, K) 에 대해서 K_a 와 K_e 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$K_a = \{\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, Q\}$$

$$K_e = \{\{e, f\}, \{d, e, f\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e, f\}, Q\}$$

이러한 방법으로 K_c 를 구해보면 $K_a = K_c$ 임을 알 수 있다. 이것은 a 를 포함하는 모든 지식상태는 c 를 포함하고, 역으로 c 를 포함하는 모든 지식상태는 a 를 포함하고 있음을 나타낸다. 즉, 문항 a 를 맞힌 모든 학생은 문항 c 를 맞힐 수 있고, 문항 c 를 맞힌 모든 학생은 문항 a 를 맞힐 수 있다는 것을 의미한다. 그러므로 문항 a, c 를 해결하기 위한 배경 지식은 어떤 의미에서 같은 것으로 볼 수 있다. 역시 위의 과정으로 $K_e = K_f$ 임을 확인할 수 있다. 이 때, a 와 c, e 와 f 는 같은 정보원을 갖는다고 말한다.

지식구조 (Q, K) 에 대해서 Q 의 원소 p, q 가 같은 정보원을 가질 때 관계 $p \sim q$ 로 정의하면 (Q, \sim) 는 동치관계임을 쉽게 확인할 수 있다. 이와 같은 동치관계에 대하여 q^* 를 문항 q 의 동치류로 표기한다. 위에서 정의한 지식구조 (Q, K) 에 대해서 동치관계를 이용하여 집합 Q 를 다음과 같이 분할할 수 있다.



[그림 1] 평가문항의 분할

정의 2.3 지식구조 (Q, K) 에 대해서 모든 개념이 단 하나의 원소로 구성되어 있을 경우 즉, 모든 원소 q 에 대해서 q^* 가 단 하나의 원소로 이루어져 있을 때 지식구조 (Q, K) 는 구별적(discriminative)이라 한다.

지식구조 (Q, K) 가 구별적이면 모든 Q 의 원소 q 에 대해서 $q^* = \{q\}$ 가 성립한다. 그러므로 Q 의 모든 원소는 서로 구별되는 개념에 속한다는 것을 알 수 있다. 평가문항의 선별에서 모든 문항이 서로 다른 개념에 속하도록 하는 것이 일반적이다. 만일 그렇지 못할 경우 평가가 끝난 후 동일 개념의 문제는 같은 문항으로 여기고 평가 결과를 해석하는 것이 합리적이다.

구체적 설명을 위해 앞에서 정의한 지식구조 (Q, K) 를 사용하자. Q 의 부분집합 A 에 대해서

$$A^* = \{q^* \mid q \in A\}$$

로 표기하기로 한다. 그러면

$$Q^* = \{a^*, b^*, d^*, e^*\}$$

가 된다. 따라서 Q^* 의 원소는 같은 개념의 문항을 하나로 묶어 표현한 것이다. 지식구조 K 에 대해서 $K^* = \{K^* \mid K \in K\}$ 라 하면 (Q^*, K^*) 는 하나의 지식구조가 되며 더욱이 구별적이다. 이 때, (Q^*, K^*) 를 지식구조 (Q, K) 의 구별적 축약(discriminative reduction)이라 한다. 위에서 정의한 지식구조 (Q, K) 의 구별적 축약 K^* 를 구하면

$$K^* = \{\phi, \{d^*\}, \{a^*\}, \{e^*\}, \{a^*, b^*\}, \{a^*, d^*\}, \{d^*, e^*\}, \{a^*, b^*, d^*\}, \{a^*, e^*\}, \{a^*, d^*, e^*\}, Q^*\}$$

이다.

3) 평가문항의 위계

대부분의 영역에서 많은 지식들이 서로 위계관계를 갖고 결합되어 있다. 어떤 지식을 습득하기 위해서는 필요한 선행학습의 과정이 있으며, 그 지식의 학습을 마치면 다음 단계의 상위 위계의 지식을 학습한다. 이와 같이 학습의 과정은 어떤 순서에 따라 이루어진다. 그러므로 여러 가지의 지식에 대해서 이들을 효율적으로 학습하기 위해서 학습의 순서를 찾는 것은 교수활동의 무엇보다도 중요한 단계이다.

지식구조를 활용하여 이들 순서를 다음과 같이 정의한다.

정의 2.4 지식구조 (Q, K) 와 Q 의 두 원소 p, q 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$p \leq q \Leftrightarrow p \in \bigcap K_q$$

이 때, Q 에서의 관계 \leq 를 추론관계(surmise relation)라 한다.

앞으로 기호의 단순화를 위하여 $\bigcap_{k \in K} K$ 대신에 $\bigcap K_q$ 을 쓰도록 하자. $p \in \bigcap K_q$ 는 “ q 를 포함하는 모든 지식상태는 p 를 포함한다”는 것을 의미한다. 그러므로 학습의 과정으로 보면 p 를 학습한 후에 q 를 학습하여야 한다고 추론할 수 있다. 또한 “문항 q 를 맞힌 학생은 문항 p 를 맞힌 것으로 볼 수 있다”고 추론할 수 있다.

정리 2.5 지식구조 (Q, K) 와 Q 의 두 원소 p, q 에 대해서, 명제 $p \leq q$ 와 명제 $K_q \subseteq K_p$ 는 서로 동치이다.

[증명] $p \leq q$ 가 성립한다고 가정하자. 그러면 K_q 의 모든 원소 K 는 p 를 포함한다. 그러므로 $K \in K_p$ 가 되므로 $K_q \subseteq K_p$ 가 성립한다.

역으로 K_q 의 임의의 원소 L 에 대해서 $L \in K_p$ 이다. 따라서 $p \in L$ 이므로 $p \in \bigcap K_q$ 가 성립하여, $p \leq q$ 이다.

정리 2.6 지식구조 (Q, K) 에 대해서 다음이 성립한다.

- i) (Q, \leq) 는 준순서 관계(quasi order relation)이다.
- ii) (Q, K) 가 구별적이면 (Q, \leq) 는 순서 관계(partial order relation)이다.

[증명] Q 의 모든 원소 q 에 대해서 $K_q \subseteq K_q$ 이므로 $q \leq q$ 이다. 즉, 관계 (Q, \leq) 은 반사적이다. 또한, Q 의 세 원소 p, q, r 사이에 $p \leq q, q \leq r$ 의 관계가 성립한다고 가정하면, [정리 2.5]에 의해서 $K_q \subseteq K_p, K_r \subseteq K_q$ 가 성립하므로 $K_r \subseteq K_p$ 이다. 즉, $p \leq r$ 가 성립한다. 따라서 관계 (Q, \leq) 은 추이적이다. 그러므로 관계 (Q, \leq) 는 준순서 관계이다.

ii)를 증명하기 위해서 (Q, K) 가 구별적이라 하고, Q 의 두 원소 p, q 에 대해서 $p \leq q$ 임과 동시에 $q \leq p$ 가 성립한다고 가정하자. [정리 2.5]에 의해서 $K_q \subseteq K_p$ 와 $K_p \subseteq K_q$ 가 동시에 성립한다. 그러므로 $K_p = K_q$ 이다. 구별적이라 가정으로부터 $p = q$ 이어야 한다. 따라서 관계 (Q, \leq) 는 반대칭적이다. 이것은 관계 (Q, \leq) 가 순서 관계임을 보인 것이다.

위 정리의 이해를 위해서 예를 하나 들도록 하자.

$Q = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대해서

$$K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{Q\}$$

라 하면 (Q, K) 는 지식구조이다. 또한,

$$K_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{Q\}$$

$$K_b = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\},$$

$$\{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{Q\}$$

$$K_c = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, e\},$$

$$\{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{Q\}$$

$$K_d = \{\{a, b, c, d\}, \{Q\}$$

$$K_e = \{\{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}, \{Q\}$$

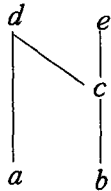
를 얻는다. 이들의 포함관계를 조사하여 보면

$$K_d \subseteq K_a, K_c \subseteq K_b, K_e \subseteq K_c, K_d \subseteq K_c$$

이다. 그러므로 추론관계로 표시하면

$$a \leq d, b \leq c, c \leq e, c \leq d$$

를 얻을 수 있다. 이 관계를 다이어그램으로 나타내면 아래의 그림과 같다.



[그림 2] 평가문항의 위계

3. 위계도 그리기

지금부터 위계도를 얻기까지의 과정을 구체적으로 설명하여 보자. 본 예제에서 사용하는 자료는 실제로 중학교 3학년 37명의 한 학급에 대해서 20문항으로 되어 있는 평가지를 투여하여 얻었다. 본 논문에서 목표로 하는 위계의 분석과정은 평가문항의 구체적 내용과 직접적인 관련이 없으며, 단지 이들 내용이 학생들을 통해서 나타나는 간접적 반응을 분석한다는 것에 관심을 가져야 한다. 사용한 소프트웨어는 마이크로소프트사의 오피스 2000의 엑셀을 사용하였다.

자료의 처리 순서는 다음과 같다.

- ① 평가결과의 입력: 평가결과를 엑셀에 기록한다. 맞으면 '1'로, 틀리면 '0'으로 입력한다.
- ② 지식상태의 선별: 지식공간론의 적용에서 가장 중요한 것이 지식상태의 선별이다. 만일 불성실하게 평가에 임한 학생의 결과는 타 학생의 결과 분석에 큰 영향을 미친다. 그러므로 앞에서 언급한 두 개의 전제조건을 만족하도록 하는 답안지만으로 자료를 처리 하여야 한다. 본 예제에서는 모든 학생이 성실하게 평가에 임하여 모든 답안이 우리의 요구조건을 만족하는 것으로 가정한다.
- ③ 위계분석: 임의의 두 문항간의 위계관계를 찾는다. 이 때 사용하는 위계의 판정방법은 [정리 2.5]의 사실이다.
- ④ 핫세 정보: 임의의 두 문항 간에 위계관계를 모두 알고 있더라도 위계도를 작성하는 데에는 아직 불편한 요소가 많다. 예를 들어, 문항 a, b, c 에 대해서

ab, ba, ac 가 성립한다고 하자. 이 때, 이러한 순서를 나타내기 위해서는 관계 ab, bc 만으로 충분하며, 오히려 관계 ac 는 위계관계를 도식화 하는 데에 방해가 된다. 그러므로 모든 문항의 순서관계에서 추이적 관계로 생성되는 관계를 제외하여 컴퓨터의 자료처리를 단순화 시킨다.

⑤ 위계도 작성: 앞 단계에서 얻은 핫세 정보를 평면에도식화 한다. 이 도식을 핫세 다이어그램(Hasse diagram)이라고 부른다.

1) 평가결과의 입력

학생들의 평가결과를 워크시트에 기록한다. 다음 쪽의 <표 1>에서 세로는 학생들의 일련번호이고 가로는 문항 번호이다. 맞고, 틀림을 각각 1 과 0으로 표시한 것은 자료의 처리과정에 수치연산의 편리함을 이용하기 위함이다.

2) 지식상태의 선별

지식상태는 위계도의 형태에 가장 큰 영향을 주는 요소이다. 그러므로 어떤 학생의 답안을 지식상태로 인정할 것인가의 문제는 신중해야 한다. 이 때, 고려해야 할 기준은 앞에서 가정한 두 가지의 전제 조건(실수로 틀리거나 우연히 맞힌 문항이 없다)을 만족하느냐의 여부이다. 본 예시에서는 모든 학생이 성실하게 평가에 임했다고 가정하고 위계도 작성 방법을 설명하도록 한다. 그러므로 평가에 참여한 37명 모두의 답안을 지식상태로 보았으며, 이들 답안에는 동일한 것이 있으므로 동일한 답안을 제외하고 지식상태를 표시한 것이 81쪽의 <표 2>이다. 같은 답안에 대해서는 일련번호가 가장 빠른 학생의 답안만 지식상태로 하였다. 예를 들어, 1번 학생과 9번 학생은 같은 답안을 작성하였다. 즉 이들의 지식 상태는 동일하므로 1번 학생 것만 채택하였다. 마찬가지로 10번, 20번, 24번, 27번, 31번, 33번, 그리고 36번 학생이 모두 같으므로 10번 학생 것만 지식상태로 선택하였다. 따라서 최종적으로 얻은 지식상태의 수는 30개이다.

<표 1> 평가결과

문항수	20																				
학생수	37																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2		1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
4		1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
5		0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6		0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
8		1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
9		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
10		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
12		1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
13		1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
15		0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
16		1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
17		1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
18		1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
19		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
20		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21		1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
22		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
23		0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
24		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25		1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
26		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
27		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
29		1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
31		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
33		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34		1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
35		1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
36		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37		1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1

3) 위계분석

앞에서 구한 지식상태들을 이용해서 문항간의 위계를 구하는 과정이다. 문항 a, b 에 대해서, 순서관계 $a \leq b$ 라 표현할 때는 다음과 같은 경우이고, 그리고 그 때에 한한다.

“문항 b 를 포함하는 지식상태 모두는 문항 a 를 포함한다.”

만일 $a \leq b$ 와 $b \leq a$ 가 동시에 성립할 경우 두 문항 a, b 를 같은 문항으로 취급하여 한 문항을 제외시킨다. 사실 이 경우 이들이 우리에게 주는 정보는 완전히 똑같다. 이들을 제외시키지 않으면 [정리 2.6]에 의해서 일반적으로 문항들 간에 순서관계가 성립하지 않는다. 그러나 본 예제에서는 지식구조가 구별적이다, 그러므로 문항들 간에 순서관계가 성립한다.

<표 2> 지식상태

지식상태 수		30																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
12	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
13	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
15	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
16	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
21	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
22	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
23	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
25	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
29	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
34	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
35	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
37	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

다음 쪽의 <표 3>의 의미를 설명하면, 행번호(세로로 배열된 번호)와 열번호(가로로 배열된 번호)는 모두 문항번호를 나타낸다. 행과 열이 만나는 곳에 '1' 또는 '0'으로 채워져 있으며, 1의 의미는 "(열번호의 문항) < (행번호의 문항)"이다. 예를 들어, <표 3>에서 5행과 17열이 만나는 곳이 1이다. 그러므로 17<5의 관계가 성립한다. 즉, 5번을 맞힌 학생은 모두 17번을 맞혔다는 것을 의미한다. 반면에 0의 의미는 이러한 위계관계가 없음을 의미한다. 그러나 반대의 위계관계가 성립할 수 있다. 예를 들어, 15행 9열의 수는 0이다. 그러나 9행 15열의 수는 1이다. 따라서 9번을 맞힌 학생은 15번을 맞혔다. 하지만 15번을 맞힌 학생에 대해서는 우리는 어떠한 단언

도 할 수 없다.

순서관계란 추이적 관계를 만족한다. <표 3>에서 보면, 18<17가 성립하고 한편 17<5가 성립하므로 순서관계 18<5가 성립하여야 한다. 그러나 <표 3>에서는 5번 문항과 18번 문항에 대해서는 순서관계가 없음을 보여준다. 이러한 문제가 발생하는 원인은 본 평가에 참여한 학생의 수가 충분하지 않기 때문이다. 평가에 참여하는 학생의 수가 충분하다면 추이적 관계는 만족한다고 볼 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위해서 우리는 추이적 관계를 모두 만족하는 것으로 가정하고 위계관계를 찾도록 한다.

<표 3> 문항의 위계

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

4) **맞세 정보 구하기**

앞 단계에서 얻은 순서관계를 이용해서 위계도를 그릴 경우 매우 불편하다. 그것은 추이적으로 얻을 수 있는 순서관계도 포함되어 있기 때문이다. 예를 들어, 문항 a, b, c 에 대해서 $a \leq b, b \leq c$ 가 성립하면 순서관계는 추이적이므로 $a \leq c$ 가 얻어진다. 따라서 평가문항의 위계에는 추이적 관계가 나타나는 것은 당연한 것이다. 그러나 추이적으로 얻어지는 관계는 순서관계를 도식화하는 과정에 오히려 불편하다. 즉, a, b, c 에 대해서는 $a \leq b, b \leq c$ 만 있으면 충분하며, 관계 $a \leq c$ 는 오히려 혼란을 제공할 뿐이다. 그러므로 서로 이웃하는 문항의 순서관계만 알면 된다. 앞에서 얻은 순서관계에서 그림을 그리기 위한 필요한 최소의 정보를 얻도록 하자. 다음 쪽의 <표 4>는 <표 3>에서 추이적관계로 얻어지는 순서관계를 제외한 나머지 순서관계를 표현한 것이다. 이러한 정보만으로 우리는 순서관계를 도식화할 수 있다.

5) **위계도**

맞세 정보를 이용하여 [그림 3]과 같이 문항의 위계를

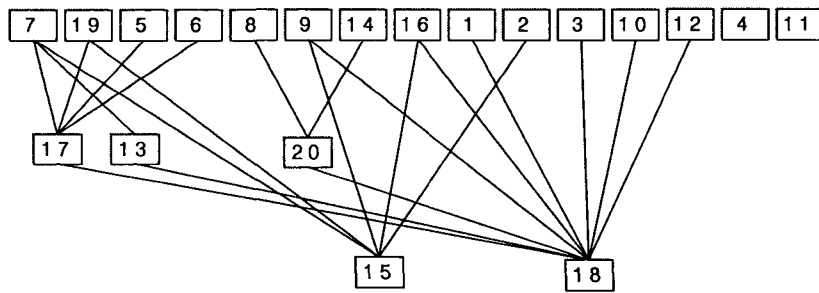
도식화할 수 있다. 아래 그림은 본 평가에 참여한 학생들이 맞고 틀린 것을 기반으로 하여 평가문항들 상의 위계를 표현한 것이다. 학생들의 지식상태를 분석하고 맞세 정보를 근거로 하여 학생들의 정보를 토대로 작성된 위계도이다.

6) **개개인의 지도자료 생성**

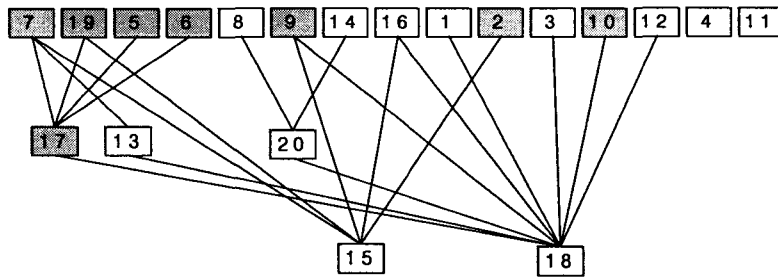
다음 쪽의 [그림 3]의 위계도에 학생 각자에 대한 지식상태를 나타내 보자. 그러면 그 학생의 지식상태를 위계관계의 관점에서 관찰할 수 있다. 예를 들어, 다음 쪽의 [그림 4]는 12번 학생의 지식상태를 나타낸 것이다. 단, 내부가 회색인 사각형은 틀린 문항이고, 흰색은 맞힌 문항을 나타낸다. 이 때, 이 학생은 우선 17번 문항의 해결을 위해 학습하는 것이 좋다. 즉 18번 문제와 관련된 것을 충분히 학습해야 하겠다. 17번을 잘 이해하고 풀이한 후에 5, 6, 7, 19번의 문제를 해결하기 위한 학습이 진행되어야 할 것이다. 이와 같이 지식의 위계도에 학생 각자의 지식상태를 나타내는 것은 학생의 학업진단과 학습설계에 편리함을 제공한다.

<표 4> 학생 정보

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0



[그림 3] 평가문항의 위계도



[그림 4] 12번 학생의 지식 위계도

4. 결론 및 제언

대부분의 학생지도 자료는 교사의 이해를 위한 자료로 만들어진다. 그러나 학생지도가 성공하려면 학생과 교사의 신뢰감이 가장 필요하고, 그러기 위해서는 상호가 공감하면서도 이해하기 쉬운 자료의 준비가 필요하다. 다시 말해, 교사만 이해 가능한 분석 결과로 학생에게 학습과정을 설명하는 것보다 학생도 쉽게 납득이 가는 자료를 제시하는 것이 학습 의욕을 북돋우는데 좋을 것이다. 그러므로 위계도를 시각적으로 제작하고, 학생의 지식상태를 그 위계도에 표시하는 것은 학생과 교사 모두가 공동의 목적을 향해서 매진할 수 있는 좋은 활력파 가능성을 시사한다고 볼 수 있다. 개개인에 관한 올바른 평가는 개개인에 알맞은 학습을 계획할 수 있는 환경을 제공해준다. 특히, 단편적인 수학적 지식이 아니라 서로의 개념과 지식의 연결과 문제풀이의 효율성을(NCTM, 2000; Hiebert & Carpenter, 1986) 위해서도 위계도를 이용한 학습자 개개인의 평가는 우리에게 시사하는 바가 크다고 하겠다.

위계도를 그리기 위해서 사용한 방법은 매우 과학적이면서도 체계적이다. 문제는 의미 있는 답안을 어떻게 선별하느냐하는데 있다. 점수가 낮다고 의미 없고 점수가 높다고 하여 의미 있는 답안이라고 할 수는 없다. 다만 본 논문에서 의미 있는 답안이라는 것은 앞에서 가정한 것처럼 (1) 모르는 문제를 우연히 맞히는 경우는 없다와 (2) 맞힐 수 있는 문제를 실수로 틀리는 경우는 없다라고 가정하여 이에 부합하는 답안만을 분석자료로 택하였다. 본 논문의 관점은 학생의 점수를 중심으로 한 평가결과에 대한 분석보다는 학생들의 주어진 문제에 대한 지식상태와 구조를 분석하여 학습의 효과를 기대하고 이해의 증진을 목표로 한다(정인철, 2003). 맨 처음의 과정인 어떤 학생의 답안을 지식상태로 인정하느냐의 여부가 가장 애매하지만, 그 밖의 과정은 일의적이다. 다시 말하면 수학적 이론을 기반으로 한 테크놀로지의 도입은 체계적이고 과학적인 분석을 가능하도록 해주어 주관적인 요소를 가미한 객관화의 의미있는 결합이라 할 수 있다. 그러므로 이렇게 만들어진 위계도는 제7차 교육과정은 물론 21세기의 교육방향과 함께하는 교육 목표의 성

취를 위한 진보적인 한 방법이라 할 수 있다. 특히 본 연구에서는 학생들의 실제 경험을 반영한 것이어서 학생들에게는 보다 적절한 방향을 제시해 줄 수 있을 것으로 기대한다.

평가 결과를 학생지도에 직접 반영하는 문제에서 가장 힘든 것이 학생수가 너무 많은 것이다. 학생 각자에 대하여 평가 결과를 분석하는 것은 실제로 많은 시간을 필요로 한다. 그러나 본 과정에서 제시한 방법은 일의적인 것으로 컴퓨터로 처리가 가능하다. 그러므로 학생수가 많더라도 학생 각자에 대한 평가 결과를 얻을 수 있다. 학생들의 개인차가 비교적 심한 수학교육에 본 방법을 적용하는 것은 수학교육의 효율을 증대시키는 것에 도움을 줄 것이다. 더 나아가 개별화 학습과정을 중요시하는 제7차 교육과정의 이행에도 좋은 자료를 제공하리라 믿는다.

참고 문헌

- 공주대학교 과학교육연구소(2002). 지식공간론 입문, 대전: 도서출판 보성.
- 교육인적자원부(1998). 제7차 초·중등학교 교육과정의 개요, 교육인적자원부
- 홈페이지(<http://www.moe.go.kr>)에서 제공.
- 김태성(1995). 21세기를 지향한 수학교육의 방향 탐색, 충북대학교 과학교육연구논총, 11, 21-27.
- 박종선(1999). 개별학습을 위한 웹 기반의 적응적 코스웨어의 설계 및 구현. 한국컴퓨터교육학회논문지, 2(4), 111-117.
- 박한식(2001). 수학교육의 회고와 제7차 교육과정 및 교직수학. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(1), 한국수학교육학회, 126-137.
- 신현용(2001). 우리 나라 수학교육과 ICME. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 11, 한국수학교육학회, 471-481.
- 정인철(2003). 수학교육에서 '이해'의 의미와 구조에 대한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(1), 11-18.
- 홍석강(1995). 중학교 수학교과 형성평가에서 학습능력

- 항상에 효과적인 수업지도안 및 정의적 고찰에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 34(2), 한국수학교육학회, 361-369.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Jean-Paul Doignon, J., & Falmagne, J. (1999). *Knowledge Spaces*. Berlin: Heidelberg. Germany: Springer-Verlag.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Diagramming for Individualized Learning Process Based on Assessment in Mathematics Education

Du-Won Byun, Inchul Jung,

Institute of Science Education, Kongju National University, 182 Shinkwan-dong Kongju,
Chungnam-do, Korea 314-701

E-mail: dwbyun@kongju.ac.kr, ijung@kongju.ac.kr

Dal-Won Park, Young Soon Ro, Seung Dong Kim

Department of Mathematics Education, Kongju National University, 182 Shinkwan-dong Kongju,
Chungnam-do, Korea 314-701

E-mail: dwpark@kongju.ac.kr, ysro@kongju.ac.kr, sdkim@kongju.ac.kr

Comparing to the other subject, hierarchy among mathematical contents is strong from the perspective of knowledge order as grades go up. That is, the knowledge that students already have learned, are learning and will learn are closed related from grade to grade. We expect students to be proactive and creative in studying mathematics, which is the goal of 21st century, analyzing their knowledge structure based on the hierarchy of knowledge through assessment. Especially, using computer system, we provide students with substantial feedback for the assessment as well as objective validity is increased along with speedy and exact process in a bid to help students' mathematical understanding grow. This paper seeks to analyze the assessment data by applying knowledge spaces to computer system and develops efficient methods based on the analyzed results, to diagram each student's knowledge structure.

* ZDM classification : D30

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C40

* Key Word : Assessment, Mathematical connection, Individualized learning, Knowledge space, Mathematical understanding