KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 61-68

방정식의 해법에 관한 소고

전주공업고등학교 **이대현**

Abstract

This paper aims at investigating the algebraic solution of cubic and quartic equation and eliciting the didactical meanings of them. First, I examine the event which relates to the equation in the history of mathematics and investigate the algebraic solution of cubic and quartic equation. And then I elicit the didactical suggestions which are required of teachers and students when they investigate the algebraic solution of cubic and quartic equation. In general, the investigation of these solutions is the valuable task which requires the algebraic intuition and technique for students and certificates expert knowledge for teachers.

0. 서론

방정식에 관련된 여러 가지 성질을 다루는 대수의 역사는 고대 바빌로니아의 산술에서 시작되었다. 특히, 바빌로니아 인들은 이차방정식과 특수한 삼차방정식을 해결하였다고 한다 [4, 6]. 바빌로니아에서 시작된, 여러 가지 방정식을 해결하기 위한 인간의 도전은 수학의 역사를 통해 오랜 시간에 걸쳐 꾸준히 있어 왔고, 19세기에 아벨(Abel, N. H. 1802-1829)에 의해 '5차 이상의 방정식에 대한 대수적 해법이 존재하지 않는다'고 증명이 될 때까지 그 도전은 계속되었다.

오랜 수학의 역사에서 밝혀진 방정식의 해법에 대해, 현재의 학교 수학은 일차방정식과 이차방정식의 일반적인 해법인 '근의 공식'만을 다루며, 삼차와 사차방정식은 인수분해가 되는 경우에 한해서만 지도하고 있다. 그렇지만, 삼차와 사차방정식의 대수적 해법이 16세기에 이미 밝혀졌으며, 대수적인 직관과 수학적인 기교가 요구되는 그 방법은 수학적으로 뛰어난 능력을 지닌 학생들에게 도전적인 과제가 될 수 있다.

또한, 수학 교사에게도 삼차와 사차방정식에 대한 대수적 해법의 탐구는 교사의 전문성 신장의 면에서 중요한 탐구 과제이다. 이에 본 연구에서는 삼차와 사차방정식의 대수적 해

법과 이와 관련된 교수학적 시사점의 도출을 주목적으로 한다. 이를 위해 먼저, 수학의 역사에서 방정식과 관련된 사건을 간략히 살펴본다. 그리고, 삼차와 사차방정식의 대수적인 해법을 고찰하고, 이를 탐구하는 과정에서 요구되는 몇 가지 교수학적 시사점을 도출할 것이다.

1. 방정식의 역사의 개관

수학은 크게 산술, 대수, 기하로 발전해 왔으며, 대수는 수학의 발생과 함께 시작되었다. 현대 수학에서 대수에 대한 정의는 어느 특정 영역에 한정하기도 어려우며, 함수에 대한 논의조차도 대수의 영역 안에서 조명될 정도로 현대 수학의 특징은 수학의 대수화, 대수적 방법에 의한 수학의 연구로 귀결되고 있다.

대수의 영어식 표시인 *algebra*의 기원은 아라비아 수학자 알콰리즈미(Al-khwarizmi, 780?-850?)의 책인 '*al-jaba wa al-muqabala*'에서 유래되었는데, 이는 '방정식을 포함한 계산 이론'을 의미하였다. 이후, *algebra*를 중국에서 한문으로 번역하는 과정에서 代數學이란 용어가 선택되었는데, 이는 '종래의 산술을 대신하는 새로운 산술'이란 뜻으로 본래의 의미와는 다르게 이용하고 있는 것이다[3].

대수라는 용어의 기원에서 알 수 있듯이, 대수에서 주된 연구 대상은 '방정식 이론'이라고 할 수 있다. 인간이 접하는 수많은 일상의 문제나 수학의 문제를 해결할 수 있는 보편적인 방법을 찾으려는 노력으로, 데카르트(Descartes)는 다음과 같은 사고의 패턴을 제시하고 있다. ① 어떤 문제든 수학 문제로 환원하여라. ② 어떤 수학 문제든 대수 문제로 환원하여라. ③ 어떤 대수 문제든 한 방정식의 문제로 환원하여라[3].

이러한 패턴의 핵심은 제시된 문제를 방정식으로 바꾸어 대수적인 문제로 번역하는 것으로 현대적 발견술의 골격을 이루고 있으며, 수학의 역사에서 대수적 사고의 중요성을 제시하고 있는 것이다. 마찬가지로, 학교수학에서도 대수적 방법과 대수적 사고를 중시하며, 중등학교 학생들이 문장제 등으로 제시되는 문제를 방정식으로 바꾸어 해결할 때에도 대수적 사고 패턴을 따르고 있는 것이다.

이와 같이, 수학의 역사와 학교 수학에서 그 중요성을 점유해 오고 있는 대수의 기원은 바빌로니아 수학에서 시작되었다. 기원전 2000년경까지 바빌로니아 인들의 산술은 대수로 발전하였는데, 당시에 바빌로니아 인들은 이차방정식을 풀었을 뿐만 아니라, 삼차와 사차방정식까지 다루었고, 표를 만들어 $x^3+x^2=b$와 같은 특정한 방정식을 해결하였다고 한다.

현재 알려져 있는 세계 최고의 수학서는 기원전 1650년경의 아메스가 쓴 파피루스를 들 수 있는데, 여기에는 1개의 미지량을 갖는 일차방정식으로 귀착되는 11개의 문제를 취급하고 있다. 파피루스에 제시된 신관문자로 쓰여진 일차방정식의 예로 '퇴(堆), 그 $\frac{2}{3}$, 그 $\frac{1}{2}$, 그 $\frac{1}{7}$, 그 전체로서 37이 된다'를 들 수 있다. 이것을 현대적인 표현으로 바꾸면, $\frac{2}{3}x+$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$이 되는데, 분수에 승법과 가법을 써서 해가 발견되었다[4].

한편, 그리스인들은 간단한 방정식을 푸는데 기하학적 대수에서 비례에 의한 방법과 면적을 이용한 방법을 사용하였다. 그리고 알렉산드리아의 마지막 수학자로 디오판투스(Diophantus)는 대수의 발전에서 큰 영향을 끼쳤는데, 그가 서기 330년경에 84세의 나이로 사망했다는 것을 다음 묘비 문에서 알 수 있다.

'디오판투스는 그의 생애의 $\frac{1}{6}$을 소년, $\frac{1}{12}$을 청년, $\frac{1}{7}$을 독신자로서 지냈다. 그는 결혼한 지 5년 만에 아이를 얻었다. 이 아들은 아버지보다 4년 전에 아버지 나이의 반을 살고 이 세상을 떠났다.'

이 묘비 문은 인간의 삶을 선형적으로 표현한 일차방정식의 예이다. 디오판투스의 나이를 x로 놓으면, $x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$와 같은 일차방정식을 얻게 되어 쉽게 84를 구할 수 있다. 그러나, 이 문제에 대한 주의 깊은 통찰은 좀 더 간단한 방법으로 해를 발견하도록 할 수 있다. 즉, 묘비 문에 제시된 분수들은 디오판투스의 나이의 일정 부분들이므로, 그의 나이는 이들 분모의 최소공배수일 가능성이 높다. 참으로, 분모인 6, 12, 7의 공배수가 0과 100사이에 별로 없으며, 최소공배수를 구해보는 것이 가치가 있다. 정말, 0과 100사이의 공배수는 하나밖에 없으며, 그것이 곧 84이다. 확인해 보면 84가 유일한 답임을 알 수 있다[5].

또한, 디오판투스는 13권으로 이루어진 '산학'을 저술하였는데, 1권에서는 정방정식만을 기술하였고, 2권 이하는 주로 부정방정식으로 엮었다. 그러나, 부정방정식의 경우에는 일반적인 방법을 이끌어 내지 못하였는데, 이것은 근세에 이르러 오일러, 라그랑주, 가우스 등에 의해 보충되었다. 디오판투스는 기하학 위주였던 그리스 수학을 대수로 변화시키는데 공헌하였다. 이 전통을 이어 받아 이슬람 사람들은 자신들의 수학을 발전시켰고, 급기야는 대수학을 서구에 전해 주는 중요한 역할을 하게 되었다.

디오판투스를 뛰어 넘는 커다란 자취를 남긴 것은 인도인으로, 그들은 이차방정식의 두 근을 인식하였다. 그러나, 그들은 음근을 발견하였지만, 실제로 받아들이지는 않았다는 한계를 가지고 있다[4, 6].

아라비아 사람인 알콰리즈미는 그의 저서 '복원과 축소의 과학'에서 '방정식을 포함한 계산 이론'의 의미로 대수라는 말을 사용한 최초의 책을 저술하였다[3, 4]. 이 책은 초등 계산법과 일차방정식과 이차방정식의 해법을 설명하고 있는데, 이차방정식의 해법에 산수적인 방법을 부여했을 뿐만이 아니라, 기하학적 증명도 제시하였다. 그러나, 그의 대수는 언어적 대수로 일관했다는 한계를 갖고 있었다[3, 4]. 이후 알콰리즈미에 의한 이차방정식의 해법은 19세기의 수학자인 실베스터에 의해 오늘날 우리가 학교 수학에서 배우는 근의 공식으로 공식화되었다.

한편, 방정식과 관련된 수학의 역사는 이차방정식을 자유롭게 해결할 수 있게 되면서 더

복잡한 식에 대한 연구로 이어졌다. 특히, 삼차와 사차방정식의 해법에 대한 논쟁은 16세기 대수의 역사에 큰 획을 긋는 사건으로 기억되어진다. 오늘날 고등학교 수학에서는 단지 인수분해에 의하여 해결 가능한 삼차와 사차방정식의 풀이만을 다루고 있다. 그러나, 이들 방정식에 대한 대수적인 해법이 가능하며, 이것은 16세기에 밝혀졌다.

이후에, 그 이상의 고차방정식을 해결하려는 인간의 노력은 특수한 형태의 고차방정식에 대하여 해결 가능했지만, 모든 계수를 문자로 했을 경우에는 가공할 상태에 직면하게 되었다. 이에, 오차 방정식과 그 이상의 대수적 해법은 불가능하지 않을까라는 의구심이 제시하게 되었는바, 1826년에 노르웨이의 수학자 아벨에 의해 '일반적으로 오차방정식과 그 이상의 고차방정식은 대수적으로 풀 수 없다'는 엄밀한 증명이 이루어졌다[4, 6].

2. 고차 방정식의 근의 공식

16세기에 대수학의 역사에서 큰 사건의 하나는 삼차방정식의 대수적 해법의 발견이었다. 삼차방정식의 대수적인 해법이 발견되기 전에도 이를 해결하기 위한 많은 도전이 있었으며, 어느 정도는 성공을 거두었다. 예를 들면, 볼로냐 대학의 페로는 이차항이 없는 삼차방정식 $x^3+ax=b$ 꼴의 해법을 성공적으로 이끌었다. 한편, 이 시기에는 많은 학술적 경기가 성행하였는데, 논쟁에서 승리하기 위해서는 자기가 발견한 사실을 오랫동안 비밀로 유지해야만 했다. 이 비밀주의의 습관은 발견의 우선권 문제를 종종 야기했는데, 삼차방정식의 해법을 둘러싸고 카르다노(Cardano)와 타르탈리아(Tartaglia)의 논쟁은 역사적으로도 유명하다.

타르탈리아는 1541년에 삼차방정식의 일반 해법을 발견하였다. 그런데, 타르탈리아는 카르다노에게 해법을 절대 발설하지 않겠다는 맹세를 받고 해법을 알려 주었다. 그러나, 카르다노는 이를 어기고 1545년에 수학서인 '위대한 술법'이라는 책을 출간하면서 이 해법을 발표하였다. 이로 인해 타르탈리아는 역사에서 망각되어가고, 삼차방정식의 해법의 발견은 카르다노의 이름으로 알려지게 되었다[1].

이러한 역사를 가진 삼차방정식의 뒤를 이어 사차방정식의 해법이 카르다노의 제자인 페라리(Ferrari)에 의해 발견되었다. 이후, 오차 또는 그 이상의 고차방정식의 해법을 발견하려는 노력은 결국 아벨에 의해 일반적으로 오차방정식과 그 이상의 고차방정식은 대수적으로 풀 수 없다는 사실로 입증되었다[6].

한편, 중등학교에서 실 계수인 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$은 이 방정식의 좌변이 인수분해 되는 경우에 한해서만 다루고 있다. 여기서, 카르다노가 제시한 삼차방정식의 일반적인 해법을 생각해 보자.

다음과 같은 실 계수인 삼차방정식을 생각하자.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

여기서 x^3의 계수 a로 양변을 나누어 삼차항의 계수를 1로 보아도 일반성을 잃지 않는다. 즉, 실 계수의 삼차방정식을 다음과 같이 놓자.

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad ②$$

그리고 $x=y+k$(k는 상수)를 이용하여 x를 y로 변환하면, $(y+k)^3+a(y+k)^2+b(y+k)+c=0$이다. 이것을 y에 대하여 정리하면, 다음과 같다.

$$y^3+(3k+a)y^2+(3k^2+2ak+b)y+k^3+ak^2+bk+c=0$$

여기서 y^2의 계수가 0이 되게 상수 k를 정한다. 즉 $3k+a=0$이므로 $k=-\frac{a}{3}$이다. 그러면 위의 식은 $y^3+(b-\frac{a^2}{3})y+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$이다. 따라서 실 계수의 삼차방정식을 다음과 같이 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

$$y^3+py+q=0 \qquad ③$$

이 새로운 방정식에서 $y=u+v$로 놓으면 $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$으로 변형된다. 여기서 u와 v에 관한 다음 연립방정식의 해에서 u와 v의 합을 구하면 ③의 해를 구할 수 있다.

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\frac{p}{3} \end{cases} \qquad ④$$

연립방정식 ④의 해의 세제곱 u^3과 v^3은 t에 관한 이차방정식 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$의 해이다. 이 이차방정식의 해는 근의 공식에 의해 $-\frac{q}{2}\pm\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$이므로, $u^3=t_1$과 $v^3=t_2$로 놓으면, $t_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$이고 $t_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$이다. 그런데 u와 v 사이에는 $uv=-\frac{p}{3}$인 관계가 있으므로, u의 값만 알면 그것에서 v의 값을 구할 수 있다. 따라서 $u^3=t_1$만을 풀어도 충분하다. 이 방정식의 해는 $\sqrt[3]{t_1}$, $\sqrt[3]{t_1}w$, $\sqrt[3]{t_1}w^2$ ($w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$)이다. 그래서 삼차방정식 ③의 해는 $\sqrt[3]{t_1}-\frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}$, $\sqrt[3]{t_1}w-\frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}w^2$, $\sqrt[3]{t_1}w^2-\frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}w$이다. 여기서 $-\frac{p}{3\sqrt[3]{t_1}}$가 $v^3=t_2$의 해, 즉 t_2의 세제곱근 중에서 $\sqrt[3]{t_1}$과의 곱이 $-\frac{p}{3}$가 되는 것임을 주의하면, 처음에 주어진 삼차방정식 ①의 해는 다음과 같이 된다.

$$-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}, \quad -\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{t_1}w+\sqrt[3]{t_2}w^2, \quad -\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{t_1}w^2+\sqrt[3]{t_2}w$$

(예제) $x^3-3x^2+x+1=0$의 해를 구하여라.

(풀이) $x^3-3x^2+x+1=0$에서 $a=1$, $b=-3$, $c=1$, $d=1$이므로, $x=y-\frac{b}{3a}$에서 $x=y+1$이다. 즉, $y^3-2y=0$이고 $p=-2$, $q=0$이다. 여기서 $t_1=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}$, $t_2=-\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}$이므로, 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$-\frac{-3}{3}+\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}=1,$$

$$-\frac{-3}{3}+\sqrt[3]{t_1}\,w+\sqrt[3]{t_2}\,w^2=1-\sqrt{2},\qquad -\frac{-3}{3}+\sqrt[3]{t_1}\,w^2+\sqrt[3]{t_2}\,w=1+\sqrt{2}$$

다음으로, 페라리에 의해서 완성된 사차방정식의 해법은 아래와 같다. 다음 실 계수의 사차방정식을 생각하자.

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\quad(a\neq 0)\qquad ①$$

미지수를 $x=y-\frac{b}{4a}$로 변환하면, 다음과 같이 새로운 미지수 y에 대해 삼차항이 없는 방정식으로 변형되어진다.

$$y^4+py^2+qy+r=0\qquad ②$$

여기서 $p=\frac{8ac-3b^2}{8a^2}$, $q=\frac{16a^2d-8abc+2b^3}{16a^3}$, $r=\frac{256a^3e-64a^2bd+16ab^2c-3b^4}{256a^4}$이다.

사차방정식 ②를 $y^4=-py^2-qy-r$로 변형하여 양변에 $ty^2+\frac{t^2}{4}$을 더하면, $\left(y^2+\frac{t}{2}\right)^2=(t-p)y^2-qy+\left(\frac{t^2}{4}-r\right)$가 된다. 이 양변이 완전제곱식이 되기 위한 필요충분 조건 $(D=0)$은 $q^2-4(t-p)\left(\frac{t^2}{4}-r\right)=0$이다. 즉, 다음과 같다.

$$t^3-pt^2-4rt+(4pr-q^2)=0\qquad ③$$

삼차방정식 ③의 한 해를 t_0이라고 하면, 사차방정식 $y^4+py^2+qy+r=0$은 이것과 동치인 방정식 $\left(y^2+\frac{t_0}{2}\right)^2=\left(\sqrt{t_0-p}\,y-\frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}\right)^2$로 변형된다. 그래서 두 이차방정식 $y^2-\sqrt{t_0-p}\,y+\frac{t_0}{2}+\frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}=0$, $y^2+\sqrt{t_0-p}\,y+\frac{t_0}{2}-\frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}=0$과 동치가 되어 y가 구해지고, 따라서 방정식의 해가 구해진다.

$t_0=p$일 때는 t_0-p의 제곱근에서 q를 나눌 수 없다. 이때는 사차방정식 ②는 $y^4+py^2+r=0$이 되어 쉽게 해를 구할 수 있다.

이상과 같이, 삼차와 사차방정식의 해법의 발견 과정은 대수학적인 직관이 요구된다. 대수학적 직관은 이전의 디오판투스의 문제를 해결하는데 요구되는 문제 구조에 대한 통찰과 같이, 가정과 치환을 통해 성립될만한 식으로의 유도를 이끄는 발견술에 힘을 준다. 이에, 삼차와 사차방정식의 해법을 발견하도록 학생들을 이끌어 주는 것은 수학 교수-학습에서 도전적인 과제가 될 수 있다. 그러나, 오랜 기간에 걸쳐 완성된 수학을 학생 혼자서 이끌어 내기에는 어려운 일이다. 이때 '안내된 재발명의 원리'는 적절한 교수 원리이다. 프로이덴탈(Freudenthal)은 학생의 현실을 출발점으로 하여, 이미 발명된 수학을 학생 스스로 개선된 방법으로 재창조 해 나가도록 하는 안내된 재발명의 원리를 주장한다. 이러한 안내된 재 발명을 위하여, 교사는 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에, 어떤 방법을 개선한 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지를 추측하도록 학생들을 이끌어 주어야 한다[2]. 그리고, 교사는 안내된 재 발명을 통한 지도를 위하여 수학 내용에 대한 교과 내용적 지식을 겸비해야 함을 인식하고, 수학 지도 내용의 재 발명을 자극하는 상황을 창출해야 한다.

이런 면에서, 삼차와 사차방정식의 해법은 안내된 재발명의 원리에 따라 수학적 직관의 경험을 통해 발견될 수 있다. 수학적 직관은 증명 과정에서 절대적으로 필요하며, 옳은 정리를 제시하고 증명의 길을 이끌어 주기도 한다. 또한, 수학적 직관은 이전의 탐구자가 걸어간 길을 발견하도록 안내하는 역할을 한다. 따라서, 수학 교수-학습은 교사의 안내 하에 수학적 직관의 경험을 통해 재 발명 과정을 겪도록 해야 할 것이다. 이것은 학생들이 기성의 수학을 조건 없이 수용하는 것이 아니라, 그들의 수준에서 재창조 해 나가는 발전적인 경험을 제공할 것이다.

한편, 학교 수학의 내용은 개인적이거나 사회적인 모든 의식과 독립적이고 추상적인 영역에 존재하며, 공간과 시간을 초월해서 존재하는 형태로 제시되고 있다. 그러나, 방정식의 역사에 대한 개관을 통해 알 수 있듯이, 수학은 인간의 지식과는 별개로 존재하거나, 인간의 정신과 독립적으로 존재하지 않는 인간 노력의 결과이다. 수학사는 수학적 지식이 계속해서 성장하고 있다는 견해를 피력한다. 이에 다양한 영역에 대한 수학사의 역사적 개관을 통한 교수학적 변환은 학교 수학이 성장 과정에 있는 생명체이며, 학생들은 이를 발견하는 탐구자가 될 수 있다는 가능성을 제시할 것이다.

마지막으로, 중등학교에서 삼차와 사차방정식의 해법은 교사의 전문성 신장의 측면에서도 고려의 대상이 된다. 전문인으로서 수학 교사는 교과 내용적 지식과 교수학적 지식을 겸비하여야 한다. 또한, 이 두 가지 지식은 서로 연결되어 유기적인 관계를 형성하여야 한다. 그리고 교과 내용적 지식이 겸비되지 않는 한 교수학적 지식이란 큰 의미가 없다. 삼차와 사차방정식의 대수적인 해법과 관련된 내용은 중등학교 수학 교사가 갖추어야 할 교과 내용적 지식으로 적절하다. 왜냐하면, 이것은 이미 발견된 수학을 학생 스스로 개선된 방법으로 재창조해 나가는 안내된 재발명의 원리를 실현시켜야 할 의무를 수학 교사가 지니고 있기 때문이다.

3. 결론

이 글에서는 삼차와 사차방정식의 대수적인 해법과 이와 관련한 교수학적 시사점을 도출하였다. 현대 수학에서 수학의 대수화, 대수적 방법에 의한 문제해결은 중요한 특징이며, 학교 수학에서도 중요한 위치를 차지 해 오고 있다. 특히, 삼차와 사차방정식의 대수적 해법과 같은 주제는 수학적으로 뛰어난 학생에게 도전적인 과제가 될 수 있으며, 이를 위해 수학 교사는 이들 해법을 숙지하여 학생들을 이끌어 주어야 한다. 이것이 전문인으로서 수학 교사가 갖추어야 할 교과 내용적 지식이라고 할 수 있다.

특히, 수학 교사는 수학자가 걸어 온 길을 개선된 방법으로 따라 가도록 이끌어 주는 안내된 재발명의 원리에 의해 학생들을 이끌어, 학생 스스로 수학을 재 발명하도록 지도하여야 한다. 또한, 수학 교사는 수학의 발견에 중요한 역할을 하는 수학적 직관을 학생들이 경험하도록 안내하는 교수학적 노력이 요구된다.

한편으로, 수학사적 소재의 교수 활용 가능성에 대하여 고려해 보아야 할 것이다. 학교 수학에서 다루는 여러 주제들에 대한 역사적 개관과 흐름을 파악하고, 이를 교수학적 변환 과정을 통해 제시하는 것은 역사-발생적 원리에 의해 수학을 재 발명하는 위치에 학생을 놓게 하여 그 수준의 발견자, 탐구자로 이끄는 방안이 될 것이다.

참고 문헌

1. 김정희, **소설처럼 아름다운 수학 이야기**, 동아일보사, 2002.
2. 류희찬, "프로이덴탈의 수학화 이론과 현실적 수학교육," **청람수학교육** 10(2002), 1-19.
3. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
4. Cajori, F., *A History of Elementary Mathematics, with hints on method of teaching*, New York: Revised and enlarged edition, 1917. [정지호 역, **수학의 역사**, 서울: 창지사, 1990.]
5. Ervynck, G., "Mathematical Creativity," in Tall, D. ed., *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, 42-53.
6. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1953.