*KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 1-14*

# 朝鮮 算學者 李尙赫의 方程式論

서강대학교 수학과 **홍성사**
숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

心齋 韓泰東 박사님의 80회 생신을 축하드리며 헌정합니다.

## Abstract

Iksan(翼算) written by Lee Sang Hyuk(李相赫, 1810~?) is unique among mathematical books published in Chosun Dynasty since it is the only book which accomplishes the conceptualization of theory of equations if not that of mathematics itself. We investigate its process by his other publications and mathematical interaction with Nam Byung Gil(南秉吉, 1820~1869).

## 0. 서론

조선시대의 수학의 연구 결과가 서적 형태로 출판된 것은 한국과학기술사 자료대계 수학편([15])의 9권으로 이들이 모두 수집, 정리되어 현재 학계에서 이용되고 있다. 실제로 자료대계 수학편은 모두 10권인데 제10권은 籌學入格案, 籌學先生案, 籌學八世譜의 세 책을 모아서 정리한 것으로 이는 산학 시험에 합격한 사람들, 즉 산학자들에 대한 정보를 얻을 수 있는 중요한 자료가 된다. 물론 이들 이외에 중인이 아닌 양반 계급으로 정규적인 과거를 통한 관리들 중에도 중요한 산학자들이 있다. 예를 들면 九數略을 저술한 崔錫鼎(1646~1725), 籌書管見(1718)의 저자 趙泰耉(1660~1723)는 모두 영의정까지 지낸 인물들이고, 또 算學入門과 算學本源을 21, 22권으로 포함하고 있는 理藪新編의 저자 黃胤錫(1729~1791), 籌解需用을 외편으로 포함하고 있는 湛軒書의 저자 洪大容(1731~1783), 書計瑣錄의 저자 裵相說(1759~1789), 算學拾遺(1869)의 저자 趙羲純 등은 주학 입격과 상관없는 유명한 당대의 유학자들로서 산학을 함께 연구한 사람들이다. 뒤에 더 자세히 논하겠지만 우리의 연구 대상인 李尙赫(1810~?, 字 志叟)의 산학에 중요한 영향을 준 南秉哲(1817~1863), 南秉吉(=南相吉, 1820~1869)은 판서까지 지낸 학자들이었다.

---

※ 2000 Mathematics Subject Classification - 01A13, 01A25, 01A55, 12-03

자료대계 수학편에 실린 주학입격자는 默思集算法([7])의 저자 慶善徵(=慶善行, 1616~?), 九一集([18])의 저자 洪正夏(1684~?), 借根方蒙求(1854)([11]), 算術管見(1855), 翼算(1868)([12])의 저자인 이상혁 세 사람이다.

유리수의 연산에서 벗어나 대수학의 가장 중요한 대상인 방정식 이론을 제대로 취급하려면 다항식의 표현이 우선되어야 하는데 중국 수학의 가장 큰 업적중의 하나인 천원술은 다항식의 표현과 연산을 동시에 해결해 주는 도구이다. 조립제법을 이용하는 증승개방법을 도입하여 다항방정식의 근사해를 구한다. 한편 천원술을 확장하여 4원 이하의 다원 고차방정식을 위하여 주세걸은 그의 저서 四元玉鑑(1303)에서 사원술을 도입하여 다원 고차방정식을 일원 방정식으로 유도하여 풀어내고 있음은 잘 알려진 사실이다([3], [5], [6], [9]).

조선 산학서 중에 산대를 써서 다항식을 나타내는 천원술을 사용한 책은 18세기의 홍정하의 구일집, 황윤석의 산학본원, 남병길의 無異解(1855)와 算學正義(1867), 이상혁의 익산(1868), 조희순의 산학습유이다. 또 秦九昭(1127~1279)의 數書九章(1247)([4]), 李冶(=李治, 1192~1279)의 測圓海鏡(1248), 益古演段(1259)은 모두 산대를 쓰는 천원술을 도입하고 있다. 그러나 측원해경의 해설서로 남병철이 저술한 海鏡細草解(1861)는 문장으로 표현하는 천원술만 사용하고 있다. 측원해경과 익고연단의 해설서인 남병길의 緝古演段에는 뒤에 설명하는 수리정온의 차근방법을 사용하고 있다. 또 그의 測量圖解의 數書九章 測望類 부분은 수서구장의 기하 부분을 다룬 제7권, 8권의 문제를 취급하고 그중 제8권의 古池推圓만 제16권의 望知敵衆으로 대치하여 해설하였는데 산대표시 부분을 생략하고 있다.

조선시대 산학에서 가장 많이 인용되는 산학서는 주세걸의 算學啓蒙(1299)이다. 산학계몽(1299)과 사원옥감(1303)은 모두 명대에 중국에서 유실되었다. 산학계몽은 조선에서 1660년에 출판된 책을 羅士琳(1784~1853)이 찾아내어 1839년에 細草를 달아 출판하고, 또 사원옥감은 1822년 나사림이 재발견하여 세초를 달아 1829년에 초본을 완성하고, 1835년에 출판된다.

산학계몽과 사원옥감은 단지 4년 차이로 중국에서 출판되었는데 산학계몽은 조선 산학의 기본 서적인 반면에 사원옥감의 사원술은 남병길의 산학정의에 처음 나타나는 것이 매우 이상한 현상이다. 연대로 보아 나사림의 사원옥감세초가 들어와 남병길과 이상혁에 의하여 조선에 전파되고 또 이는 조희순의 산학습유에도 나타나는 것을 보아 이 때부터 다항방정식의 연구가 보다 깊이 연구되었음을 알 수 있다. 따라서 조선의 방정식 이론은 사원술의 도입 이전과 이후로 크게 나누어 연구되어야 하고 이때 중요한 역할을 한 산학자가 이상혁과 남병길 두 사람이다.

우리가 이상혁을 선택한 이유는 그가 계속되는 접촉을 통하여 남병길에게 영향을 주었고 또 그의 저서 익산에서 조선 산학에서 최초로 시도된 개념화를 이루므로 산학이 수학으로 발전하였기 때문이다. 구장산술([2], [8], [16])이래 "今有 …"를 통하여 같은 종류의 문제를 되풀이하여 풀고 이에 대한 註를 통하여 이론적인 배경을 설명하는 것으로 진행되어 왔는데

익산은 완전히 이 형태를 벗어난 서적이다. 따라서 그의 익산을 시점으로 조선 산학의 수학화가 이루어졌다고 할 수 있다. 이 논문에서 우리는 이상혁의 방정식론을 통한 개념화의 과정을 조사하는 것을 목적으로 한다.

사료는 가능한 대로 일차 사료를 사용하고 조선 산학은 위의 자료대계를, 중국 산학은 中國歷代算學集成([14])을 참고하고, 이차 사료로는 [3], [5], [6], [9] [13]을 이용한다.

## 1. 이상혁의 수학적 배경

이상혁은 조선시대의 중인 산학자들의 특징을 모두 갖추고 있다. 경선징과 홍정하와 같이 그는 누대에 걸쳐서 주학 입격자를 낸 합천 이씨 중의 한 사람이다. 아래의 가계도에서 보는 바와 같이 그의 8대조부터 7대, 6대조 두 사람의 역과 관리를 빼고는 대대로 모두 산학자를 배출한 집안의 사람으로 그의 사촌 7명과 동생을 포함하여 같은 대에 모두 9명의 합격자를 낸 집안에 속해 있다. 아래의 표는 생년, 주학 시험에 합격한 해, 직위, 또 처가로 장인의 직업과 이름까지 차례로 포함한다.

迪 (1582, 1607, 計士, 計士 蔣慄(1562 ~ )) --- 化龍 (譯科 嘉善)
--- 仁楷 (譯科 資憲) ⇒
震楷 (1627, 1654, 計士, 籌別提 林義善)
--- 九萬 (1650, 167?, , )

仁楷 --- 英顯 (1669, 1704, 計士, 籌職 嘉善, 籌別提 洪始源 (1649 ~ ))
--- 泰胤 (1688, 1716, 籌訓導, 籌職崇政, 嘉善, 資憲, 正憲, 籌訓導 李克俊) ⇒
世胤 (1692, 1720, 計士, 武科察訪 皮五采, 計士 李東桓)
鳳胤 (1709, 1734, 別提, 籌訓導 李文行) ⇒

泰胤 --- 鼎祥 (1721, 1742, 別提, 籌別提 崔禧大) ⇒
鼎祐 (1724, 1742, 敎授, 同樞 金益亮, 籌敎授 韓益賢) ⇒

鼎祥 --- 晩求 (1748, 1783, 計士, 進士 籌敎授 崔復大)
--- 秉倫 (1765, 1784, 訓導, 內醫正 玄啓祚, 引儀典獄主簿 崔璹) ⇒
秉德 (1772, 1792, 別提, 籌敎授 崔孝閔) ⇒
秉喆 (1782, 1799, 計士, 計士 洪履祿, 醫科正 卞重觀) ⇒

秉倫 --- 宗爀 (1795, 1812, 訓導, 計士 內醫正 玄禹瑞, 籌別提 金民敎) ⇒
秉德 --- 日爀 (1790, 1808, 別提, 內醫 郡守 同樞 康晉三, 醫科僉正 李重晉) ⇒
重爀 (1791, 1809, 計士, 議藥同參 縣監 通政 安載述) ⇒
晉爀 (1796, 1814, 訓導, 計士 醫科正 韓應圭) ⇒
奎爀 (1799, 1817, 計士, 內醫知樞 崔源) ⇒
文爀 (1804, 1825, 訓導, 計士 李鎭九) ⇒
著爀 (1809, 1825, 計士 雲科正, 籌敎授 李圭星, 韓興奎)
秉喆 --- **尙爀** (1810, 1832, 別提, 雲科正 韓應誠, 譯前御 韓範五)
--- 時用 (1840, 1871, 計士 雲科正, 籌入格 崔錫璜, 籌入格 內鍼醫 金光設)
雋爀 (1814, 1835, 訓導, 醫科正 僉正 卞鍾徽, 譯前御 韓範五, 別提 李垙容)
--- 時珍 (1857, 1871, 計士, 譯等第 秦喜鵬)
宗爀 --- 時泳 (1818, 1832, 別提, 計士 李浩直)
--- 應鎬 (1845, 1859, 計士, 計士 李堯善, 籌別提 金憲浚)
--- 淳容 (1877, 1884, 計士, 籌別提 進士 李容琳)
時泓 (1826, 1837, 計士, 籌別提 醫科 李鎭宇)
--- 庠鎬 (1860, 1868, 計士, 譯科訓導 秦喜鴻)
--- 淳榮 (1882, 1888, , )
時漢 (1838, 1855, 計士, 籌別提 李鍾協)
--- 俊鎬 (1857, 1873, , 籌入格 慶致淳)
奭鎬 (1870, 1884, , 譯科僉正 朴愼榮)
時漣 (1842, 1856, , 籌別提 洪永錫)
--- 競鎬 (1861, 1884, 計士, 譯前御 崔奎大)
時濂 (1843, 1859, 計士, 雲科正 金溟, 計士 韓得周)
日爀 --- 時昌 (1832, 1871, 計士, 譯生徒 洪禹錫)
重爀 --- 時賓 (惠直長) --- 泳鎬 (1851, 1871, 武科 律學 敎授 玄應善)
晉爀 --- 時慶 (1823, 1835, 別提, 籌別提 金民敎, 譯直長 洪起祖)
--- 正鎬 (1857, 1871, , 計士 譯科 主簿 尹郃楨)
奎爀 --- 時薰 (醫科僉正)
--- 明鎬 (1857, 1882, 引儀, )
文爀 --- 時庠 (1833, 1848, 計士, 內醫僉樞 李宜慶)
--- 經鎬 (1859, 1871, , 計士 李海殷)
康鎬 (1870, 1888, , )
寧鎬 (1873, 1886, , )

鼎祐 --- 命求 (1743, 1783, 計士 雲科察訪, 計士 崔應祥, 計士 李世煥)

--- 秉學 (1772, 1792, 別提, 籌敎授 內贍主簿 崔孝閔) ⇒
秉懋 (1778, 1795, 計士, 引儀 玄啓寅)

秉學 --- 基赫 (1810, 1824, 敎授, 籌別提 李圭設)
--- 時聖 (1827, 1839, 別提, 計士 崔兢在, 籌入格 韓宜昌)
--- 建鎬 (1854, 1867, 計士, 籌敎授 李海斗)

鳳胤 --- 鼎祿 (1741, 1766, 訓導, 計士 吳壽豊, 內醫僉樞 李善恒) ⇒
鼎祺 (1744, 1766, 計士, 籌別提 李英憲, 籌別提 崔應福) ⇒

鼎祿 --- 景求 (1770, 1790, 計士, 內醫僉樞 安世淵, 醫直長 吳載淵)
--- 秉直 (1803, 1829, 計士, 籌訓導 金宗晉)
--- 昌爀 (1826, 1847, , 醫奉事 玄光五)
--- 時恒 (1848, 1871, , )
萬爀 (1832, 1848, 計士, 雲科同樞 金柔)
韶爀 (1835, 1855, , )

鼎祺 --- 範求 (1778, 1796, 別提, 金淑, 計士 金宗顯)
--- 秉旭 (1813, 1829, 別提, 掌儀 吳慶億)
--- 承爀 (1836, 1859, 計士, 醫科正, 引儀察訪 趙鼎錫, 譯科正 李鎭恒)
--- 時瀅 (1866, 1876, , )
秉默 (1824, 1844, 計士, )

위의 가계도에서 빈칸은 자료에 나타나 있지 않은 경우이고, 단지 九萬의 입격한 해는 주학입격안에 康熙 연호만 나오고 정확한 연도는 나와 있지 않은데 주학선생안에 나와 있는 주위 인물들의 연도를 비교하여 1670년대에 합격한 것으로 추정할 수 있다. 직위에 대하여는 崇政大夫가 종1품, 資憲大夫가 정2품, 嘉善大夫가 종2품, 別提가 정, 종6품, 주학교수, 인의, 찰방이 종6품, 직장이 종7품, 가장 많은 계사와 봉사가 종8품, 주학훈도가 정9품, 훈도가 종9품이다. 부인이 두 사람인 경우 차례로 그 아버지에 대한 정보를 포함하였다. 또 기호 ⇒는 그 아래 생년을 쓰지 않고 다시 써서 이어 진다는 것을 나타낸다.

주학입격안에 나와 있는 합천 이씨는 모두 위의 가계도에 나와 있다. 이적(1582~?)이 1607년 합격한 후 마지막 이순영(1882 ~ ?)이 1888년 합격할 때까지 12대에 걸쳐 모두 64명의 합격자를 낸 집안에 이상혁은 속해 있다. 이와 같은 현상은 묵사집산법의 저자 경선징과 구일집의 저자 홍정하의 가계에도 나타난다. 경선징은 그의 아버지 慶禕(1567~?, 1593년 입격)부터 10대, 홍정하는 그의 할아버지 洪敍疇(1628~?, 1646년 입격)와 큰할아버지 洪敍九(1609~?, 1632년 입격)부터 9대에 걸쳐 입격자를 내고 있다. 실제로 이적, 경위, 홍서구, 홍서주는 모두 산학자 장울, 李壽慶, 張後綱, 李弘達의 사위이므로 그들의 산학자 집안의 전통은 더 올라가게 된다. 경선징의 집안으로 입격자는 경위부터 慶必永(1871~?, 1882년 입격)까지 모두 15명이 합격하였고 그의 삼형제와 또 그의 아들 삼형제도 모두 입격하였다.

또 홍정하의 집안은 홍서구부터 1888년에 합격한 洪泰翼(1871~?), 洪宜敬(1874~?), 洪宜敏(1877~?)까지 모두 97명의 입격자를 내고 있고, 홍정하도 그의 오형제와 사촌 두명이 함께 주학 시험에 입격하였다. 또 그들의 처가까지 포함하면 엄청난 숫자의 산학자들이 집중적으로 혈연으로 연결되어 있음을 알 수 있다.

실제로 李英顯은 홍정하의 큰아버지 洪始源의 사위이고, 이상혁의 아버지 이병철은 홍정하의 조카 洪履祿(1749~?, 1777년 입격)의 사위이다. 그러나 이상혁과 그의 동생 준혁은 변중관의 딸의 자식들이다. 따라서 이상혁은 틀림없이 홍정하의 집안에 내려오는 산학서도 접할 수 있었을 것으로 보인다. 이와 같이 주학 입격자들은 모두 그 당시 산학에 대한 자료를 독점할 수 있었기 때문에 대를 이어 합격자를 배출하게 되고 또 학문적인 연속성을 이어나갈 수 있었을 것으로 보인다. 한편 이런 현상은 동양의 학문적 전통 중시 사상과 함께 산학도 모두 구장산술에 원류를 두고 그곳에 의지하여 설명하려는 전통과 연고자 중심으로 이어지는 풍토가 새로운 학문에 대한 발전을 저해하는 요소로 작용하였을 것이다.

이상혁이 산학자 집안에서 자란 사실과 함께 그의 산학에 중요한 영향을 끼친 것은 남병길과의 만남이다. 남병길은 이상혁의 저서 산술관견(1855), 익산(1868)에 서문을 쓰고 두 곳다 "余友李君志叟"라는 문구를 쓰고 있다. 또 그의 저서 구고술요도해, 집고연단의 서문에 "李君志叟"가 나타나고, 또 그의 산학 저술 중 가장 중요한 서적인 산학정의(1867)의 서문에서는 "余於養痾之餘采輯諸書 李君志叟釐正編修彙成一書曰算學正義 發凡起例條分類析 庶使後學開卷一覽易曉古人立法之意焉" 즉 "내가 병을 요양하는 사이에 여러 책을 모아 편집을 하는데 이지수가 이를 바로 잡고 또 편집하여 책을 만들어 산학정의라 하였다. 정의와 정리를 먼저 들어낸 후 예를 들어 이를 조리 있게 분석한 것이므로 후학들이 이 책을 한번 보게 하여 옛 사람들이 세운 뜻을 쉽게 알 수 있기를 바란다."고 하고 있다. 남병길의 저서는 출판연대가 확실한 것은 무이해(1855), 측량도해(1858), 산학정의(1867)이나, 그의 집고연단은 이상혁의 차근방몽구(1854)를 언급하고 있으므로 1854년 이후에 출판되었을 것이고, 측량도해는 劉徽의 海島算經의 해설서이므로 그의 구장산술의 해설서인 九章術解와 구고술요도해는 1858년 이전에 출판하였을 것으로 보인다. 집고연단이 익고연단의 해설서이고 무이해가 측원해경과 익고연단에 대한 李銳(1768~1817)의 세초에 대하여 쓴 책이므로 집고연단과 무이해가 거의 동시대에 연구되었을 것으로 보인다. 구장술해와 측량도해보다 집고연단과 무이해를 먼저 출판하게 되었는데 이는 이상혁의 차근방몽구, 즉 다항방정식의 이론에 대한 연구에 영향을 받았을 것으로 추정할 수 있다.

측원해경(1248), 익고연단(1259)의 출판 연도와 산학계몽(1299)과 사원옥감(1303)의 출판연도의 차이는 50년 정도밖에 되지 않지만 앞의 책들은 명대에도 계속 출판되었고[9], 주세걸의 책은 그렇지 못하여 명대에 완전히 잊혀지게 되었다. 한편 측원해경세초에 대하여 남병길의 형 남병철이 해경세초해(1861)를 출판한다. 따라서, 이상혁과 남병길 형제의 수학적 교류는 적어도 1854년 이전부터 그들이 죽을 때까지 계속되었을 것으로 보인다. 또 남병길은 양반 출신으로 예조판서까지 지내어 그 당시 중국의 "諸書"를 쉽게 구할 수 있고 이를 이상혁과 같이 공유하였을 가능성은 매우 크다. 다음절에서 자세히 논하겠지만 이상혁은 그

의 모든 저서에서 그 당시에 출판된 청나라의 산학서를 연구한 것을 알 수 있고 또 전술한 대로 나사림의 사원옥감세초를 남병길과 함께 연구한 것으로 보인다. 왜냐하면 남병길의 산학정의의 多元절과 이상혁의 익산에 사원옥감의 같은 문제가 동시에 나타나고 있는 것을 확인할 수 있기 때문이다.

서양수학이 명의 말기와 청의 초기에 엄청난 영향을 끼친 것은 틀림없지만 한편 중국 자체에서 생산된 우수한 수학이 잊혀지다가 18, 19세기에 다시 송, 원대 수학에 대한 인식이 새롭게 되어 명대에 잊혀졌던 수학을 재정리한 것을 남병길 형제와 함께 이상혁이 조선에 다시 들여놓고 이를 발전시키게 된다. 그의 익산이 출판된 다음 해에 남병길이 서문을 쓰고 출판된 조희순의 산학습유에도 다원방정식에 대한 이론이 나타나는 것으로 보아 이들이 조선 산학에 끼친 영향을 짐작할 수 있다.

## 2. 이상혁의 방정식론

이상혁이 1832년에 주학시험에 합격한 후 1854년 차근방몽구를 출판할 때까지의 활동에 대한 자료는 없다. 1854년 이상혁의 차근방몽구, 1855년 남병길의 무이해, 그후 집고연단, 1855년 이상혁의 산술관견에서 모두 梅毅成(1681~1763)의 赤水遺珍(1761)을 들고 있다. 이 책은 그의 할아버지 梅文鼎(1633~1721)의 연구결과를 매각성이 정리하여 梅氏叢書輯要로 출판하면서 부록으로 적수유진과 操만卮言 두 권을 저술하여 출판하였다. 매문정은 27세에 수학을 연구하기 시작하여 그 당시 서양의 수학이 중국에 전래된 후 "中西會通", 즉 중국수학과 서양수학을 동시에 연구하여 많은 저술을 남기게 된다. 또 청의 2대 황제 康熙(1655~1722)가 陳厚耀(1648~1722), 何國琮(?~1766), 매각성, 明安圖(1692~1764) 등에게 명하여 律曆淵源(1723)을 편찬하는데 이중에 數理精蘊이 들어 있고 이는 그 당시 서양의 수학과 중국의 초등수학을 망라하는 것은 잘 알려져 있는데 이 때 매문정의 연구가 상당한 영향을 준 것으로 되어 있다([3], [9]). 그러나 매문정이 송, 원대의 수학을 연구하지 못하였으므로 중서회통에서 중국의 초등수학에 머무르게 되고, 또 수리정온도 대수학 분야는 송, 원대의 방정식론에 미치지 못하고 있다.

수리정온에서 취급한 방정식론은 차근방술, 즉 미지수를 根이라 하여 이들의 제곱, 세제곱, 네제곱, … 등을 평방, 입방, 삼승방, … 등으로 나타내어 다항식을 표시하고 이를 푸는 방법이다. 즉 현재의 $ax^3$, $bx^2$, $cx$, $d$ ( $a$, $b$, $c$, $d$는 실수)를 각각 " $a$입방" " $b$평방" " $c$근" "진수 $d$"로 나타내고 이들의 합을 계수가 양인 경우는 "多", 음인 경우는 "少"로 나타내는 방법이다. 예를 들면 "一立方 少三平方 多二根 與一萬二千四百四十尺等"은 다음과 같이 나타내는 방법이다.

$$x^3-3x^2+2x=12440$$

실제로 수리정온에서는 덧셈 기호는 "⊥"로 뺄셈 기호는 "−", 등호는 "="로 쓰고 위의 예를 "一立方 − 三平方 ⊥ 二根 = 一萬二千四百四十"으로 나타내었는데[3], 이 방법은 조선 산학자들에게 전혀 이용되지 않고 "多少" 표현법만 사용하고 있는 것은 매우 이례적이다. 수리정온 이전의 중국의 다항식 표현법은 [17]을 참고한다.

다시 매각성의 적수유진으로 돌아가자. 강희 다음에 雍正(1678~1735)이 1723년 황제가 되면서부터 청은 다시 쇄국정책을 쓰게 되어 서양수학의 번역이 더 이상 진행되지 않고 청의 수학은 새로운 국면을 맞게 되고 중국 자생의 수학에 대한 관심을 가지게 되는데 이 때 송, 원대의 수학에 대한 연구가 재개된다. 이 때 전술한대로 이야의 측원해경과 익고연단은 명대에도 계속해서 출판되고, 특히 顧應祥(1483~1565)이 測圓海鏡分類釋術(1550)을 출판하였는데 그는 천원술을 제대로 이해 못하여 원본의 모든 세초를 다 버리는 우를 범하고 이는 그대로 청대에도 계속하여 출판되어 천원술을 잊어버리게 하였다. 이 사실을 매각성은 적수유진의 서문에 지적하면서 차근방술과 천원술은 완전히 일치한다는 사실을 밝히고 있다. 천원술과 차근방에 대한 서문은 다음과 같다. 이 문장은 이상혁과 남병길의 여러 책에 일부가 인용되고 또 익산에는 전문이 인용되고 있다.

嘗讀授時麻草 求弦矢之法 先立天元一爲矢 而元學士李冶所著測圓海鏡亦用天元一立算
傳寫魯魚 算式訛舛 殊不易讀 前明唐荊川 顧箬溪兩公 互相推重 自謂得此中三昧
荊川之說曰 藝士著書 往往以秘其機爲奇 所謂立天元一云爾 如積求之云爾 漫不省其爲何語
而箬溪則言 細考測圓海鏡 如求城徑 卽以二百四十爲天元 半徑卽以一百二十爲天元
旣知其數 何用算爲似不必立可也 二公之言如此 余於顧說 頗不謂然 而無以解也
後供奉內廷 蒙聖祖仁皇帝 授以借根方法 且諭曰 西洋人名此書爲阿爾熱八達
譯言東來法也 敬受而讀之 其法神妙 誠算法之指南 而竊疑天元一之術頗與相似
復取授時麻草觀之 乃渙如氷釋 殆名異而實同 非徒曰似之已也
夫元時學士著書 臺官治麻 莫非此物 不知何故遂失其傳
猶幸遠人慕化 復得故物 東來之名 彼尙不能忘所自 而明人獨視爲贅疣而欲棄之
噫 好學深思如唐顧二公 猶不能知其意 而淺見寡聞者 又何足道哉 何足道哉

당형천은 唐順之(1507~1560)의 호이다. 그의 자는 應德이고 句股等六論의 저서가 있다. 또 顧應祥(1483~1565)의 호가 箬溪道人이고 저서로는 측원해경분류석술 이외에 弧矢算術(1552), 句股算術(1533), 測圓算術(1533) 등이 있다.

매각성은 이들을 통렬히 비판하고 이때부터 송, 원대의 대수학이 다시 살아나게 된다. 명대의 측원해경분류석술은 조선산학에도 그 영향을 주었을 것으로 보이는데 그 이유는 위에서 언급한대로 천원술이 산학서에 나타나다가 사라지고 다시 나타나는 일을 계속하고 있기 때문이다. 적수유진이 서양 대수학보다 중국 대수학이 훨씬 우수함을 보이게 되어 이를 접한 이상혁과 남병길 형제가 천원술을 이용한 대수학을 연구하기 시작한 것으로 보인다.

이상혁은 먼저 차근방몽구(1854)에서 천원술과 차근방술이 같다는 사실과 적수유진의 내용을 소개하면서 수리정온의 차근방술을 "다소" 표현법을 써서 다시 설명하고 있다. 서문에

서 "暨得借根方法以算測圓益古授時厤艸等書 無不通釋吻合"이라 하여 측원해경, 익고연단과 王恂(1235~1282), 郭守敬(1231~1316) 등이 지은 수시력(1280) 모두에 천원술이 사용되고 있는데 이들을 언급은 하고 있지만 차근방몽구에는 전혀 천원술을 사용하고 있지 않다. 오히려 차근방술과 천원술이 같다는 것을 실제로 보여 준 책은 남병길의 무이해(1855)인데 그는 이 책의 모든 문제의 풀이에서 천원술과 차근방술을 나란히 나타내어 보여주고 있다.

1855년에 출판한 산술관견은 차근방몽구의 속편으로 볼 수 있다. 산술관견은 수리정온, 적수유진, 薛鳳祚(1599~1680)와 穆尼閣(=J.T. Smogulecki, 1611~1656)의 공저인 曆學會通(1652)에 들어 있는 天步眞原의 내용에 대한 해설서이다. 특히 적수유진에 들어 있는 杜德美(=P. Jartoux, 1668~1720)가 도입한 Gregory(1638~1675)의 $\pi$, sine 함수, versine 함수의 급수에 대한 해설은 무한 급수에 대한 조선의 최초의 접근으로 중요한 위치를 차지한다. 그러나 이때까지는 아직 자신이 설정한 이론이라기 보다는 서양 수학의 이해를 위하여 노력하고 있는 단계라고 볼 수 있다. 이후에 남병길과 남병철 형제는 무이해(1855), 집고연단, 구장술해, 구고술요도해, 측량도해, 해경세초(1861)를 출판하는데 이상혁은 이들과 함께 이들을 연구하였을 것으로 보인다.

1865년 남병길과 이상혁은 산학정의를 출판하는데 이는 이때까지 그들이 연구한 내용을 총망라하는 업적으로 그 내용은 다음과 같다.

算學正義는 모두 세 권으로 되어 있고 산학정의의 목차는 다음과 같다.

上篇 : 度量衡, 雜率, 加法, 減法, 乘法, 除法, 命分法, 約分法, 通分法, 開平方法, 帶縱平方法, 開立方法, 帶縱立方法, 諸乘方法, 句股率, 各面率, 各體率, 堆垛率

中篇 : 異乘同除, 同乘異除, 同乘同除, 按分遞折差分, 按數加減差分, 和數差分, 較數差分, 和較差分, 盈朒 , 雙套盈朒, 借徵, 方程

下篇 : 測量, 天元一, 多元, 大衍

상편은 수의 연산과 다항방정식 (개평방법, 개입방법은 각각 제곱근, 세제곱근을 구하는 법, 대종평방법, 대종입방법은 각각 일반 이차방정식, 삼차방정식의 풀이, 제승방법은 임의의 고차방정식의 풀이법을 뜻한다)과 기하 문제와 급수를 다루고, 중편은 일차방정식 및 연립일차방정식을 다루고 있다. 마지막으로 하편은 천원술과 고차연립방정식, 합동식을 다루고 있는데 이는 그 당시 수학 서적으로 다룰 수 있는 모든 주제를 다 포함하고 있음을 알 수 있다. 중국 수학에서 對數(=logarithm)는 중요한 위치를 차지하는데 대수와 삼각함수 부분만 포함되어 있지 않고 있다. 산학정의의 체제는 현재 수학서적과 매우 유사한데 이는 수리정온의 형태를 모방한 것으로 보인다. 먼저 정의나 정리에 해당하는 문장이 나오고 "今有" 형태의 예제를 통하여 이를 이해시키는 교과서 체제를 쓰고 있다. 예를 들면 고차방정식의 정의 부분은 다음과 같은데 차수와 차원에 대한 귀납적 정의가 흥미 있다. "平方爲面 立方爲體 過此以往數之所衍無形可稽 - 如三乘方卽立方之依邊數者 四乘方卽三乘方之依邊數層疊者 五乘方卽四乘方之依邊數層疊者而並無實形 - 其爲積也" 항상 적절한 이유를 들어 정의를 하고 또 분명하지 않다고 생각되는 부분에 대하여 작은 글자로 주를 달고 있다.

산학정의가 출판된 이듬해 이상혁의 가장 중요한 저서인 익산이 출판된다. 익산은 모두 126쪽으로 상편 正負論, 하편 堆垛說로 이루어진 비교적 짧은 서적이다. 하편은 급수론으로 이에 대한 자세한 내용은 다음으로 미루고 상편 정부론만 이 논문에서 다루기로 제한한다.

익산의 특징은 다음과 같다.

엄격한 정의와 체계적인 개념의 도입으로 통일성을 유지하려고 한다.
참고 문헌의 출처를 밝히고 있다.
증명 대신에 사용하고 있는 예제를 인용할 때 전체 문제를 들지 않고 필요한 문장만 인용하고 있다. 따라서 "今有" 형태의 문제가 전혀 포함되어 있지 않다.
방정식은 전통적인 $p(x)=c$ ( $c$는 실수) 형태가 아니고 $p(x)=0$ 형태로 제한하고 있다.
이차방정식과 삼차방정식을 계수의 부호를 통하여 분류하고 있다.
서양 수학에 대한 강력한 거부감을 나타내고 있다.

주제, 즉 정의와 정리를 먼저 들고 그에 대한 해설과 또 적절한 예를 들어 이를 부연 설명하는 체제를 사용하고 있는데, 이전의 산학서와 달리 다른 사람의 업적을 인용하는 경우에는 반드시 그 인용 출처를 들고 있다. 그 인용 빈도를 직접 인용과 간접 인용으로 나누어 차례로 적으면 다음과 같다. 구장산술 (4, 2), 沈括(1030~1094)의 몽계필담(1088) (1, 0), 수시력 (1, 0), 수서구장 (2, 0), 측원해경 (6, 0), 익고연단 (2, 0), 산학계몽 (1, 1), 사원옥감 (5, 1), 매문정의 방정론 (4, 1), 소광습유 (1, 0), 수리정온 (2, 0), 산학정의 (5, 5)인데 이들은 방정식론의 대표적인 중국 수학책을 모두 포함하고 있는 것을 보아 이상혁이 연구한 내용을 짐작하게 하고, 또 산학정의를 많이 인용하고 있는 것으로 보아 이상혁과 남병길의 공동 연구를 충분히 알 수 있게 된다. 실제로 사원옥감과 방정론의 문제가 산학정의에 포함되어 있어서 산학정의를 출처로 삼은 것도 있는 것으로 보아 산학정의에 대한 그의 신뢰를 읽을 수 있다. 한가지 언급할 것은 익산 5쪽에 인용된 사원옥감의 兩儀合轍 12問에 대한 것인데 이 문제는 직각삼각형의 넓이가 30, 직각을 낀 두 변의 합이 17일 때 두 변을 구하는 문제로, 사원옥감의 천원술을 사용하는 초를 인용하고, 나사림이 세초를 달면서 현재 사용하고 있는 두 근의 합과 곱을 알고 두 근을 구할 수 있다는 설명을 무시하고 있다. 원대의 사원옥감이 산학계몽과 함께 국내에 들어와 있을 가능성에 대한 의심을 하게 된다.

사원옥감, 측원해경 등의 예를 들어 설명할 때마다 마지막 결과만 들고 있어서 원본을 보지 않으면 이해를 할 수 없게 된다. 따라서 익산을 읽으려면 반드시 원본의 草와 함께 읽지 않으면 이해를 할 수 없을 정도이다. 한편 이는 "今有" 형태의 동일한 예제를 많이 풀고 나서 그 방법이 제공하는 이론을 도입하는 전통적인 산학에서 벗어나 개념화를 먼저 시도하고 있음을 알 수 있다.

사원옥감에서 그가 가장 즐겨 인용하는 이론은 다원 고차방정식에서 적절한 소거를 통하여 두 개의 미지수를 가지는 두 방정식 $A(x)y+B(x)=0$, $C(x)y+D(x)=0$을 얻어 $y$를 소거하는 방법으로 $A(x)D(x)-B(x)C(x)=0$을 사용하고 있다. 이는 천원술로 표현하여 나란히 늘어놓으면 $A\ B\ ;\ C\ D$ 형태가 되어 외2행의 곱에서 내2행의 곱을, 혹은 내2행의 곱에서 외2행의 곱을 빼서 x에 관한 방정식을 얻어내는 것이다. 현재 사용하는 열을 행이라 하고 열이라

는 단어는 없는 것에 주의하여야 한다.

정부론은 양수, 음수에 대한 이론을 뜻하지만 실제로 이는 위의 인용된 책들을 보면 알 수 있듯이 실제로 취급한 내용은 방정식론이다. 그러나 전통적인 기술 체제에서 벗어나지 못하면서도 연역적으로 기술하려고 하는 과정에서 이론적인 배경을 구장산술을 따르면 되는 것으로 하고 또 그 이론에 대한 증명을 중요한 산학서의 문제를 인용하는 것으로 대치하고 있는데, 이는 그가 논리적인 증명은 아직 다루지 못하고 있는 것을 보여 준다. 수리정온에 대한 언급은 여러 책에서 나타나고 있으나 조선 산학자들이 전통적으로 내려오는 기하적 대수학, 즉 간단한 도형을 이용하여 증명하는 논리에 머물러 있음을 알 수 있다. 익산에서도 방정식의 문제를 구장산술에서 처음 나타나는 음수와 양수의 연산법에 기초를 두고 설명하려고 하고 있기 때문에 여러 곳에서 제대로 설명이 되지 않는 곳이 나타난다.

사칙연산의 항을 법과 실로 나누어 계산하는데 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙이 성립하므로 이들에 대한 法과 實의 구분이 필요 없다는 사실을 밝히고 있지만, 한편 방정식에서 상수항을 실로 그 나머지 항을 법으로 사용하고 있어서 혼동을 일으키는 경우도 있다.

데카르트(Descartes, 1596~1650) 이전에 방정식은 $p(x)=c$( $c$는 실수)형태로 취급되다가 그가 처음으로 방정식을 $p(x)=0$의 형태로 변형하여 연구하기 시작한다[1]. 동양 수학에서는 방정식을 실제 현상을 나타내는 문제를 취급하고 있기 때문에 마지막 결과가 실수(=實)로 나타나는 것으로 되어 방정식의 형태는 전자를 주로 취급하고 있다. 따라서 다항방정식의 경우 미지수를 포함하고 있는 항의 부호는 엄격하게 다루고 있지만 실은 항상 양수로 되는 것으로 생각하여 그 부호에 대한 언급이 없는 경우가 대부분이다.

이상혁은 그의 방정식을 데카르트와 마찬가지로 $p(x)=0$의 형태로만 이해하고 있다. 이를 正負相當之式이라 하는데, 이는 남병길의 무이해 (1855)의 서문에 이미 나타나 있는 개념이다. "古立天元一術卽今之借根方法也 嘉慶間元和李銳算校測圓海鏡益古演段 其案云借根方出於立天元術 其加減乘除之法並同 惟此相消法與借根方兩邊加減卽有異 此設甚惑矣 蓋立天元術則相消後歸之一行而正負相當 借根方法則加減後仍分兩邊而彼此相等 此特殊一行與兩邊也 且彼此正負因主客而邊互相往來 方程篇所謂此正則彼負 彼正則此負是也 故分之爲彼此相等之兩邊則併之爲正負相當之一行也" 이 서문에서 천원술을 넓은 의미의 천원술, 즉 미지수를 천원으로 놓고 문제의 조건에 따라 다항식을 만들어 이에 연산을 하여 $p(x)=0$으로 만드는 과정을 뜻하는 것으로 보고 있고, 차근방법은 $p(x)=q(x)$ 형태를 유도하는 과정으로 보았다. 남병길은 $p(x)=q(x)$와 $p(x)-q(x)=0$이 같으므로 천원술과 차근방법이 다르지 않다 (= 無異)고 주장하였다. 그러나 이예의 차근방법은 알콰리즈미 (al-Khwarizimi)의 al-jabr (=阿爾熱八達)와 al-muqābalah의 의미, 즉 "兩邊加減" $A=B \Rightarrow A+C=B+C$와 $A+C=B+C \Rightarrow A=B$를 뜻하는 것으로 천원술과 차근방법을 다른 것으로 보고 있다. 엄격한 의미에서 이예의 주장이 맞고, 넓은 의미의 천원술로는 남병길의 주장도 일리가 있다.

이상혁은 익산에서 모든 방정식을 위의 정부상당으로 정리하고 있다. 방정식을 정부상당으로 보고 있다는 것은 그 방정식의 해만을 고려하고 있다는 뜻이고 또 그 당시는 양의 해만 생각하고 있기 때문에 오해도 많이 일어나고 있다. 따라서 일차방정식 $ax+b=0$에서 법 $a$와 실 $b$는 반드시 부호가 달라야 한다는 결론이 나오고 또 이를 강조하게 된다.

또 일차 연립방정식의 경우에도 각 방정식을 모두 일차식 $p(x)$에 대하여 $p(x)=0$으로 바꾸어 설명하고 있다. 현재 사용하고 있는 형태, 즉 구장산술 때부터 사용하던 계수행렬 $A$와 상수항의 열 $B$를 가지는 $AX=B$의 형태를 버리고 또 이때 얻어지는 확대계수행렬에 대한 Jordan-Gauss 소거법을 사용하는 것을 공격하고 있다. 특히 매문정의 방정론의 이론을 공격하고 있다. 지나친 통일성을 강조함으로 일어난 현상이다.

다원 고차방정식을 구성하고 또 소거하는 과정을 분류하여 서술하는데 현재 사용하고 있지 않는 것으로는 覶分이라는 항목이 있는데 이는 $A+B=0 \Rightarrow A^2-B^2=0$이 되는 것을 이용하는 것이다.

이차 방정식은 직사각형의 넓이와 두 변의 합 또는 차가 주어진 경우에 두 변을 구하는 문제로 시작하기 때문에 이들을 $-x^2-ax+b=0$, $x^2-ax-b=0$, $-x^2+ax-b=0$ $(0<a, b)$의 세 가지 경우로 분류하여 각각 교종, 감종, 화종으로 부르고 이 때 정부상당을 각각 실과 隅(=제곱항의 계수)와 從廉(=일차항의 계수)의 합, 우와 종염과 실의 합, 종염과 우와 실의 합을 통하여 설명하고 있다. 물론 이 경우도 양의 실근만 생각하고 있음을 알 수 있다. 삼차 방정식도 같은 방법으로 계수들 사이의 부호를 통하여 분류하고 정부상당을 설명하고 있다.

증승개방법을 이용하면서 생기는 益積, 翻積에 대하여 중국 산학에서는 별로 중요하게 취급되지 않은데 반하여 조선 산학에서는 계속하여 취급되고 익산에서도 이를 많이 취급하고 있다. 증승개방법을 간단히 설명하면 $n$차 다항방정식 $p(x)=0$에서 근의 초기 근사값(=初商) 을 $a$라 하면 $x-a$를 구하기 위하여 조립제법을 사용하든지 혹은 Taylor 급수

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

을 이용하여 방정식

$$\frac{p^n(a)}{n!}y^n+\cdots+\frac{p''(a)}{2!}y^2+p'(a)y+p(a)=0$$

의 해의 근사값(=次商)을 구하고 이를 반복 시행하는 것이다. 이 때 $p(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지인 $p(a)$를 조립제법을 써서 구하는 경우에 $p(a)$의 부호가 $p(x)$의 상수항의 부호와 달라지는 경우를 번적이라 하고 그렇지 않은 경우를 익적이라 한다. 아마도 차상을 구하기 위하여 나타나는 방정식의 상수항(=餘實)이 지금까지 다루던 방정식의 문제의 실과 부호가 달라지는 경우를 실생활과 결부한 문제로 설명하지 못하게 되는데서 생기는 오해인데 이는 일반화된 방정식의 이론을 형성하는데 어려움을 겪고 있음을 보여주는 단적인 예이다. 이상혁은 차근방몽구에서는 주어진 문제에 적합한 방정식을 세우는 일만 하였고 그 풀이에 대한 언급은 전혀 하지 않았는데 익산에서는 증승개방법을 자세히 소개하고 있고, 또 위의 초상을 구하고 차상을 구하는 방법으로 $p'(a)y+p(a)=0$을 통하여 차상을 추측하는 것을 매우 번거롭다고 하면서 차근방법을 공격하였다. $y=x-a$에서 $x-a=-\frac{p(a)}{p'(a)}$를 얻게 되는

데 이는 Newton의 방법이다. 이 때 도함수에 대한 이해는 물론 없었으므로 $p'(a)$를 얻는 것을 공식화하여 구하고 있는데 이를 중국에서 먼저 Newton의 방법이 나왔다고 주장하는데 ([9]), 아마도 많은 증승개방법을 사용하다가 $p'(a)$를 구하는 algorithm을 얻은 것으로 보는 것이 타당하다. 또 진구소가 그의 수서구장에서 증승개방법을 완벽하게 정리하였는데 이 때 마지막 근사값을 구하기 위한 식에서 $x^2$ 이상의 항을 모두 $x$로 바꾸어 근사값을 계산하고 있는 것에 주의하고, 또 차상을 추측하는데 $y=x-a$가 충분히 작은 경우이면 $y^2$ 이상의 항을 무시하여도 좋을 것이므로 위의 알고리듬을 얻은 것으로 보인다.

익산의 시작을 구장산술의 정부술에서 시작하고 마지막에 다시 방정식에 대한 역사로 간단하게 구장산술, 수서구장, 측원해경, 익고연단, 수시력, 사원옥감을 통하여 천원술이 형성되는 것을 기술하고 이를 통하여 정부상당식을 얻게 됨을 보이고 있다. 끝으로 천원술과 차근방법을 위의 예를 통하여 비교하고 있다.

## 3. 결론 및 감사의 글

19세기 조선의 사회는 실학이 융성한 영조(1724~1776), 정조(1776~1800) 시대가 끝나고 순조(1800~1834)의 시대부터 시작된다. 1801년 신유사옥, 헌종(1834~1849) 5년 기해사옥등과 안동 김씨, 풍양 조씨의 세도 정치가 이어지고, 또 학문적으로는 실학과 달리 학문의 종합적 정리에 대한 노력이 두드러진다. 丁若鏞(1762~1832), 徐有矩(1764~1845), 李圭景(1788~?), 金正喜(1786~1856), 金正浩(?~1867) 등이 두드러진 업적을 내고, 이때부터 중인, 서인 출신들의 학자들이 많은 업적을 내기 시작하여 후에 개화기로 이 전통이 이어지게 된다[10]. 천주교에 대한 박해는 순조와 철종(1849~1863) 시대에 비해 헌종대에는 매우 심하였다. 한편 고종(1863~1907)이 1863년 12세에 즉위하면서 대원군의 섭정이 시작되고 그는 쇄국정책을 펴기 시작한다.

이상혁은 철종대에 차근방몽구, 산술관견을 출판하고 13년 후인 1868년 익산을 출판하게 된다. 차근방몽구와 산술관견은 서양 수학에 대한 연구이지만, 익산을 저술할 때는 다시 서양 수학을 공격해야 하는 시기이고, 또 청에서도 산학계몽, 사원옥감이 재발견되어 이들에 대한 정보를 얻을 수 있어서 송, 원대의 수학에 대한 연구를 서양 수학에 대한 연구 경험을 바탕으로 진행할 수 있었다. 물론 남병길이라는 중요한 후원자가 있었지만 중인으로서 그 당시 수학을 충분히 정리 할 수 있는 훈련을 쌓은 다음 익산이라는 수학을 완성할 수 있게 된다.

엄격한 증명은 하지 못한 점, 체계적인 엄밀성을 너무 강조한 점, 방정식의 일반해에 대한 몰이해, 방정식의 해 자체에 집착한 점등으로 현대 수학에서 다루는 방정식론과는 거리가 있지만 익산은 그 당시 상황으로 개념화, 정의, 정리 등을 시도한 조선의 산학서가 아닌 최초의 수학연구서인 것은 틀림없다. 실제로 익산 이후에 현대 수학 책이 나오기까지 익산 정도의 이론적인 수학 책은 없는 것이나 마찬가지이므로 조선시대에 출판된 유일한 수학 서적이라고 할 수 있다.

저희들은 지난 40년 동안 心齋 韓泰東 박사님의 끊임없는 가르침을 받게 된 것을 큰 영광으로 생각합니다. 한태동 박사님은 지속적으로 저희들의 수학과 역사를 비롯한 학문 전반에 대하여 저희들의 우매한 눈을 조금이나마 뜰 수 있게 도와 주셨습니다. 또 사모님과 함께 두 분은 학문적인 부모님 역할과 인간적인 부모님 역할을 동시에 해 주셨습니다. 한박사님의 80회 생신을 축하드리며 다시 한번 감사의 말씀을 드립니다.

## 참고 문헌

1. Bashmakova, I.G. and G.S. Smirnova, *The Beginnings and Evolution of Algebra*, MAA, 2000.
2. Kangshen, S., J.N. Crossley and A.W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford Univ. Press, 1999.
3. Li, Y. and S. Du, *Chinese Mathematics, A concise history*, tr. J.N. Crossely and A. W.-C. Lun, Clarendon Press, 1987.
4. Libbrecht, U., *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, The MIT Press, 1973.
5. Martzloff, J.-C., *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.
6. Needham, J., *Science and Civilization in China*, Vol. 3, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. 慶善徵, **默思集算法**, 유인영 譯, 한국수학사학회, preprint.
8. 郭書春 滙校, **九章算術**, 遼寧教育出版社, 1990.
9. 吳文俊 主編, **中國數學史大系**, 第一卷 ~ 第八卷, 北京師範大學出版社, 1998.
10. 이기백, **韓國史新論**, 일조각, 1983.
11. 李相赫, **借根方蒙求**, 호문룡 역, 한국수학사학회, preprint.
12. 李相赫, **翼算**, 홍성사 역, 한국수학사학회, preprint.
13. 李信明, **中國數學五千年**, 臺灣書店印行, 1997.
14. **中國歷代算學集大成**, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
15. **韓國科學技術史資料大系**, 數學編, 1卷 - 10卷, 驪江出版社, 1985.
16. 홍성사 · 홍영희, "劉徽와 九章算術," **한국수학사학회지** 제11권 제1호(1998), 27-35.
17. 홍영희, "다항식의 대수적 표현," **한국수학사학회지** 제16권 제16호(2003), 15-32.
18. 洪正夏, **九一集**, 강신원 역, 한국수학사학회, preprint.