KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 15-32

묵사집산법의 수열*

광운대학교 수학과 **허 민**

Abstract

In this article we survey the sequences and the series in *Mooksajipsanbup*(默思集算法) which is the seventeenth century mathematics book of Chosun dynasty. First, we classify them into three categories: arithmetics, geometric, and general sequences (series). And then we explore the old methods to find the values of terms and the sum of terms.

0. 머리말

묵사집산법(默思集算法)은 조선 시대의 중인 산학자 경선징(慶善徵, 1616~?)이 저술한 산학서로, **천**(天, 上卷) 10문, **지**(地, 中卷) 10문, **인**(人, 下卷) 5문으로 구성되어 있으며 모두 358문제를 싣고 있다. 이것은 산학자들이 책을 편찬하기 시작한 조선 중기에 등장한 최초의 산학서에 속하며, 당시의 사회 현실을 잘 반영하고 있다. 그리고 이 책은 저자가 당시의 수학 지식을 충분히 소화하여 응용했음을 시사해주며, 산학의 입문서로서 특히 중인 산학자를 대상으로 쓴 것으로 사료된다([2, p. 一-二], [4, pp. 231-233], [6, pp. 3-4]).

묵사집산법(앞으로는 **묵사**로만 표시하겠음)에서는 산술, 대수, 기하 등 다양한 수학 분야와 관련된 문제를 취급하고 있다. 이 글에서는 **묵사**[1]에서 찾은 수열과 급수에 관한 문제 및 이의 응용에 관한 문제를 발췌하여 소개하려고 한다. 먼저, 수열과 급수에 관한 문제를 현대 수학의 입장에서 등차 수열과 등비 수열 및 기타 수열로 분류하고, 풀이 방법과 문제의 유형에 따라 세분하여 각 문제의 내용과 풀이 방법을 알아보기로 한다. 이를 통해 전통 수학의 교육적인 효과도 모색한다.

묵사에는 등차 수열과 등비 수열 및 기타 수열이 혼재되어 있으며, 난이도에 따라 순서가 정해져 있지도 않다. 여기서는 문제들을 편의에 따라 원본과 다른 순서로 제시하기도 했다.

* 이 논문은 2002년도 광운대학교 교내학술연구비에 의하여 연구되었음.

1. 등차 수열

1.1. 분율의 활용

가장 단순한 등차 수열은 다음과 같은 **묵사** **인** 차등균배문(差等均配門)의 첫째 문제이다.

• 지금 갑, 을, 병 세 사람이 함께 나누어 가질 쌀이 38섬 7말 있다. 다만, 갑은 4분을 취하고 을은 3분을 취하며 병은 2분을 취한다고 한다. 각자의 몫은 얼마인가? (今有甲乙丙三人 共分米三十八石七斗 只云甲取四分 乙取三分 丙取二分 問各得幾何)

이 문제는 갑, 을, 병의 몫이 4 : 3 : 2의 비율로 등차 수열을 이루고, 그 수열의 세 항의 합이 주어졌을 때 각 항의 값을 구하는 문제이다. 풀이 방법은 각 항의 '분율'의 합을 구한 다음에 다음과 같은 식으로 각 항(여기서는 갑)의 값을 계산하고 있다.

$$(\text{갑의 몫}) = \frac{(\text{세 사람 몫의 합}) \times (\text{갑의 분율})}{(\text{세 사람 분율의 합})}$$

이는 다음과 같은 두 비례식 중에서 하나를 이용해서 답을 구한 것과 같다.

(갑의 몫) : (갑의 분율) = (세 사람 몫의 합) : (세 사람 분율의 합),

(갑의 몫) : (세 사람 몫의 합) = (갑의 분율) : (세 사람 분율의 합)

이렇게 등차 수열과 관련된 문제 및 분율을 이용한 풀이법은 이미 **구장산술**(九章算術) 쇠분(衰分, 제3장)에 첫째 문제로 등장하고 있다[7, pp. 62-63]. 이런 문제에서는 통상 모든 항의 합이 주어진다. 그러므로 풀이를 위해서는 먼저 각 항의 분율을 등차 수열이 되도록 정하고 분율 전체의 합을 구한다. 그리고 구하려는 항의 값과 분율의 비가 모든 항의 합과 분율의 합의 비가 서로 같다는 사실을 이용한다. 이런 문제와 풀이법을 조선 시대의 다른 산학서에서도 찾아볼 수 있다[9, 제2권 차등균배문의 열째 문제]

그런데 위 문제의 풀이에서 1분을 $1x$, 즉 x라고 하면, 갑, 을, 병의 몫은 차례로 $4x$, $3x$, $2x$이고 전체는 $4x+3x+2x=9x$이므로, 다음과 같이 갑, 을, 병의 몫을 구할 수 있다.

$9x=38.7$섬, $x=4.3$섬,

갑 : $4x=4\times4.3=17.2$(섬), 을 : $3x=3\times4.3=12.9$(섬), 병 : $2x=2\times4.3=8.6$(섬)

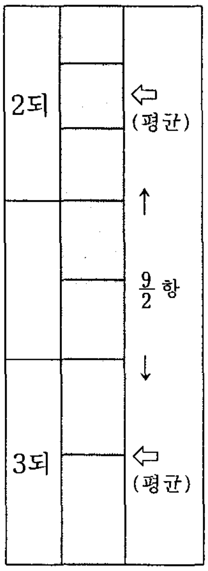
서양의 대수 방정식을 소개한 **차근방몽구**(借根方蒙求, 李尙爀 1854년 著)에서는 미지수 x를 '1근(一根)'으로 나타내고 있다[8]. 그래서 위와 같은 문제에서 분율을 이용한 풀이는 미지수의 개념을 분명히 내포하고 있다고 생각하게 된다. 그래서 미지수를 자연스럽게 도입하는 소재로 이런 문제와 풀이 방법을 이용할 수 있을 것으로 보인다.

1.2. 대나무 문제

묵사 지 화합차분문(和合差分門)에 마지막 네 문제는 등차 수열과 관련되지만, 앞에서와 같이 분율을 이용하지 않고 매우 다른 방법으로 풀이되어 있다. 이런 문제에서 대나무의 마디들은 등차 수열을 이루며 줄어든다고 가정하고 있다. 그 첫째 문제는 다음과 같다.

• 지금 대의 마디가 7개 있는데, 아래 2마디에는 쌀이 3되 담기고 위 3마디에는 쌀이 2되 담긴다. 가운데 2마디 및 각 마디에 담기는 쌀은 얼마인가? (今有竹七節 下二節容米三升 上三節容米二升 問中二節及逐節各容米幾何)

묵사에 제시된 해법을 단계별로 정리하면 다음과 같다.



[단계 1] 3마디와 3되의 곱 9에서 2마디와 2되의 곱 4를 뺀 나머지 5를, 2마디와 3마디의 곱(분모) 6으로 나눈다.

$$\frac{3\times3-2\times2}{2\times3}\left[=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right]=\frac{5}{6}\text{(되)} \cdots\cdots①$$

[단계 2] 3마디와 2마디의 평균 2.5마디를 7마디에서 빼서 4.5마디를 얻는다.

$$7-\frac{2+3}{2}=\frac{9}{2}=4.5\text{(마디)} \cdots\cdots②$$

[단계 3] 4.5마디와 분모 6의 곱 27에 3되를 곱하여 81을 얻고, 마디 사이의 차 5를 더한 86을 반으로 나누어 43을 얻는다. 이를 27로 나눈 $\frac{43}{27}$ 되가 아래 첫 마디에 담긴 쌀이다.

$$\frac{3\times27+5}{27}\cdot\frac{1}{2}=\left(3+\frac{5}{27}\right)\frac{1}{2}\left[=\frac{3}{2}+\frac{5}{6\times4.5}\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{43}{27}\text{(되)}$$

[단계 4] 마디 사이의 차를 차례로 빼면, 물음에 합당한 답을 얻는다.

$$\frac{43}{27}-\frac{5}{27}=\frac{38}{27},\quad \frac{38}{27}-\frac{5}{27}=\frac{33}{27},\quad \cdots,\quad \frac{18}{27}-\frac{5}{27}=\frac{13}{27}$$

위의 풀이는 매우 장황하고 각 단계에서 계산의 의미를 파악하기 어렵다. 가장 아래 마디를 제1항이라 하고 위로 올라가면서 차례로 제2항, 제3항, …, 제7항이라 하면, 각 단계의 계산 내용은 다음과 같다.

단계 1은 아래 2마디에 담긴 쌀의 평균에서 위 3마디에 담긴 쌀의 평균(위에서 두 번째 마디에 담긴 쌀과 같은 양)을 뺀다. 이것은 제1.5항의 값에서 제6항의 값을 뺀 것이다.

단계 2에서는 아래 2마디의 평균과 위 3마디 사이의 마디의 개수를 구한다. 즉, 제1.5항과 제6항 사이의 항의 개수를 구한다.

단계 3은 아래 2마디의 평균에 마디 사이의 차(①÷②), 즉 공차의 반을 더하여 아래 첫 마디에 담긴 쌀을 구한다. 이것은 제1.5항에 공차의 반을 더해서 제1항의 값을 구한 것이다.

단계 4는 분명하다.

이렇게 등차 수열에서 처음과 끝에 있는 몇 개의 항의 합을 주고 나머지 항의 값을 구하는 과정은, 미지수를 이용한 **차근방몽구** 선류의 여덟째 문제의 풀이 방법[5]과 본질적으로 같음을 알 수 있다. 그 문제는 여덟 사람이 등차 수열에 따라 은을 나누어 갖는데, 1등, 2등, 3등 몫의 합은 45냥이고 7등과 8등 몫의 합은 85냥일 때 각 사람의 몫을 구하고 있다.

그 풀이에서는 공차를 1근(x)으로 놓고, 일곱째와 여덟째 두 사람 몫의 평균에서 공차의 반을 뺀 값 42.5냥$-0.5x$를 일곱째 사람의 몫으로 놓았다. [등차 수열의 성질로부터] 첫째, 둘째, 셋째 사람의 몫의 합의 평균으로 둘째 사람의 몫 15냥을 구했다. 그리고 일곱째 사람의 몫에 차례로 1근씩 더해 가면, 42.5냥$-1.5x$는 여섯째 사람 몫이고, 42.5냥$-2.5x$는 다섯째 사람 몫이고, 42.5냥$-3.5x$는 넷째 사람 몫이고, 42.5냥$-4.5x$는 셋째 사람 몫이고, 42.5냥$-5.5x$는 둘째 사람 몫이므로, 이를 15냥과 같다고 놓았다. 이 일차 방정식으로부터 1근이 5냥임을 구했고, 각 항의 값을 구했다.

그래서 **묵사**의 풀이가 비록 미지수를 이용하고 있지 않지만, 공차를 미지수와 같이 염두에 두고 등차 수열의 구조와 성질을 이용하여 이를 구하고 있다고 추측할 수 있다. **묵사**의 그 다음 세 문제는 아래와 같이 대나무의 각 마디에 담기는 쌀의 양과 마디의 수만 바뀌었을 뿐이며, 풀이 방법은 위의 경우와 같다.

• 지금 대의 마디가 7개 있는데, 아래 2마디에는 쌀이 8되 1홉 담기고 위 3마디에는 쌀이 5되 4홉 담긴다. 가운데 2마디 및 각 마디에 담기는 쌀은 얼마인가? (今有竹七節 下二節容米八升一合 上三節容米五升四合 問中二節及逐節各容米幾何)

• 지금 대의 마디가 9개 있는데, 아래 2마디에는 쌀이 3되 담기고 위 3마디에는 쌀이 2되 담긴다. 가운데 4마디 및 각 마디에 담기는 쌀은 얼마인가? (今有竹九節 下二節容米三升 上三節容米二升 問中四節及逐節各容米幾何)

• 지금 대의 마디가 9개 있는데, 아래 2마디에는 쌀이 1말 1되 7홉 담기고 위 3마디에는 쌀이 7되 8홉 담긴다. 가운데 4마디 및 각 마디에 담기는 쌀은 얼마인가? (今有竹九節 下二節容米一斗一升七合 上三節容米七升八合 問中四節及逐節各容米幾何)

이와 같은 유형의 문제는 조선 시대의 다른 산학서에서도 찾아볼 수 있다. 예를 들면, **구**

일집(九一集) 제2권 귀천차분문(貴賤差分門)의 마지막 5문제와 차등균배문(差等均配門)의 여덟 번째 문제가 이에 해당한다[9]. 사실, 위와 같은 형식의 문제는 **구장산술** 균수(均輸)(제6장)에 17번째부터 19번째 문제까지 난이도를 높이면서 차례로 소개되어 있다[7, pp. 128-131].

1.3. 등차 수열의 응용

묵사 인 차등균배문의 15째 문제는 다음과 같이 세금과 관계 있는데, 항의 개수와 공차 및 합이 주어진 등차 수열을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

• 지금 9등급으로 나뉘어 세금을 내는 가구들이 있는데, 갑등은 364호, 을등은 396호, 병등은 432호, 정등은 570호, 무등은 584호, 기등은 676호, 경등은 850호, 신등은 920호, 임등은 1608호이고, 세금으로 거둔 전체 식량은 65664섬이다. 다만, 갑부터 임까지 각 등 1호의 차수는 1섬 6말이다. 매호가 내는 세금 및 각 등급 전체 가구가 내는 합은 얼마인가? (今有九等稅户 甲等三百六十四户 乙等三百九十六户 丙等四百三十二户 丁等五百七十户 戊等五百八十四户 己等六百七十六户 庚等八百五十户 辛等九百二十户 壬等一千六百八户 共稅糧六萬五千六百六十四石 只云自甲至壬各等一户差數一石六斗 問每户出稅及逐等各該幾何)

위와 수치만 다른 문제를 **구일집** 제2권 차등균배문의 16째 문제에서 찾아볼 수 있다[9].

2. 등비 수열

2.1. 등비 수열

묵사 천 열위승법문(列位乘法門)의 마지막 두 문제는 다음과 같이 첫째 항이 2이고 공비가 2인 등비 수열과 첫째 항이 3이고 공비가 3인 등비 수열의 30째 항의 값을 구하고 있다.

• 지금 사람이 돈 1문을 가지고 있는데, 첫날부터 하루에 1배씩 증가하여 30일까지 매일 배가 된다. 전체의 돈은 얼마인가? (今有人持錢一文 自初日日增一倍 倍至三十日 問計錢幾何)

• 지금 사람이 있는데, 첫날에 돈 3문을 만들고 이후 날마다 차례로 3배하여 한 달 동안 계속한다. 전체의 돈은 얼마인가? (今有人 初日作錢三文 以後每日遞作三倍 乃至一月 問計錢幾何)

각 문제의 해법에 있는 계산 과정을 요약하면 각각 다음과 같다.

$$\{(2^5)^2\}^2 \cdot (2^5)^2 = \{2^{5\times2}\}^2 \cdot 2^{5\times2} = \{2^{10}\}^2 \cdot 2^{10} = 2^{10\times2} \cdot 2^{10} = 2^{20} \cdot 2^{10} = 2^{20+10} = 2^{30},$$

$$\{(3^5)^2 \cdot 3^5\}^2 = \{3^{5\times2} \cdot 3^5\}^2 = \{3^{10+5}\}^2 = \{3^{15}\}^2 = 3^{15\times2} = 3^{30}$$

등비 수열의 일반항을 제시하지는 않았지만, 지수 법칙을 연상시키는 과정과 반복적인 곱셈을 통해 원하는 항까지의 값을 구하는 방법을 예시하고 있다.

2.2. 등비 수열의 합

등비 수열의 합과 관련된 문제가 **묵사**에 매우 많이 등장하는데, 풀이는 모두 분율을 이용 방법을 이용하고 있다. 가장 간단한 경우로 공비가 ½인 경우가 다음과 같이 **묵사 인** 차등균배문(差等均配門)의 여섯째 문제로 등장한다.

• **지금 갑, 을, 병, 정 네 사람이 함께 나누어 가질 실이 115근 13양 4전 있다. 다만, 위로부터 절반 차로 이를 나눈다. 각자의 몫은 얼마인가? (今有甲乙丙丁四人 共分絲一百一十五斤一十三兩四錢 只云從上作折半差分之 問各得幾何)**

이 문제는 공비가 ½이고 항의 개수가 4이며 네 항의 합이 주어진 등비 수열에서 각 항의 값을 구하는 문제와 같다. 다음과 같이 가장 큰 항의 분율을 8(=2^3)로 정해서 가장 작은 항의 분율이 정수 1이 되도록 했다.

갑	을	병	정	합계
8	4	2	1	15

분율의 합을 구하고 각 항의 값을 구하는 과정은 1.1절에서 소개한 바와 같다.

이와 같이 각 항의 분율을 정해서 항의 값을 구하는 방법에서는, 등차 수열과 등비 수열의 차이가 분율을 정할 때만 나타나며 각 항의 값을 구하는 나머지 과정에서는 나타나지 않는다. 등비 수열의 경우에도 항의 개수가 작은 경우에는 모든 항의 분율이 정수가 되도록 정할 수 있기 때문에, 이 방법은 수열의 도입 단계에서 등차 수열과 등비 수열의 개념을 파악하고 각 항의 값을 구하는 간편하고 효율적인 방법으로 이용할 수 있을 것으로 보인다.

위의 문제에서 갑, 을, 병, 정의 몫이 공비가 ½인 등비 수열을 이루지만, 이를 거꾸로 생각해서 정, 병, 을, 갑의 몫이 공비가 2인 등비 수열을 이루는 것으로 생각할 수 있다. 그래서 분율을 이용할 때는, 공비가 ½과 2인 등비 수열을 구분할 필요가 없다. 이렇게 공비가 2(또는 ½)인 등비 수열과 관련된 문제와 풀이법은 **구장산술** 쇠분(衰分)장에 둘째 문제(공비 ½)와 넷째 문제(공비 2)로 등장했었다[7, pp. 64-66].

묵사에서는 공비가 ½ 또는 2인 등비 수열을 가장 기본적인 등비 수열로 생각한 것 같다. 왜냐하면 이런 등비 수열의 합을 풀이 과정에서 이용한 문제가 위의 문제보다 앞서 **묵사 지**

의 가감승제문과 인의 첫째 장 화답호환문에도 등장하기 때문이다. 화답호환문의 여섯째 문제에서는 공비가 ½이고 항이 7개이며 모든 항의 합이 27.94자인 등비 수열의 마지막 항을 구하는 과정을 이용하고 있고, 아홉째 문제에서는 공비가 역시 ½이고 항이 6개이며 모든 항의 합이 27.94자인 등비 수열의 마지막 항을 구하는 과정을 이용하고 있다. 묵사 지의 가감승제문에서는 아래와 같이 증가와 감소 및 성장을 나타내는 등비 수열의 합과 관련된 문제를 다루고 있다. 성장과 관련된 문제는 구장산술 영부족(盈不足, 제7장)의 11번째와 12번째에서 찾아볼 수 있는 것과 유사하다[7, pp. 145-149].

• 지금 술을 가지고 봄 놀이를 가는 사람이 있는데, 그 술의 양은 알지 못 한다. 다만, 술집을 만나 1배를 사서 더하고 꽃을 만나 3말 6되를 마셨다. 또, 남은 술을 가지고 또 1배를 사고 또 3말 6되를 마셨다. 만약 이와 같이 5차례 하면 술이 다하고 술병이 빈다. 원래 가져 간 술은 얼마인가? (今有人携酒遊春 不知其數 只云遇酒家添買一倍 逢花而飮三斗六升 又携餘酒 又買一倍 又飮三斗六升 如此者五次酒盡壺空 問元携酒幾何)

• 지금 은 9량 8전 2분 2리 6호 5사 6홀 2미 5섬을 가지고 있는 사람이 있는데, 1배를 더한 합에서 얼마를 썼는데 그 수를 말하지 않았다. 또, 남은 은을 가지고 또 1배를 더하고 또 썼는데, 역시 처음 쓴 수와 똑같다. 이와 같이 7번 쓰니 꼭 다하여 남음이 없다. 한 번에 쓰는 은은 얼마인가? (今有人持銀九兩八錢二分二厘六毫五絲六忽二微五纖 加得一倍 共和用之而不言厥數 又携餘銀 又加一倍又用而亦如初用數適等 如此者至七巡用之 恰盡無餘 問一巡用銀幾何)

• 지금 뜰에서 함께 난 소나무와 대나무가 있는데, 첫째 날 소나무는 6자 자라고 대나무는 7치 반 자란다. 다만, 첫날 이후 소나무는 날마다 전 날 자란 것의 반만큼 자라고 대나무는 날마다 전 날 자란 것의 갑절만큼 자란다고 한다. 소나무와 대나무는 몇째 날 길이가 같아지는가? (今有松竹倂生于庭 初日松長六尺 竹長七寸半 只云初日以後 松日長自半 竹日長自倍 問松竹幾何日而長適等)

• 지금 함께 자라는 소나무와 대나무가 있는데, 첫째 날 소나무는 5자 자라고 대나무는 2자 자란다. 다만, 첫날 이후 소나무는 날마다 전 날 자란 것의 반만큼 자라고 대나무는 날마다 전 날 자란 것의 갑절만큼 자란다고 한다. 소나무는 대나무는 몇째 날 길이가 같아지는가? (今有松竹倂生 初日松長五尺 竹長二尺 只云初日以後 松日長自半 竹日長自倍 問松竹幾何日而長適等)

• 지금 같이 자라고 있는 소나무와 대나무가 있는데, 그 길이를 알지 못한다. 다만, 첫째 날 이후 소나무는 날마다 전 날 자란 것의 반만큼 자라고 대나무는 날마다 전 날 자란 것의 갑절만큼 자라서, 이에 3일 반에 이르러 소나무와 대나무의 길이가 각각 3자 1치 9푼이라

고 한다. 첫째 날 자란 바는 각각 얼마인가? (今有松竹並生 不知其長 只云初日以後 松日減一半 而長竹日增一倍而長 乃至三日半 松竹各長三尺一寸九分 問初日所長各幾何)

공비가 ½이 아닌 등비 수열이 관련된 문제에서 항의 개수와 모든 항의 합이 주어졌을 때 각 항의 값을 구하는 경우에도 각 항의 분율을 적절히 정하는 방법을 이용하고 있다. 묵사인 차등균배문(差等均配門)의 일곱째, 여덟째, 열넷째 문제 및 각 문제에서 모든 항의 분율이 정수가 되도록 정하는 방법은 차례로 다음과 같다.

• 지금 갑, 을, 병, 정 네 사람이 함께 나누어 가질 실이 544근 있다. 위로부터 46(사륙) 차로 이를 나눈다. 〔주: 위로부터 10분을 비율로 삼아 차례로 4분을 빼고 6분을 취하는 것과 같음을 이른다.」 각자의 몫은 얼마인가? (今有甲乙丙丁四人 共分絲五百四十四斤 從上作四六差分之 「謂如從上作十分爲率 遞減四分 却取六分也」 問各得幾何)

공비가 6/10이고 항의 개수가 4이므로, 가장 큰 항의 분율을 1000(=10^3)으로 정하면 가장 작은 항의 분율도 다음과 같이 정수가 된다.

갑	을	병	정	합계
1000	600	360	216	2176

• 지금 갑, 을, 병, 정 네 사람이 함께 나누어 가질 돈이 1276관 있다. 다만, 을은 갑의 7분의 3과 같고 병도 역시 을의 7분의 3과 같으며 정도 역시 병의 7분의 3과 같아서, 모두 37(삼칠) 차로 차례로 이를 나눈다고 한다. 각자의 몫은 얼마인가? (今有甲乙丙丁四人 共分錢一千二百七十六貫 只云乙如甲七分之三 丙亦如乙七分之三 丁亦如丙七分之三 皆以三七遞作差分之 問各得幾何)

공비 3/7이고 항의 개수가 4이므로, 가장 큰 항의 분율을 7^3=343으로 정하면 가장 작은 항의 분율도 다음과 같이 정수가 된다.

갑	을	병	정	합계
343	147	63	27	580

$$\times\frac{3}{7} \qquad \times\frac{3}{7} \qquad \times\frac{3}{7}$$

• 지금 갑, 을, 병, 정, 무, 기 6국이 함께 나누어 가질 실이 4860근 있다. 서양 비단을 짜는데, 6국으로 하여금 위로부터 28(이팔) 차로 이를 나눈다. 그 비단 한 필에 들어가는 실은 2근 4양이고, 한 필의 길이는 3장 2자이다. 나누어 가질 실과 짜야 할 비단은 각각 얼마인가? (今有甲乙丙丁戊己六局 共分絲四千八百六十斤 今織西錦 今六局從上作二八差分之

其錦每匹用絲二斤四兩 匹長三丈二尺 問分絲織錦各該幾何)

공비가 8/10이고 항의 개수가 6이므로, 가장 큰 항의 분율을 $10^5=100000$으로 정하면 가장 작은 항의 분율도 다음과 같이 정수가 된다.

갑	을	병	정	무	기	합계
100000	80000	64000	51200	40960	32768	368928

위와 같은 유형의 문제는 다른 산학서에서도 쉽게 찾아볼 수 있다[9, 제2권 차등균배문].

2.3. 등비 수열의 응용

세금 또는 분배와 관련된 문제로, 묵사 인 차등균배문(差等均配門)의 10째, 11째, 12째, 16째 문제는 등비 수열을 응용하고 있는데, 차례로 살펴보면 다음과 같다.

• 지금 5등급으로 나뉘어 세금을 내는 가구가 218호 있는데, 위로부터 46(사륙) 차로 이를 낸다. [주: 위로부터 10분을 비율로 삼아 차례로 4분을 빼고 6분을 내는 것과 같음을 이른다.] 제1등은 비단을 37필 2장 내고, 제2등은 비단을 27필 내고, 제3등은 비단을 25필 3장 6자 8치 내고, 제4등은 비단을 16필 8자 내고, 제5등은 비단을 12필 2장 5자 4치 4분 낸다. 세금을 내는 각 등급의 호수 및 각 호가 내는 비단은 얼마인가? [주: 1필은 4장이다.] (今有五等稅户二百一十八户 令從上作四六出之 「謂如從上作十分爲率遞減四分 却出六分也」 第一等出絹三十七匹二丈 第二等出絹二十七匹 第三等出絹二十五匹三丈六尺八寸 第四等出絹一十六匹八尺 第五等出絹一十二匹二丈五尺四寸四分 問五等稅户及每户出絹各該幾何 「匹法四丈」)

이것은 공비가 0.6=6/10인 등비 수열의 응용으로, 해법에서 설명한 방법에 따라 제1등의 1호가 내는 세금을 구하는 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다. [참고: 각 등급이 내는 세금은 제1등은 37필 2장=1500자, 제2등은 27필=1080자, 제3등은 25필 3장 6자 8치=1036.8자, 제4등은 16필 8자=648자, 제5등은 12필 2장 5자 4촌 4푼=505.44자이다.]

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{505.44}{0.6}+648}{0.6}+1036.8}{0.6}+1080}{0.6}+1500}{218}=60(\text{자})=1\text{필 }2\text{장}$$

이 값으로부터 나머지 값은 쉽게 구할 수 있다. 위의 계산 과정이 매우 복잡해 보이지만, 이는 등비 수열의 구조를 명확하게 파악해서 얻은 결과임을 알 수 있다. 계산 과정의 정당성을 확인하기 위해서, 제1등의 1호가 내는 세금을 x자라 하고 다음과 같이 나타내자.

	제1등	제2등	제3등	제4등	제5등	합
1호의 세금	x	$0.6x$	0.6^2x	0.6^3x	0.6^4x	
호수	a	b	c	d	e	218호
세금의 합	xa	$0.6xb$	0.6^2xc	0.6^3xd	0.6^4xe	

그러면 위의 계산 과정은 다음과 같다.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0.6^4xe}{0.6}+0.6^3xd}{0.6}+0.6^2xc}{0.6}+0.6xb}{0.6}+xa}{218}=\frac{(e+d+c+b+a)x}{218}=x$$

등비 수열을 응용하고 있는 그 다음의 세 문제는 아래와 같다.

• 지금 관청에서 배정한 벼가 269섬 4말 9되 7홉 2작 있는데, 각 가구를 5등급으로 나누어 위로부터 37(삼칠) 차로 이를 낸다. 「주: 위로부터 10분을 비율로 삼아 차례로 3분을 빼고 7분을 내는 것과 같음을 이름이다.」 제1등은 22호, 제2등은 36호, 제3등은 42호, 제4등은 48호, 제5등은 50호이다. 각 호가 내는 바 및 각 등급의 전체 가구가 내는 합은 얼마인가? (今有官配粟二百六十九石四斗九升七合二勺 令五等人户從上作三七出之 「謂如從上作十分爲率 遞減三分 却出七分也」 第一等二十二户 第二等三十六户 第三等四十二户 第四等四十八户 第五等五十户 問每户所出及逐等各該幾何)

• 지금 관청에서 배정한 쌀이 296섬 9말 6되 있는데, 각 가구를 5등급으로 나누어 위로부터 28(이팔) 차로 이를 낸다. 〔주: 위로부터 10분을 비율로 삼아 차례로 2분을 빼고 8분을 내는 것과 같음을 이름이다.〕 제1등은 8호, 제2등은 14호, 제3등은 30호, 제4등은 61호, 제5등은 120호이다. 각 호가 내는 쌀 및 각 등 전체 가구가 내는 합은 얼마인가? (今有官配米二百九十六石九斗六升 令五等人户從上作二八出之 「謂如從上作十分爲率 遞減二分 却出八分也」 第一等八户 第二等一十四户 第三等三十户 第四等六十一户 第五等一百二十户 問每户出米及逐等各該幾何)

• 지금 관청에서 배정하는 벼가 10870섬 8되 있는데, 상, 중, 하 세 마을에 위로부터 절반 차로 이를 배분한다. 「주: 상 마을의 상등은 6섬, 중 마을의 상등은 3섬, 하 마을의 상등은 1섬 5말과 같음을 이른다.」 또, 상 마을의 3등급은 91절을, 중 마을의 3등급은 28절을, 하 마을의 3등급은 37절을 규정하고 있다. 상 마을의 상등은 56호, 중등은 74호, 하등은 98호이고, 중 마을의 상등은 82호, 중등은 120호, 하등은 160호이며, 하 마을의 상등은 95호, 중등은 172호, 하등은 180호이다. 세 마을 아홉 등급의 매호 및 각

등급에 배분된 벼의 합은 각각 얼마인가? (今有官配粟一萬八百七十石八升 於上中下三鄉從上作折半差配之 「謂如上鄉上等六石 中鄉上等三石 下鄉上等一石五斗」 又上鄉三等作九一折 中鄉三等作二八折 下鄉三等作三七折 上鄉上等五十六户 中等七十四户 下等九十八户 中鄉上等八十二户 中等一百二十户 下等一百六十户 下鄉上等九十五户 中等一百七十二户 下等一百八十户 問三鄉九等每户及逐等配粟各該幾何)

이와 같은 세금이나 분배와 관련된 문제로 등비 수열을 응용하는 문제는 **구일집** 제2권 차등균배문에 12번째부터 18번째까지의 문제로 나타난다[9].

3. 기타 수열

3.1. 항 사이의 비가 바뀌는 수열

묵사 인 차등균배문(差等均配門)의 다음과 같은 아홉째 문제는 5개의 항의 합이 주어지고 인접한 항 사이의 비가 바꾸는 수열에서 각 항의 값을 구하는 문제를 다루고 있다.

• 지금 갑, 을, 병, 정, 무 다섯 사람이 함께 나누어 가질 은이 447냥 있다. 다만, 을(의 은)은 갑(의 은)의 9분의 7과 같고, 병은 을의 7분의 5와 같고, 정은 병의 5분의 3과 같고 무는 갑의 51분의 13과 같다고 한다. 각자의 몫은 얼마인가? (今有甲乙丙丁戊五人 共分銀四百四十七兩 只云乙如甲九分之七 丙如乙七分之五 丁如丙五分之三 戊如甲五十一分之一十三 問各得幾何)

이 문제도 각 항의 분율을 정해서 풀었는데, 각 항 사이의 비를 나타내는 분수의 분모에 나타나는 수를 모두 곱한 값 $9 \times 7 \times 5 \times 51 = 16065$를 가장 큰 항인 갑의 분율로 정하면 다음과 같이 을, 병, 정, 무의 분율은 모두 정수가 된다.

갑	을	병	정	무	합계
16065	12495	8925	5355	4095	46935
	$\times\frac{7}{9}$	$\times\frac{5}{7}$	$\times\frac{3}{7}$	갑$\times\frac{13}{51}$	

나머지 과정은 앞에서와 같다.

위와 같은 유형의 수열을 응용하는 문제로서, 세금과 관련된 다음과 같은 **묵사 인** 차등균배문(差等均配門)의 13번째 문제가 있다.

• 지금 5등급으로 나뉘어 세금을 내는 가구가 267호 있다. 제5등의 매호가 내는 바는 제

4등의 6분의 4와 같고, 제4등의 매호가 내는 바는 제3등의 7분의 5와 같고, 제3등의 매호가 내는 바는 제2등의 8분의 6과 같고, 제2등의 매호가 내는 바는 제1등의 9분의 7과 같다. 제1등은 세금을 411섬 2말 6되 4홉 내고, 제2등은 세금을 413섬 1말 6되 8홉 내고, 제3등은 세금을 489섬 8말 4홉 내고, 제4등은 세금을 464섬 1말 내고, 제5등은 세금을 466섬 4말 8되 낸다. 5등급 각각의 호수 및 매호가 내는 세금은 각각 얼마인가? (今有五等稅户二百六十七户 今第五等每户所出如第四等六分之四 第四等每户所出如第三等七分之五 第三等每户所出如第二等八分之六 第二等每户所出如第一等九分之七 第一等出稅四百一十一石二斗六升四合 第二等出稅四百一十三石一斗六升八合 第三等出稅四百八十九石八斗四合 第四等出稅四百六十四石一斗 第五等出稅四百六十六石四斗八升 問五等户數及每户出稅各該幾何)

3.2. 쌓기 문제

묵사 지 퇴타개적문(堆垜開積門)에서는, 앞에서 고려한 수열과 전혀 다른 형태로, 똑같은 물건을 어떤 규칙에 따라서 쌓거나 묶었을 때 전체의 개수를 구하는 문제를 다루고 있다. 이번 절의 내용과 관련된 중국 수학은 [3, pp. 206-207, pp. 239-240, pp. 248-254]에서 찾아 볼 수 있다.

이번 절에서 다루는 모든 문제에서는 일반적인 과정이나 원리에 대한 설명은 없고, 답을 구하는 계산 과정만 제시되어 있다. 이런 계산 과정으로부터 일반적인 과정과 문제 상황을 추측했다.

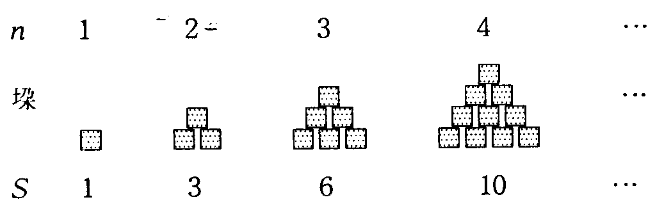
• 지금 평첨초가 한 더미 있는데, 각 면의 아랫줄에 52퇴 있다. 모두 몇 퇴인가? (今有平尖草一垜 每面底脚五十二堆 問積幾何)

이 문제의 해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

해법: $\dfrac{52\times(52+1)}{2}=1378$(퇴), 별해: $52\times\left(\dfrac{52}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=1378$(퇴)

이것으로부터 평첨초 더미(垜)는 아래 그림과 같이 쌓여 있는 상황을 뜻하는 것으로 보인다. 그러므로 일반적으로 아랫줄에 평첨초가 n퇴 있을 때 평첨초 전체의 퇴수 S는 다음과 같다.

$$S=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$



• 지금 둥근 화살(圓箭)이 한 묶음 있는데, 바깥 둘레에 84척 있다. 모두 몇 척인가? (今有圓箭一束 外周八十四隻 問積幾何)

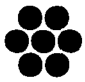
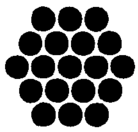
이 문제의 해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\text{해법: } \frac{84\times(84+6)}{12}+1=631(\text{척}),\qquad \text{별해: } \left(\frac{84}{2}+\frac{6}{2}\right)\times\frac{84}{6}+1=631(\text{척})$$

그러므로 둥근 화살의 묶음(束)은 바깥 둘레의 화살의 개수 n에 따라 다음 그림과 같이, 화살을 원형으로 꽂은 상태를 나타내는 것으로 보인다. 따라서 바깥 둘레에 화살이 n척 있다면(n은 6의 배수), 전체 화살의 척수 S는 다음과 같다.

$$S=1+\frac{n(n+6)}{12}+1=1+6\times\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{6}\cdot\left(\frac{n}{6}+1\right)\right\}$$

즉, S는 1부터 $n/6$까지의 자연수 전체의 합의 6배에 1을 더한 값과 같다.

n	0	6	12	…
束				…
S	1	7	19	…

• 지금 네모난 화살(方箭)이 한 묶음 있는데, 바깥 둘레에 68척 있다. 모두 몇 척인가? (今有方箭一束 外周六十八隻 問積幾何)

이 문제의 해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

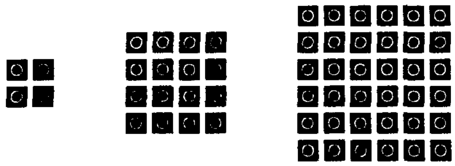
$$\text{해법: } \frac{(68+4)\times(68+4)}{4\times4}=324(\text{척}),\qquad \text{별해: } \left(\frac{68+4}{4}\right)^2=324(\text{척})$$

이는 바깥 둘레에 화살이 n척 있다면(n은 4의 홀수 배수), 전체 화살의 척수 S는 다음과 같음을 말하고 있다.

$$S=\left(\frac{n+4}{4}\right)^2=\left(\frac{n}{4}+1\right)^2=4\cdot\frac{1}{2}\,\frac{n+4}{8}\left(\frac{n}{4}+1\right)$$

즉, S는 1부터 $n/4$까지의 [$(n+4)/8$개의] 홀수 전체의 합과 같다. 그러므로 네모난 화살의 묶음(束)은 바깥 둘레의 화살의 개수 n에 따라 다음 그림과 같이, 화살을 정사각형 모양으로 꽂은 상태를 나타내는 것으로 보인다.

n	4	12	20	…
束				…
S	4	16	36	…



한편, 바깥 둘레에 화살이 n척 있다면(n은 4의 짝수 배수, 즉 8의 배수), 전체 화살의 척수 S는 다음과 같이 1부터 $n/8$까지의 자연수 전체의 합의 8배에 1을 더한 값이다.

$$S=\left(\frac{n+4}{4}\right)^2=\left(\frac{n}{4}+1\right)^2=\frac{n^2}{16}+\frac{n}{2}+1=8\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{8}\left(\frac{n}{8}+1\right)\right\}+1$$

• 지금 세모꼴 산가지가 한 묶음 있는데, 바깥 둘레에 90척 있다. 모두 몇 척인가? (今有三稜筭子一束 外周九十隻 問積幾何)

이 문제의 해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

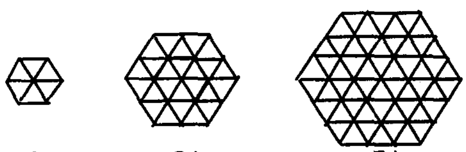
$$\text{해법: } \left(\frac{90+6}{12}\right)^2\times 6=384(\text{척}),\qquad \text{별해: } \frac{90+6}{2}\cdot\frac{90+6}{12}=384(\text{척})$$

이는 바깥 둘레에 산가지가 n척 있다면(n은 6의 홀수 배), 전체 산가지의 척수 S는 다음과 같음을 말하고 있다.

$$S=\left(\frac{n+6}{12}\right)^2\times 6=6\times\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{6}+1\right)\cdot\left(\frac{n}{6}+1\right)\right\}$$

즉, S는 1부터 $n/6$까지의 [½(n/6+1)개의] 홀수 전체의 합의 6배와 같다. 그러므로 세모꼴 산가지의 묶음(束)은 바깥 둘레의 산가지의 개수 n에 따라 다음과 같은 것으로 보인다.

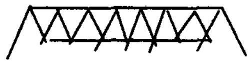
n	6	18	30	…
束				…
S	6	24	54	…



• 지금 세모꼴 산가지가 한 묶음 있는데, 6모 6면의 각 면에 7척씩 있다. 모두 몇 척인

가? (今有三稜筭子一束 六觚六面每面七隻 問積幾何)

풀이에는 다음과 같은 계산 과정만 있다.



$7^2 \times 6 = 294$(척)

산가지 묶음의 한 면에 7척의 산가지가 있는 경우는 위의 그림과 같이 그 면을 따른 바깥 둘레에 13척의 산가지가 있는 경우를 뜻하는 것으로 보인다. 그러므로 전체의 바깥 둘레에는 $13 \times 6 = 78$척의 산가지가 있고, 산가지 전체의 척수는 앞의 문제의 해법에 따라서 다음과 같다.

$$\left(\frac{78+6}{12}\right)^2 \times 6 = 7^2 \times 6(\text{척})$$

일반적으로, 각 면에 산가지가 n척씩 있다면, 전체 산가지의 척수 S는 다음과 같다.

$$S = \left(\frac{6\{n+(n-1)\}+6}{12}\right)^2 \times 6 = n^2 \times 6\,(\text{척})$$

• 지금 부병이 한 타 있는데, 너비를 따라 9개 있고 길이를 따라 14개 있다. 모두 몇 개인가? (今有缶瓶一垛 闊九箇長一十四箇 問積幾何)

해법의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left(\frac{14-9}{2} + \frac{1}{2} + 14\right) \times 9 \times (9+1) \times \frac{1}{3} = 510(\text{개})$$

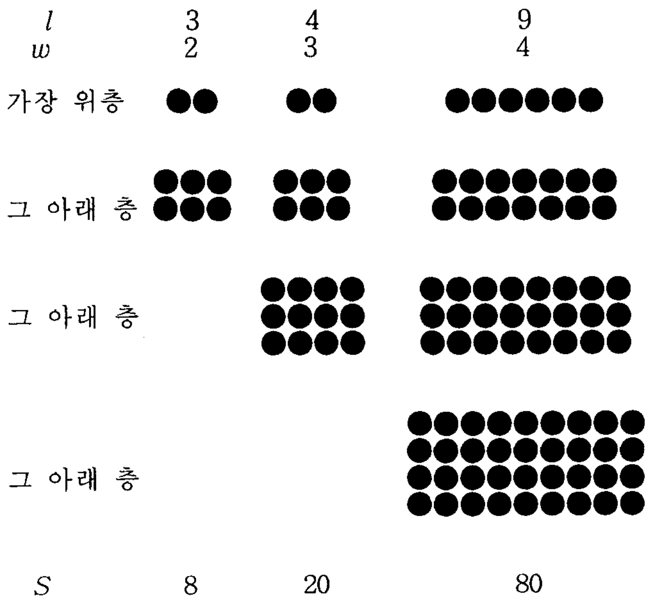
이는 부병이 너비를 따라 l개 있고 길이를 따라 w개 있을 때, 전체 부병의 개수 S가 다음과 같음을 말하고 있다.

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{l-w}{2} + \frac{1}{2} + l\right) \cdot w \cdot (w+1) \quad \cdots\cdots ③$$

저자 주에서 예시한 여러 가지 경우로부터 부병이 다음과 같이 층별로 쌓은 과일과 같이 배열된 것임을 확인할 수 있다. 이를 바탕으로, 일반적으로 부병이 너비를 따라 l개 있고 길이를 따라 w개 있을 때($l \geq w$), 전체 부병의 개수 S에 대한 공식 ③을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
S &= l \cdot w + (l-1)(w-1) + (l-2)(w-2) + \cdots + (l-w+2) \cdot 2 + (l-w+1) \cdot 1 \\
&= (l-w+w) \cdot w + (l-w+w-1)(w-1) + (l-w+w-2)(w-2) + \\
&\qquad \cdots + (l-w+2) \cdot 2 + (l-w+1) \cdot 1 \\
&= (l-w) \cdot w + (l-w)(w-1) + (l-w)(w-2) + \cdots + (l-w) \cdot 2 + (l-w) \cdot 1 \\
&\quad + w \cdot w + (w-1)(w-1) + (w-2)(w-2) + \cdots + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1
\end{aligned}$$

$$=(l-w)\cdot\{w+(w-1)+(w-2)+\cdots+2+1\}$$
$$+\{w^2+(w-1)^2+(w-2)^2+\cdots+2^2+1^2\}$$
$$=(l-w)\cdot\frac{w(w+1)}{2}+\frac{w(w+1)(2w+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{3(l-w)}{2}+\frac{2w+1}{2}\right\}w(w+1)=\frac{1}{3}\left(\frac{l-w}{2}+\frac{1}{2}+l\right)w(w+1)$$



한편, 저자 주의 끝에는 너비와 길이에 놓인 부병의 개수가 서로 같은 경우에 대해 언급하고 있다. 이런 경우, 즉 $l=w$인 경우에 위의 공식으로부터 다음을 알 수 있다.

$$S=\{w^2+(w-1)^2+(w-2)^2+\cdots+2^2+1^2\}=\frac{w(w+1)(2w+1)}{6}$$

이것은 마지막 문제에서 다룰 사각과와 관계 있다.

• 지금 삼각과가 한 타 있는데, 각 면의 아랫줄에 28개씩 있다. 모두 몇 개인가? (今有三角果一垜每面底脚二十八箇 問積幾何)

해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

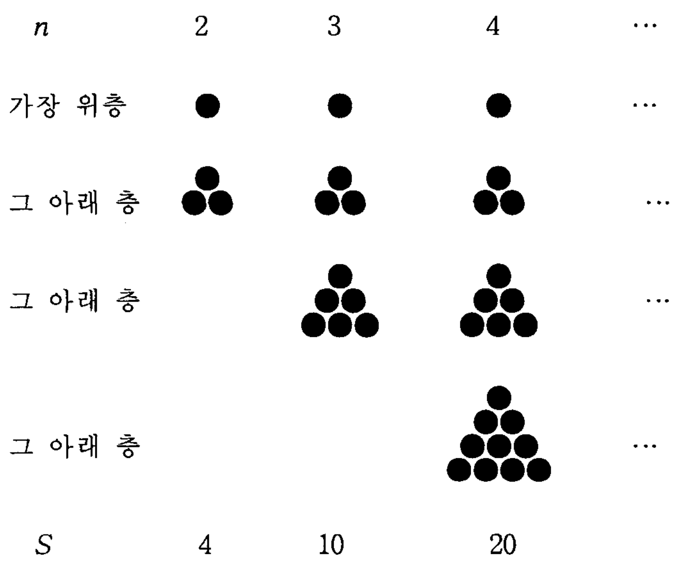
해법: $\frac{\{(28+3)\times 28+2\}\times 28}{6}=4060$(개), 별해: $\frac{(28+1)\times 28\times(28+2)}{6}=4060$(개)

풀이로부터 삼각과는 아래 그림과 같이 구를 각 층에 삼각형으로 배열하여 쌓은 형태로 볼 수 있다. 이에 따라 각 층에 있는 구의 개수는 삼각수를 이루며, 각 면의 아랫줄에 n개씩

있는 삼각과의 전체 개수 S가 다음과 같음을 말하고 있다.

$$S=1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\frac{n(n+1)}{6}\left(\frac{2n+1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



• 지금 사각과가 한 타 있는데, 각 면의 아랫줄에 28개씩 있다. 모두 몇 개인가?
今有四角果一垜 每面底脚二十八箇 問積幾何

해법과 별해의 계산 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

해법: $\left\{\left(28+\frac{3}{2}\right)\times 28+\frac{1}{2}\right\}\times 28\times\frac{1}{3}=7714$(개),

별해: $(28+1)\times 28\times\left(28+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=7714$(개)

저자 주에서 예시한 여러 가지 경우로부터 사각과는 부병 더미의 특수한 경우로, 삼각과와 같이 층별로 구를 쌓되, 정사각형으로 배열된 것임을 알 수 있다. 일반적으로, 각 면의 아랫줄에 n개씩 있는 사각과의 전체 개수 S는 다음과 같이 처음 n개의 완전 제곱수의 합이므로, 다음이 성립한다.

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. 맺음말

묵사에는 수열과 관련된 문제가 많이 있는데, 수열의 구조를 명확하게 이해해서 이를 풀이에 이용하고 있음을 보여준다. 대다수의 문제에 적용된 해법은 '분율'을 이용하는 것이다. 이것은 항의 개수와 모든 항이 합 및 각 항 사이의 관계가 주어졌을 때 각 항의 값을 구하는 경우에 적용할 수 있다. 주어진 항 사이의 관계로부터 각 항에 적절한 분율을 할당하고, 이런 분율의 합에 대한 모든 항의 합의 비가 구하려는 항의 분율에 대한 구하려는 항의 비와 같다는 사실로부터 원하는 항의 값을 구하게 된다.

이 방법은 분율을 수열의 특성에 따라 적절하게 정하면 충분하기 때문에, 등차 수열과 등비 수열은 물론 임의의 수열에 모두 적용할 수 있는 간편한 방법이다. 그러므로 수열의 도입 단계에서 등차 수열과 등비 수열을 포함해서 규칙이 정해진 수열의 개념을 파악하고 각 항의 값을 구하는 간편한 방법으로 이용할 수 있을 것이다. 또, 분율에서 미지수의 개념을 자연스럽게 도입할 수 있는 장점도 있다. 다만, 모든 분율을 정수로 정하기 위해서는 항의 개수가 적은 경우에도 큰 수를 써야할 경우가 많고, 이에 따라 항의 개수가 커지면 이 방법을 적용하기가 더욱 어려워진다는 문제점이 있다.

한편, 분율을 이용하지 않는 대나무와 관련된 문제는 등차 수열의 구조를 파악하는 데 활용할 수 있는 적절한 소재로 보인다. 또, 쌓기 문제는 특수한 수치적인 예로 이루어졌지만 일반화할 수 있는 좋은 소재로 생각된다.

참고 문헌

1. 경선징 저/유인영 · 허민 역, **묵사집산법**, 한국수학사학회, 발간 예정.
2. 김용운 편, **韓國科學技術史資料大系**, 數學篇 一卷, 驪江出版社, 1985
3. 김용운 · 김용국, **중국수학사**, 대우학술총서 · 자연과학 109, 민음사, 1996.
4. 김용운 · 김용국, **한국수학사**, 열화당, 1982.
5. 이상혁 저/호문룡 역, **차근방몽구**, 한국수학사학회, 발간 예정.
6. 이창구, "조선시대의 산학서에 관하여," **한국수학사학회지** 제11권 제1호(1998), 1-9.
7. 차종천 역, **구장산술 · 주비산경**, 범양사, 2000.
8. 호문룡, "선류에 대한 고찰," **한국수학사학회지** 제13권 제1호(2000), 15-26.
9. 홍정하 저/강신원 · 장혜원 역, **구일집**, 한국수학사학회, 발간 예정.