KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 33-42

소인수분해정리와 유클리드의 원론*

순천대학교 수학교육과 **강윤수**

Abstract

In this paper, we identify the essential ideas of Fundamental Theorem of Arithmetic(FTA). Then, we compare these ideas with several theorems of Euclid's *Elements* to investigate whether the essential ideas of FTA are contained in Elements or not. From this, we have the following conclusion: Even though *Elements* doesn't contain FTA explicitly, it contains all of the essential ideas of FTA. Finally, we assert two reasons why Greeks couldn't mention FTA explicitly.

First, they oriented geometrically, and so they understood the concept of 'divide' as 'metric'. So they might have difficulty to find the divisor of the given number and the divisor of the divisor continuously.

Second, they have limit to use notation in Mathematics. So they couldn't represent the given composite number as multiplication of all of its prime divisors.

0. 서론

수론에서 가장 중요한 정리 중의 하나가 소인수분해정리(Fundamental Theorem of Arithmetic, FTA)일 것이다. 이것을 현대적인 용어로 표현하면, 다음과 같다.

> 1보다 큰 모든 정수는 소수들의 곱으로 표현될 수 있다; 이러한 표현은 곱해진 인수들의 순서를 감안하지 않으면 유일하다[4].

1보다 큰 임의의 정수는 소수이거나 소수의 곱으로 유일하게 표현될 수 있다는 FTA에 의해 소수는 다른 모든 정수를 만드는 기본 블록이 된다. 그래서 소수는 수학사적으로 많은 학자들의 흥미를 끌었다. 2300여 년 전에 유클리드(Euclid)에 의해 집대성된 **원론**(Elements)

※ 이 논문은 2001년도 순천대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 것임

에 이미 소수가 등장할 뿐만 아니라 이와 관련된 많은 정리들이 소개되어 있다.

하지만 **원론**에는 오늘날 대수학 분야의 주요한 이론들을 전개하는데 중요한 역할을 할 뿐만 아니라 학교수학에서 다루어지는 초등 수론의 필수적 도구인 FTA가 소개되어 있지 않다. 뿐만 아니라, 가우스(Gauss)에 의해 명시적으로 언급되기 전까지는 어떤 수학자에 의해서도 수론의 근간이 되는 이 정리가 명확히 설명되지 않았다. 이는 FTA 혹은 이 정리에 내재된 아이디어가 수론의 제 정리들을 입증하는데 핵심적인 역할을 한다는 사실에 비추어 보면 아이러니가 아닐 수 없다.

여기서 우리는 '가우스 이전의 수학자들은 과연 FTA에 관한 개념을 전혀 갖지 못했을까?'나 'FTA가 너무 자명해 보여서 증명할 필요성을 느끼지 못한 것은 아닐까?' 등과 같은 궁금증을 가질 수 있다. 이와 관련해서 수학사를 연구하는 많은 연구자들이 FTA와 유사한 아이디어를 발전시킨 역대 수학자들의 업적과 관련된 연구들을 수행하였다([2], [3], [7], [10]).

본 연구는 이러한 연구들과 궤를 같이 하는 것으로 유클리드의 **원론**에서 확인할 수 있는 FTA와 관련된 아이디어들을 살펴보고자 한다.

1. FTA의 약사

[2]에서는 유클리드로부터 가우스에 이르기까지 FTA의 발달과정에 영향을 미친 수학자들의 연구결과를 검토함으로써 FTA의 수학사적 변천과정을 고찰하였다. 그의 연구결과를 포함한 선행연구 결과를 바탕으로 FTA와 관련된 역대 수학자들의 주요한 연구결과를 연대순으로 재구성하면 다음 표와 같다.

연대	수학자	연구 결과	참고 문헌	비 고
기원전 3세기경	유클리드	소수 p가 두 수의 곱 ab를 나누면 p가 a를 나누거나 b를 나눈다(Ⅶ.30) 임의의 합성수는 어떤 소수로 나누어진다(Ⅶ.31) 어떤 소수들이 나눌 수 있는 가장 작은 수는 그 소수들을 제외한 어떠한 소수로도 나눌 수 없다(Ⅸ.14)	[9], [1]	FTA는 직접 언급하지 않음
14세기	알파리시	각 합성수는 유한개의 소수의 곱으로 분해된다(FTA의 존재성) 같은 소인수들을 갖는 두 합성수는	[13]	그는 최초로 FTA의 존재성을 증명하였으나 유일성을 직

		일치한다.		접적으로 언급하거나 증명하지는 못함
17세기 (1689)	프레스테트	◉만일 d가 bc를 나누고 d와 c가 서로 소이면, d는 b를 나눈다	[7]	FTA의 유일성을 보이는데 필요한 아이디어를 제공
18세기 (1770)	오일러	◉모든 합성수들은 소수인 인수들로 표현될 수 있다	[5]	FTA의 존재성을 말하고 그 일부를 증명함
18세기 (1798)	르장드르	◉소수가 아닌 임의의 수 N은 α, β, γ 등과 같은 소수들의 곱으로 표현될 수 있다. 따라서 우리는 항상 $N=\alpha^m \beta^n \gamma^p$ 으로 가정할 수 있다 ◉어떤 수 N이 $\alpha^m \beta^n \gamma^p$로 표현된다면 N의 약수는 m, n, p보다 각각 크지 않은 μ, ν, π등에 대해 $\alpha^\mu \beta^\nu \gamma^\pi$등으로 표현된다	[11]	그는 FTA의 존재성을 증명하였으며, 유일성을 증명하는데 필요한 결정적인 아이디어를 제공함
19세기 (1801)	가우스	◉임의의 합성수는 오직 한 가지 방법으로 소수들로 분해 될 수 있다(FTA)	[6]	최초로 FTA를 말하고 증명함

2. 유클리드의 원론과 FTA의 아이디어

(1) FTA의 아이디어

FTA는 '1보다 큰 정수는 소수들의 곱으로 유일하게 표현된다.'이므로 이것은 다음과 같은 두 개의 소정리로 분해된다.

【존재성】 1보다 큰 정수는 소수들의 곱으로 표현될 수 있다

【유일성】 이러한 표현이 소인수들의 곱해진 순서를 고려하지 않으면 유일하다

이 두 가지 소정리를 현대수학적(집합론적, 공리적)인 방식으로 증명한 내용을 소개하고 여기에서 중요한 역할을 한 아이디어들을 추출해 보자.

【존재성】 n을 1보다 큰 정수라고 하면 이것은 소수이거나, 합성수이다. 만일 n이 소수이면 더 이상 증명할 필요가 없다. *만일 n이 합성수이면 1보다 크고 n보다 작은 n의 약수(인수)가 존재한다(E1).* 그러면, 이런 n n의 약수들을 원소로 하는 집합은 자연수의 부분집합이 되므로 *'Well-Ordering Principle'(E2)*에 의해 최소수가 존재하는데 *그것은 소수가 되어야 한다(E3).* 그 소수를 p_1이라고 하면, $n=p_1n_1$인 1보다 크고 n보다 작은 정수 n_1이 존재한다. *이 n_1이 소수이면 증명은 끝나고, 만일 n_1이 합성수이면 위의 과정을 반복(E4)* 하여 $n_1=p_2n_2$, 즉 $n=p_1p_2n_2$인 소수 p_2 및 1과 n_1 사이에 존재하는 n_2를 찾을 수 있다. 여기서 *n은 유한하므로 이 과정을 무한히 반복할 수는 없다(E5).* 따라서 적당한 k가 존재해서 n_k가 소수가 되어야 한다. 즉 $n=p_1p_2p_3\cdots p_k$인 소수들(p_1, p_2, $\cdots$, p_k)이 존재한다.

【유일성】 *만일 n이 두 가지의 소인수분해를 갖는다고 가정하자(U1).* 즉, $p_1\leq p_2\leq\cdots\leq p_r$이고 $q_1\leq q_2\leq\cdots\leq q_s$인 소수들에 대해 $n=p_1p_2\cdots p_r=q_1q_2\cdots q_s$라고 가정하자. *그러면, p_1이 소수이고 p_1이 $q_1q_2\cdots q_s$를 나누므로 어떤 k에 대해 $p_1=q_k$(U2)*가 되어, $p_1\geq q_1$이다. 마찬가지 방법으로, $q_1\geq p_1$임을 보일 수 있으므로, $p_1=q_1$이 된다. 따라서 다음과 같이 된다.

$$p_2p_3\cdots p_r=q_2q_3\cdots q_s$$

같은 방법으로 $p_2=q_2$임을 보일 수 있으므로, 다음과 같이 된다.

$$p_3p_4\cdots p_r=q_3q_4\cdots q_s$$

만일 $r<s$라고 가정하면 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$1=q_{r+1}q_{r+2}\cdots q_s$$

그런데 이는 $1<q_1\leq q_{r+1}\leq\cdots\leq q_s$ 이므로 모순이다(U3). 따라서 $r=s$이고 다음과 같이 된다.

$$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ \cdots,\ p_r=q_r$$

(2) 유클리드 원론의 정리들과 FTA 관련 아이디어 비교

히스(Heath)는 [8]에서 유클리드가 FTA를 명확히 언급하고 그것을 증명하였다고 주장하였으나 **원론**의 어디에도 오늘날 우리가 FTA라고 부르는 소인수분해정리는 명확히 언급되어 있지 않다. 한편, 멀린(Mullin)은 [12]에서 유클리드의 정리들에는 오늘날 FTA라고 불리

는 정리의 정신이 담겨있지만 그것의 본질을 포함하고 있지는 않았다고 주장하였다. 본 연구자는 히스와 멀린의 이러한 주장에 부분적으로 동의하며, '유클리드의 **원론**에는 FTA가 직접 언급되어 있지는 않지만 이와 관련된 중요한 아이디어들을 담고 있는 정리들이 있다.'고 생각한다. 이러한 생각을 뒷받침하기 위해 아래에서 FTA의 두 요소인 【존재성】과, 【유일성】을 보증하는 아이디어들과 관련된 **원론**의 정리들을 살펴보고자 한다.

우선, 아이디어 'E1'은 합성수의 개념에 의한 것으로 이것은 유클리드의 **원론**에 이미 나타나 있다. 즉, '**원론** Ⅶ.31'에 '합성수는 어떤 홀수(소수)로 잴(나눌) 수 있다.'라고 되어 있어서 Ⅶ.31이 아이디어 'E1'을 포함하고 있다.

아이디어 'E2'는 현대수학의 집합론적 전개를 위해 필요한 법칙으로 여기에서는 유한집합에서의 최소수를 찾는 문제에 국한되고 이와 관련된 아이디어는 **원론**의 여러 정리(최소공배수 관련 정리 등)들을 증명하는 과정에 나타나므로 개념적으로는 **원론**에 이미 이 아이디어가 포함되어 있다고 볼 수 있다.

한편, 아이디어 'E3', 'E4'와 'E5'는 합성수의 정의에 의해 그 합성수를 나누는 소수를 찾아가는 과정을 설명한 'Ⅶ.31'의 증명과정과 구조적으로 일치한다. 여기서 'Ⅶ.31'와 그것의 증명과정을 현대적인 표기법으로 간략히 살펴보면 다음과 같다.

Ⅶ.31: 합성수는 어떤 소수로 나눌 수 있다.

증명: n이 합성수라고 하자. 그러면, 어떤 수가 n을 나눌 수 있다. n을 나누는 수를 a라고 하자. 만약, a가 소수이면 증명이 끝난다. 만약 a가 합성수이면, 어떤 수, 말하자면 b, 가 a를 나눌 수 있다. *b가 a를 나누고 a가 n을 나누므로 b는 n을 나눈다.* 만약 b가 소수이면, 증명은 끝난다. 만약 b가 합성수이면, 어떤 수가 b를 나눌 수 있다. 이런 식으로 계속해 나가면 어떤 소수가 그 이전의 수를 나누는 게 있을 것이다. 만약에 이런 소수가 없다면, 무수히 많은 수들이 n을 나눌 수 있다. 이들은 갈수록 더 작아진다. 이런 일은 수들에게 생길 수 없다. 그러므로 그 이전의 수를 나눌 수 있는 소수가 존재하며, 그 소수는 또한 n을 나눈다. 그러므로 합성수는 어떤 소수로 나눌 수 있다.

위의 사실을 종합해보면, FTA의 '존재성'부분에 포함된 아이디어들은 이미 유클리드의 **원론**(특히, Ⅶ.31)에 나타나 있다고 볼 수 있다. 그럼에도 불구하고, **원론**에는 FTA의 '존재성' 부분과 동치라고 말할 수 있는 정리가 언급되어 있지 않다. 이러한 결과의 원인을 여러 관점에서 분석할 수 있겠으나, 여기서는 두 가지 측면에서 분석해 보고자 한다.

첫째, 'Ⅶ.31'을 일반화해서 FTA의 '존재성'을 말할 수 있으므로 명시적으로 언급하지는 않았더라도 이것을 알고 있었을 가능성이 있다. 하지만 이러한 가능성을 받아들인다면 그 이후에 등장하는 정리들의 증명과정에 이와 관련된 아이디어가 활용되어져야 한다. 그러나

원론에는 이 아이디어를 활용한 정리들(예를 들어, 최대공약수나 최소공배수와 관련된 여러 정리들)과 증명이 나타나 있지 않아 이러한 가능성을 받아들이는 것이 쉽지 않다.

둘째, 기하학적으로 개념화(나눈다↔잰다)된 그리스인들의 수 연산 개념으로는 주어진 수의 모든 인수(약수)들을 동시에 생각하는 수학적 발상이 쉽지 않았을 것이다. 이러한 추측은 원론에 등장하는 수론과 관련된 정리들이 일반화된 형태로 표현된 데 반해, 증명과정은 대부분 세 개나 두 개의 수들을 가지고 설명하고 있다는 것에 기인한다. 위의 증명과정에서도 주어진 합성수의 인수를 생각하고 그 인수의 인수를 다시 생각하는 방식은 아이디어 상으로는 FTA의 '존재성'을 보이는 과정과 일치한다. 그러나 그리스인들은 이렇게 연속적으로 이어지는 과정을 동시에 생각하지 못했던 것 같다. 말하자면, 합성수 n이 a_1로 나누어지면 어떤 수 b_1이 존재해서 $n=a_1b_1$이 되고, b_1이 다시 합성수여서 $b_1=a_2b_2$인 a_2, b_2가 된다고 할 때 그리스인들은 뒤의 식에만 주목할 뿐, 이것을 앞의 식과 결합해서 $n=a_1a_2b_2$가 됨을 인식하지 못한 것으로 보여 진다.

이러한 그리스인들의 사고는 오늘날 우리가 '나눈다', 혹은 '곱한다'는 의미가 어느 한 수를 단위로 해서 '잰다'고 하는 기하학적 의미로 이해되었기 때문에 단위를 축소해가면서 주어진 수를 잴 수 있는 극소(소수)단위들을 찾아가는 일반화과정으로 진전되지 못한 것으로 보여 진다. 하지만, Ⅶ.31의 증명에서 원래 주어진 수를 재는(나누는) 단위를 다시 잴 수 있는 더 작은 단위를 생각하고 이 단위가 최초의 수를 재는 단위임을 보이고 있다. 이는 최소한 개념적으로는 그리스인들도 주어진 수를 재는 극소(소수) 단위들을 찾을 수 있었음을 보여 주는 증거이다. 그렇다면 그들은 왜 주어진 수를 재는(나누는) 극소(소수) 단위들을 동시에 생각하지 못했을까? 여기에는 여러 가지 이유가 있겠으나 가장 중요한 이유 중의 하나는 분명히 기호의 부재에 의한 표현상의 제약에 있다. 다시 말하면, 주어진 합성수 n의 소인수 p_1을 찾아 $n=p_1n_1$인 상황에서 n_1의 소인수 p_2를 찾아서 $n=p_1p_2n_2$ 등으로 되는 과정을 설명하기 위해서는 주어진 수와 그 수의 소인수들을 기호화해서 곱셈으로 표현하는 것이 중요한 역할을 한다. 하지만, 그리스인들은 이러한 기호나 곱셈표현을 활용하지 못했기 때문에 어떤 수를 세 개 이상의 인수들의 곱으로 이해(표현)하는 것이 매우 어려웠던 것으로 생각된다.

한편, FTA의 '유일성'에 관련해서는 Euclid의 원론에 등장하는 'Ⅶ.30'과 'Ⅸ.14'가 가장 유사한 정리로 이 두 정리의 아이디어를 일반화하면 FTA의 '유일성'을 보일 수 있다. 다시 말하면, '유일성'의 증명과정에 등장한 아이디어들 중, 'U2'는 'Ⅶ.30'을 일반화한 형태이며 'U1'과 'U3'는 'Ⅸ.14'의 증명과정에 등장한 아이디어들과 구조적으로 닮아 있다.

하지만 이 두 정리가 FTA의 '유일성'부분과 동치라고 주장하기 어려운 점이 있다. 여기서 정리 'Ⅸ.14'와 그 증명과정을 현대적인 표현으로 재구성하면 다음과 같다.

IX.14: 어떤 소수들이 나눌 수 있는 가장 작은 수는 그 소수들을 제외한 다른 어떠한 소수로도 나눌 수 없다.

증명: 소수들 b, c, d가 나눌 수 있는 가장 작은 수를 a라고 하자. 어떤 소수 e가 a를 나누는데 b, c, d와는 다르다고 가정하자. e가 a를 나누므로 $a=ef$인 f가 존재한다. 여기서 f는 a보다 작다.

한편, b가 $a\,(=ef)$를 나누고 b는 소수이므로 'VII.30'에 의해 b는 e나 f를 나눈다. 그런데 b는 e와 다르므로 b가 f를 나눈다. 마찬가지로, c와 d가 f를 나눈다. 하지만, 이것은 b, c, d가 나누는 가장 작은 수가 a라는 사실에 모순이다. 따라서 b, c, d를 제외한 어떤 소수도 a를 나눌 수 없다.

위의 증명과정과 FTA의 '존재성'을 증명하는데 필요한 아이디어 'U1','U3'의 차이점은 다음 세 가지로 요약될 수 있다.

1. 인수들의 개수에 관한 일반화
2. 중복인수에 관한 고려
3. 정리의 시작점에 관한 차이

이들을 좀 더 자세히 살펴보자.

첫째, 위의 증명에서와 같이 **원론**에서는 세 개의 소수를 인수로 갖는 경우에 한해 유일성을 보이고 있다. 멀린은 [12]에서 이에 대해 그리스인들은 기하학적인 표현에 익숙해져 있어 그들이 이해한 것을 쉽게 일반화(소수들의 개수)하여 유일성을 인정했다고 하였다. 한편, 헨디(Hendy)는 [10]에서 **원론**에 세 개의 인수에 대한 어떤 결과의 따름정리로 두 개의 인수에 대한 비슷한 정리가 언급되지 않은 것으로 봐서 그리스인들은 형식화된 귀납법(일반화)을 몰랐거나 논리적으로 받아들일 수 없었던 것 같다고 주장하였다. 이들의 이러한 주장에도 불구하고 위의 증명이 아이디어 상으로는 FTA의 존재성과 큰 차이를 보이지 않는다. 왜냐하면, 위의 증명에서 활용된 아이디어는 인수의 개수가 많아져도 그대로 유지될 수 있으며, 현대적인 일반화 방법인 수학적귀납법으로 일반화하는데 필요한 정리(VII.30)가 **원론**에 포함되어 있기 때문이다.

둘째, 멀린은 [12]에서은 **원론**에 'IX.14'가 서로 다른 소수들의 곱으로 표현된 경우뿐만 아니라 중복인수를 갖는 경우에도 성립하는 것처럼 언급되어 있지만 그에 관한 증명은 어디에도 나타나 있지 않다고 주장하였다. 실제로 $a=bcd$이면서 $b=c\neq d$라면, b, c, d에 의해

나누어지는 가장 작은 수는 b^2d가 아니고 bd가 된다. 따라서 'IX.14'는 서로 다른 소인수들을 갖는 경우에만 해당되며, 중복인수를 갖는 경우를 설명하지 못한다.

셋째, [3]에서는 'IX.14'가 소인수분해의 '존재성'을 전제하지 않고 소수들의 모임으로부터 출발하고 있어서 FTA의 '유일성'과는 출발점부터가 완전히 다르다고 주장하였다. 실제로 FTA의 '유일성'은 소수의 정의로부터 출발하여 주어진 수가 소수들로 유일하게 쪼개짐을 보이는데 반해, 'IX.14'에서는 주어진 소수들의 곱으로 만들어진 수가 다른 소인수를 갖지 못한다고 주장하였다. 뿐만 아니라, 위에서 언급한 바와 같이, 'IX.14'가 중복인수를 갖는 경우를 설명하지 못하고 있어서 [10]과 [12]에서는 FTA와 'IX.14'는 기술적으로 동치가 될 수 없다고 주장하였다.

3. 요약 및 결론

수학적 제 정리들은 대개 그들의 발견과정과 관련된 상황과 수학자들의 아이디어를 숨긴 채 그 결과만이 연역적 체계로 조직된다. 이러한 전개방식은 유클리드 이래로 전통이 되어 수학이 갖는 독특한 특징이 되어 왔다. 이렇게 '탈문맥화', '탈개인화'된 수학적 지식은 그것을 통해 새로운 아이디어를 발전시키려는 수학 연구자들의 의도와 수학적 사고를 함양시키려는 수학교육 연구자들의 목적에 적지 않은 장애를 유발한다. 그래서 수학적 개념들이 발달되어 온 자취를 고찰하거나 그 개념들에 내재된 아이디어들의 진화과정을 탐구하는 수학사적 연구들은 수학적 혹은 수학교육적으로 중요한 의미를 갖는다. 특히, '재현의 원리'1)가 설득력을 얻고 있으며 수학적 개념은 역사발생적 방법으로 지도되어야 한다는 입장이 광범하게 받아들여지고 있는 지금과 같은 상황에서는 더욱 더 그러하다.

이런 관점을 바탕으로, 본 연구에서는 수론 특히, 학교수학에 등장하는 초등수론에서 중요한 역할을 하는 FTA와 관련된 아이디어의 태동과정을 고찰하였다. 다른 수학적 정리들과 마찬가지로 FTA도 18세기에야 최후의 모습을 드러냈지만 이와 관련된 아이디어는 이미 유클리드의 **원론**에 등장한다. 그래서 본 연구에서는 우선 FTA를 입증하는데 필요한 핵심적 아이디어들을 발췌하여 이들을 **원론**에 등장하는 정리들과 비교하였다. 그 결과, 이 아이디어들이 **원론**에 포함된 정리들 혹은 그 증명과정에 이미 내재되어 있음을 확인하였다. 그럼에도 불구하고, **원론**에 FTA가 명시적으로 언급되지 못한 것은 다음과 같은 이유 때문인 것으로 판단된다.

---

1) '개체의 발생은 종족의 발생을 따른다'는 진화론적 입장을 수학교육에 적용해서 학습자 개인의 인지구조 내에서 수학적 개념이 형성되는 과정은 그 개념이 수학사적으로 진화되어 온 과정을 밟아간다는 주장임.

첫째는, 그리스인들의 수학적 사고가 기하학적으로 방향 잡혀 있었다는 사실이 하나의 이유가 될 수 있다. 즉, 오늘날 수론에서 '나눈다'로 이해되고 있는 약수와 배수의 관계를 주어진 선분을 더 작은 선분을 단위로 '잰다'는 식으로 이해했기 때문에 주어진 수를 나누는 수를 찾고 또 그 수를 나누는 더 작은 수를 찾아가는 방식에 의해 소수를 찾아가는 일반화과정으로 발전시키지 못한 것으로 보인다.

둘째는, 기호를 활용하지 못했던 그리스인들의 표현상의 한계가 또 다른 이유가 될 수 있다. 예를 들어, 주어진 합성수 n의 소인수 p_1을 찾아 $n=p_1n_1$가 된 상황에서 n_1의 소인수 p_2를 찾아서 $n=p_1p_2n_2$ 등으로 되는 과정을 설명하기 위해서는 주어진 수와 그 수의 소인수들을 기호화해서 곱셈 형식으로 표현하는 것이 중요한 역할을 한다. 하지만, 기호나 곱셈표현을 활용하지 못했던 그리스인들에게는 어떤 수를 세 개 이상의 인수들의 곱으로 이해(표현)하는 것이 매우 어려웠던 것으로 생각된다.

그리스인들의 이러한 수학적 성향이나 표현상의 진보에 의한 한계를 감안한다면, FTA와 관련된 영예를 전적으로 가우스에게만 돌리는 것은 문제가 있어 보인다. 오히려, 적분 개념과 관련된 영광을 아르키메데스에게 돌리듯 FTA와 관련된 수학사적 가치를 유클리드의 **원론**에서 찾는 것은 매우 자연스러워 보인다.

참고 문헌

1. 이무현 역, **기하학 원론**, 교우사, 1997.
2. Ağargün, Fletcher, "al-Fārisī and the Fundamental Theorem of Arithmetic," *Historia Mathematica* 21(1994), 162-173.
3. Ağargün, Özkan, "A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic," *Historia Mathematica* 28(2001), 207-214.
4. Burton, D.M., *Elementary Number Theory*, 3rd ed., McGraw-Hill Co., 1997.
5. Euler, L., *Elements of Algebra* [trans. John Hewlett, London, 1840], reprinted Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1985, 재인용.
6. Gauss, C.F., *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig, 1801. Translated into English by A.C. Clarke. New Haven, CT: Yale University Press, 1966, 재인용.
7. Goldstein, C., "On a Seventeenth Century Version of the 'Fundamental Theorem of Arithmetic'," *Historia Mathematica* 19(1992), 177-187.
8. Heath, T.L., *Euclid's Elements* 2nd ed., New York: Dover, 1956.
9. Heath, T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 2. Cambridge, UK: Cam-

bridge University Press, 1908.

10. Hendy, M.D., "Euclid and the Fundamental Theorem of Arithmetic," *Historia Mathematica* 2(1975), 189-191.
11. Legendre, A.M., 1798. *Thérie des Nombres*, 3rd ed. Paris: Firmin Didot, 1830, reprinted Paris: Hermann, 1990, 재인용.
12. Mullin, A.A., "Mathematico-philosophical remarks on new theorems analogous to the fundamental theorem of arithmetic," *Notre Dame J. Formal Logic* 6(3)(1965), 218-222, 재인용.
13. Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^{eme} et XIV^{eme} siècles," *Archive for History of Exact Sciences* 28(1983), 107-147, 재인용.