KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 53-60

정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명에 내재된 실수의 완비성 공리

서울대학교 대학원 수학교육과 도종훈

Abstract

In this paper, we analyse several number theoretical proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$ and reveal that these proofs are implied by The Completeness Axiom of the real number system.

0. 서론

$\sqrt{2}$는 인류가 발견한 최초의 무리수로서,1) 고등학교 1학년 수학 교과서에는 아리스토텔레스 증명으로 알려진 다음과 같은 증명이 제시되어 있다.

> $\sqrt{2}$를 유리수 즉, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p와 q는 서로소인 정수)이라고 가정하자. $2q^2=p^2$이므로 p^2은 짝수이고 p도 짝수이다. $p=2p_1$이라 하면 $2q^2=p^2=(2p_1)^2=4p_1^2$, 즉 $q^2=2p_1^2$이므로 q도 짝수이다. 이는 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

위 증명은 $\sqrt{2}$의 무리수성에 관한 정수론적 증명의 일종으로 귀류법 가정을 한 후 '두 정수의 서로소성'에 대한 모순을 이끌어 냄으로써 $\sqrt{2}$가 유리수가 될 수 없음을 보이고 있다. 그런데 $\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 논의, 즉 $\sqrt{2}$가 유리수인가 아닌가 하는 문제는 다름 아닌

1) 정오각형의 한 변과 대각선의 길이의 비인 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$이 처음으로 알려진 무리수일 가능성도 있다[2].

'수'에 관한 논의이며, '수'에 관한 논의는 그 논의가 적절하게 전개될 수 있는 '수 체계'의 본질을 이해하고 그 수 체계에서 논의될 때 올바른 논의가 가능하다. 수 체계의 관점에서 볼 때 $\sqrt{2}$는 무리수이므로, 위에 제시된 아르키메데스 증명을 포함한 $\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 논의들은 무리수를 포함하는 수 체계 즉, 실수의 관점에서 이해되어야 할 것이다. $\sqrt{2}$의 무리수성 논의는 정수의 관점에서는 그 논의가 완전할 수 없으며, 설령 논의가 가능하다고 하더라도 그 논의 속에는 정수 체계와는 다른 실수 체계의 원리가 내재되어 있어야 한다.

그렇다면 위에 제시된 증명의 어디에 어떻게 실수 체계의 어떤 원리가 내재되어 있는 것일까?

이 물음에 답하는 것이 본 논고의 목적이다. 이를 위해 연구자는 먼저 선행 연구([3],[4],[5],[6])를 통해 아르키메데스 증명 이외에 20세기 후반에 이르기까지 여러 학자들에 의해 고안된 $\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 정수론적 증명들에서 핵심적인 역할을 하는 정수론적 원리들을 분석하여 이들을 세 가지로 분류하고 이들 사이의 함의 관계를 분석하였다(1.1절). 그리고, 세 개의 정수론적 원리들 중 가장 핵심이 되는 원리가 실수의 완비성 공리로부터 유도될 수 있음을 증명하여 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명 속에 실수의 완비성 공리가 내재되어 있음을 확인하였다(1.2절).

본 논고는 학교수학에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나 있지 않은 수학적 원리를 분석한다는 측면에서 그 자체로서 의미 있을 뿐 아니라 전문성을 갖춘 수학 교사의 교과 지식이라는 측면에서 수학교육적인 의미를 지닐 수 있다. 수학적 개념이나 대상의 교수-학습에서 그것의 일상적 의미나 표상과 더불어 염두에 두어야 할 것들 중 하나는 그 개념이나 대상에 내재되어 있는 수학적 원리를 파악하여 이해하는 것이다. 물론 학교 수학에 등장하는 개념의 수학적 구조에 대한 이해는 종종 학생들의 학습수준을 뛰어 넘는 상위개념을 필요로 하는 경우가 많아 그 본질적인 의미를 충분히 이해하는 것이 어렵지만, 교사가 그 개념과 관련된 지식의 구조를 파악하고 가르침에 임하는 것은 필수적이다. 이러한 측면에서 볼 때, 본 논고는 교사들이 학교수학에 제시된 수학적 개념이나 대상에 내재된 수학적 원리의 중요성을 인식하고 그것을 탐색해 나가는 절차와 방법에 대한 하나의 본보기가 될 수 있으리라 생각된다.

1. 본론

앞서 언급한 바와 같이 무리수 $\sqrt{2}$는 실수의 관점에서 올바른 논의가 가능하며, 자연수나 정수 혹은 유리수 체계에서는 그 논의가 불완전하거나 가능하다고 하더라도 그 속에는 반드시 실수 체계의 원리가 내재되어 있어야 한다. 수 체계의 확장에서 실수 체계가 유리수 체계나 정수 체계와 본질적으로 구분되는 원리는 실수의 완비성 공리라고 할 수 있다. 그러

므로 $\sqrt{2}$의 무리수성 논의 속에는 직접적으로든 간접적으로든 실수의 완비성 공리가 내재되어 있어야 한다. 그러나 정수론적 방법에 의한 증명들은 말 그대로 정수론적인 이론과 방법에 의해 전개되고 있어 증명 과정의 어디에 어떻게 실수의 완비성 공리가 내재되어 있는지 명확하게 드러나 있지 않다.

1.1 정수론적 방법에 의한 증명들 속에 내재된 정수론적 원리 분석

각종 문헌을 통해 수집된 6개의 정수론적 방법에 의한 증명들을 분석한 결과 각 증명들 속에 내재된 중요한 정수론적 원리 몇 가지를 발견할 수 있었다(정수론적 방법에 의한 증명의 자세한 내용은 부록 참고). 이때 각 증명에서 핵심적인 역할을 하는 수학적 원리를 그로부터 모순이 유발되는 귀류법 가정으로 간주하였는데, 이는 $\sqrt{2}$의 무리수성에 관한 모든 증명이 귀류법 증명이고 귀류법 증명의 가장 중요한 단계는 귀류법 가정과 그로 인한 모순 발견의 단계라는 판단 때문이다.

증명 1과 증명 2에서는 두 정수(자연수)가 서로소라는 가정에 대한 모순을 통해 $\sqrt{2}$가 유리수가 될 수 없음을 보이고 있는데, 이로부터 '두 정수(자연수)의 서로소성'이 증명에서 핵심적인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 증명 3과 증명 4 및 증명 5에서는 어떤 성질을 만족하는 가장 작은 양의 정수가 존재한다는 가정에 대한 모순을 통해 $\sqrt{2}$의 무리수성을 보이고 있으며, 이로부터 '자연수 부분집합의 최소성의 원리'가 이들 세 증명의 핵심 원리임을 알 수 있다. 한편, 증명 6에서는 1보다 큰 임의의 자연수의 소인수분해가 유일하다는 가정에 대한 모순을 통해 $\sqrt{2}$의 무리수성을 보이고 있어, '소인수분해의 유일성'이 증명의 핵심 원리임을 알 수 있다.

이상의 분석 결과를 종합하여 정수론적 방법에 의한 증명들에 내재된 정수론적 원리들 즉, 두 정수(자연수)의 서로소성(원리 1), 자연수 부분집합의 최소성의 원리(원리 2), 그리고 소인수분해의 유일성(원리 3)을 다음과 같은 3가지 명제의 형태로 기술할 수 있다.

원리 1. 비가 같은 자연수 쌍들 중에는 서로소인 자연수 쌍이 존재한다.

원리 2. 공집합이 아닌 자연수 부분집합은 최소원을 갖는다.

원리 3. 1보다 큰 임의의 자연수의 소인수분해는 유일하다.

원리 3은 원리 2와 수학적 귀납법의 원리에 의해 유도될 수 있고[1], 수학적 귀납법의 원리는 원리 2에 의해 유도될 수 있다[7]. 그리고, 원리 2가 원리 1을 함의함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$A=\{q \mid p$와 q의 비는 일정, p와 q는 양의 정수$\} \neq \emptyset$이라고 하자. A는 자연수 집합의 부분집합이므로 원리 2에 의해 집합 A의 최소원 a가 존재한다. 이때 b를 $p:q=b:a$인 자연수라고 하고, a와 b는 서로소가 아니라고 가정하자. a와 b는 서로소가 아니므로 $a=na'$, $b=nb'$인 자연수 n, a', b'이 존재하게 된다. $a:b=a':b'$이므로 $a' \in A$이다. 그런데 $a'<a$이므로, 이는 a가 집합 A의 최소원이라는 가정에 모순이다. 그러므로 a와 b는 서로소이다. 즉, 비가 $p:q$와 같은 자연수 쌍들 중에는 서로소인 자연수 쌍 a와 b가 존재한다.

결국 원리 2가 원리 1과 원리 3을 함의하므로 원리 2를 세 가지 정수론적 원리들 중의 핵심 원리 즉, 정수론적 방법에 의한 증명들의 핵심 원리라고 할 수 있을 것이다.

1.2. 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명에 내재된 실수의 완비성 공리

이 절에서는 정수론적 방법에 의한 증명들의 전개에 핵심이 되는 원리 2와 실수 체계를 유리수나 정수 체계와 구별짓는 실수의 완비성 공리 사이의 관계를 분석한다. 먼저 원리 2와 실수의 완비성 공리에 대한 다음의 두 진술을 비교해 보자.

· 공집합이 아닌 아래로(위로) 유계인 실수 부분집합은 하한(상한)을 갖는다.(완비성 공리)

· 공집합이 아닌 자연수 부분집합은 최소원을 갖는다.(원리 2)

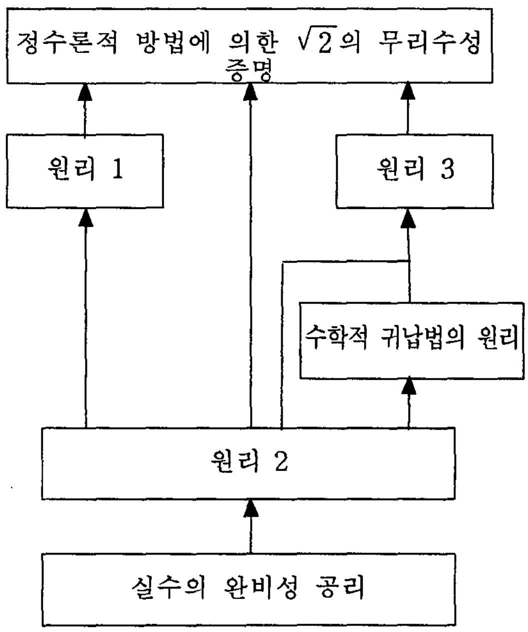
조금만 유심히 관찰해 보면, 두 원리가 매우 비슷하게 진술되어 있음을 알 수 있다. '자연수 부분집합'은 자연수 1에 의해 아래로 유계이므로 '아래로 유계인 실수 부분집합'의 특수한 한 예이며, 공집합이 아닌 자연수 부분집합의 '최소원'은 그 집합의 '하한'이다. 예를 들어 짝수인 자연수들의 집합의 최소원 2는 그 집합의 하한이다. 이들 두 사실로부터 원리 2가 실수의 완비성 공리의 특수한 경우임을 추측할 수 있다. 즉, 원리 2는 실수의 완비성 공리에 의해 함의된다고 볼 수 있으며, 이를 다음과 같이 증명할 수 있다.

$S(\neq\emptyset)\subseteq \mathrm{N}$인 집합 S가 최소원을 가짐을 보이자. S의 임의의 원소 s에 대하여 $s>0$이므로 집합 S는 아래로 유계이다. 완비성 공리에 의해 두 조건 (i) $s\in S \Rightarrow a\leq s$, (ii) 임의의 양의 실수 $\varepsilon>0$과 적당한 $s'\in S$에 대하여 $a\leq s'<a+\varepsilon$을 만족하는 집합 S의 하한 a가 존재한다. $a\in S$이면, a는 집합 S의 최소원이 되어 정리가 성립한다. $a\notin S$라고 가정하자. 그러면 조건 (i)에 의해 집합 S의 임의의 원소 s에 대하여 $a<s$이고, 조건 (ii)에 의해 $a\leq t<s$을 만족하는 $t\in S$가 존재한다. 여기서 $a=t$이면 정리가 성립한다. 만약 $a\neq t$이면 $a<t$이고, 따라서

$a \le t_1 \le t-1 < t$인 $t_1 \in S$이 존재한다. 마찬가지로 $a = t_1$이면 정리가 성립하지만, $a \neq t_1$이면 $a < t_1$이고 $a \le t_2 < t_1$인 $t_2(\le t-2) \in S$가 존재한다. 이 과정을 계속하여 $a = t_n \le t-n$을 만족하는 $t_n \in S(0 < n \le t-1)$이 존재하면 정리가 성립한다. 그러나 만약 $0 < n \le t-1$인 임의의 자연수 n에 대하여 $a \neq t_n$이고 $a < t_n \le t-n$ ($t_n \in S$)이면, $a \le t_t < t_{t-1} \le 1$인 $t_t \in S$가 존재하게 된다. 그러나 $t_t < 1$이므로, 이것은 S가 자연수 부분집합이라는 가정에 모순이다. 따라서 $a \in S$이고 집합 S의 최소원이 된다.

요약하면 정수론적 방법에 의한 증명들의 핵심이 되는 정수론적 원리는 원리 2이고 원리 2는 실수의 완비성 공리에 의해 함의되므로, 결국 실수의 완비성 공리가 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명들 속에 핵심 원리로 내재되어 있음을 알 수 있다.

이상의 논의들을 정리하여 도식화하면 다음과 같다.



<그림 1> 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명에 내재된 실수의 완비성 공리

2. 요약 및 제언

$\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 여러 증명들은 수학자들이 그들 자신 및 당대의 학문적 배경을 토대로 고안해 낸 것이므로 각 증명에 내재된 수학적 원리나 구조가 상이할 수 있다. 그러나 수 체계라는 하나의 관점에서 보면 이들 증명들은 모두 완비성 공리를 포함한 실수의 구조로부터 비롯된 것임을 이상의 논의를 통해 알 수 있다. 수 체계라는 하나의 관점으로부터 $\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 여러 증명들을 분석하고 그 속에 내재된 수학적 원리 즉, 정수론적 방법에 의한 증명들 속에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나 있지 않은 실수의 완비성 공리를 탐색한다는 측면에서 본 논고는 그 자체로서 의미를 지닐 수 있다. 또한 전문성을 갖춘 수학 교사의 교과 지식의 구조와 원리 분석 및 통찰의 필요성이라는 측면에서 수학교육에의 시사점을 발견할 수 있을 것이다.

이상의 논의에 덧붙여 $\sqrt{2}$의 무리수성 논의라는 측면에서 다음 두 가지를 제언한다.

$\sqrt{2}$의 무리수성 증명은 일종의 불가능성 증명으로서 간접 증명의 형태를 취하고 있다. 불가능성 증명은 사회과학이나 다른 자연과학과 구분되는 수학적 추론의 가장 두드러진 측면들 중 하나이다. 수학에서 어떤 것이 불가능하다는 것은 그 어떤 시대, 어떤 사람에 의해서도 그것이 불가능함을 의미한다. 수학에서 가능성이나 존재성에 대한 증명은 그것이 실제로 가능하거나 존재함을 구성을 통해서 보일 수 있지만 불가능성이나 비존재성에 대한 증명은 그 대상이 유한한 대상인 경우를 제외하고는 간접증명의 방법을 통하지 않고서는 불가능하다. $\sqrt{2}$의 무리수성 증명은 학생들이 학교 수학에서 접할 수 있는 간접 증명법에 의한 불가능성 증명의 전형적인 한 예가 될 수 있을 것이다.

한편, $\sqrt{2}$의 무리수성 논의는 정사각형의 한 변과 대각선의 관계에 대한 논의인 동시에 정사각형의 한 변과 넓이가 두 배인 정사각형의 한 변의 관계에 대한 논의로 볼 수 있다. 이들 두 관점 모두 $\sqrt{2}$의 무리수성 논의라는 측면에서는 구분되지 않지만,[2] 두 관점의 구분으로부터 간단한 유추와 일반화를 통해 더욱 풍부한 논의들이 전개될 수 있다. 예를 들어 전자의 관점으로부터 정오각형, 정육각형, …, 정 n각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이 관계에 대한 논의가 가능하고, 후자의 관점으로부터는 주어진 정사각형의 한 변과 넓이가 n배인 정사각형의 한 변, 주어진 정육면체의 한 변과 부피가 2배인 정육면체의 한 변, 주어진 정육면체의 한 변과 부피가 n배인 정육면체의 한 변 등에 대한 논의가 가능할 것이며, 나아가 n과 a의 범위 확장에 따른 $n^a \in \mathbb{R}$의 무리수성에 관한 논의 역시 가능할 것이다. 이러한 측면에서 수학에 대한 흥미와 재능을 가진 학생과 이들을 지도하는 교사는 $\sqrt{2}$의

2) $\sqrt{2}$의 무리수성 논의에서 이들 두 관점은 피타고라스 정리를 통해 통합된다.

무리수성에 관한 명제 및 증명들로부터 수학적 창조와 발견의 가장 초보적인 단계라고 할 수 있는 유추와 일반화를 통해 새로운 명제를 추측하고 정당화하는 탐구 수업을 설계할 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 김응태 · 박승안, **정수론**, 경문사, 1992.
2. Eves, H./허민 · 오혜영 역, **수학의 기초와 기본 개념**, 경문사, 2001.
3. Gauntt, R. & Rabson, G., "The irrationality of $\sqrt{2}$," *American Mathematical Monthly* 63(1956).
4. Gentile, E.R., "Another proof of the irrationality of $\sqrt{2}$", *The College Mathematics Journal* 22(2)(1991).
5. Halfar, E., "The irrationality of $\sqrt{2}$," *American Mathematical Monthly* 62(1955).
6. Laczkovich, M., *Conjecture and Proof*, Budapest, Hungary; TypoTEX, 1998.
7. Schroeder, M.R., *Number Theory in Science and Communication*, Springer Verlag, 1984.

부록 : 정수론적 방법에 의한 $\sqrt{2}$의 무리수성 증명

[증명 1] $\sqrt{2}$를 유리수, 즉 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p와 q는 서로소인 정수)이라고 가정하자. $2q^2=p^2$이므로 p^2은 짝수이고 p도 짝수이다. $p=2p_1$이라고 하면 $2q^2=p^2=(2p_1)^2=4p_1^2$ 즉, $q^2=2p_1^2$이므로 q도 짝수이다. 그러므로 p와 q 모두 짝수이다. 이것은 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[증명 2] $\sqrt{2}$를 유리수, 즉 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p와 q는 서로소인 정수)이라고 가정하자. $2q^2=p^2$이므로 $p^2+q^2=3p^2$이다. $3p^2$이 3의 배수이므로 p^2+q^2 역시 3의 배수이다. 따라서 p와 q는 모두 3의 배수이다. 그러나 이것은 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[증명 3] $\sqrt{2}$를 유리수라고 가정하자. 즉, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(p와 q는 양의 정수)이고 q를 그러한 양의 정수 중에서 가장 작은 양의 정수라고 하자. $1<\frac{p}{q}<2$이므로, $0<p-q<q$이다. $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}=\frac{2q-p}{p-q}$이다. $p-q$와 $2q-p$는 모두 양의 정수이고, $p-q<q$이다. 그러나 이것은 q의 최소성에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[증명 4] $\sqrt{2}$는 유리수, 즉 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(q와 p는 양의 정수)이고, q는 그러한 양의 정수 중에서 가장 작은 양의 정수라고 하자. $2q^2=p^2$이므로 p^2은 짝수이고 p도 짝수이다. $p=2p_1$이라고 하면, $2q^2=p^2=(2p_1)^2=4p_1^2$, 즉 $q^2=2p_1^2$이므로 q도 짝수이다. $q=2q_1$이라고 하면, $\frac{p}{q}=\frac{2p_1}{2q_1}=\frac{p_1}{q_1}$이고 $q_1<q$이다. 그러나 이것은 q의 최소성에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[증명 5] $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$(n과 m은 양의 정수)이라고 하자. $n>m$이므로, $n=m+p$를 만족하는 자연수 p가 존재한다. $2m^2=n^2=(m+p)^2=m^2+2pm+p^2$이므로, $m^2=2pm+p^2$이다. 따라서 $m>p$이다. 같은 방법으로 $m=p+a$, 즉 $n=2p+a$인 자연수 a가 존재하고, $2(p+a)^2=2m^2=n^2=(2p+a)^2$이 성립하므로 $a^2=2p^2$이다. 위 과정은 $n>m>a>p>\cdots$을 만족하면서 무한히 반복된다. 그러나 이는 자연수를 원소로 갖는 임의의 집합이 최소원을 가진다는 사실에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[증명 6] $\sqrt{2}$를 유리수라고 가정하자. 즉, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$(q와 p는 양의 정수)라고 하자. 그러면 등식 $2q^2=p^2$이 성립한다. 좌변의 $2q^2$을 소인수분해 하면 2가 홀수 번 나타나고, 우변의 p^2을 소인수분해 하면 각 소인수들이 짝수 번 나타난다. 이것은 소인수분해의 유일성에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.