

입력 차수 보상기를 이용한 비정방 선형 시스템의 출력 제한 수동화

論文
53D-1-2

Output Feedback Passivation of Non-square Linear Systems Using an Input-Dimensional Compensator

孫 瑛 翼*
(Young-Ik Son)

Abstract - We present a state-space approach to make non-square linear systems strictly passive by using an input-dimensional parallel feedforward compensator. A necessary and sufficient condition for the existence of the parallel feedforward compensator is given by the static output feedback formulation, which enables to utilize linear matrix inequality. By modifying the structure of the compensator the additional technical assumption in the previous result [1] is removed. The effectiveness of the proposed method is illustrated by some numerical examples which can be stabilized by the proportional-derivative (PD) and proportional-derivative-integral (PID) control laws. The proposed control scheme can successfully replace the measurements of derivative terms in the control laws.

Key Words : (Feedback) Passivity, Non-square System, Parallel Feedforward Compensation, Static Output Feedback, Derivative Feedback

1. 서 론

수동성(passivity)을 갖지 않은 대상 시스템을 적절한 보상으로 수동화(passivation)하는 연구는 제어기 설계 및 관측기 구성에 있어 다양한 응용 범위를 가지고 있다 [2-6]. 그 중 병렬 보상기(Parallel Feedforward Compensator, PFC)를 설계하여 수동화하는 방법은 시스템의 상태(state) 정보를 모두 사용하지 않고 주어진 출력만을 고려하는 이점으로 다수의 연구자들에 의해 꾸준히 연구되고 있다 [7-12].

한편, 수동성은 입출력의 개수가 같은 정방(square) 시스템에 대해 정의되고, 위에서 언급한 결과들 역시 모두 정방 시스템에 관한 것이다. 입출력의 개수가 다른 비정방(non-square) 시스템에 대해서는 입출력의 개수를 같게 하는 정방화 행렬(squaring gain matrix)을 구해야 하는데, 병렬 보상기와 정방화 행렬을 동시에 설계해야 하는 시스템에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 비정방 시스템 수동화의 한 예로서 역진자 시스템 (입력:1개, 출력:2개)이 [13]에서 다루어졌지만, 비정방 시스템의 수동화 제어기 구성에는 보다 체계적인 방법이 필요하다.

참고 논문 [1]에서는 처음으로 병렬 보상기를 이용한 수동화 문제를 상태 공간에서 다루었다. 비정방 시스템의 수동화에 필요한 병렬보상기와 정방화 행렬의 형태를 제안하고, 제안된 시스템을 체계적으로 설계하기 위한 새로운 행렬의 존재에 대하여 필요충분조건을 제시한 것이다. 즉, 설계 과정에서 얻어진 가상 시스템에 대하여 정적출력제한(Static Output Feedback, SOF) 안정화 기법 혹은 경우에 따라서는

상태 제한을 통한 극배치 알고리즘(예를 들어, 선형 행렬 부등식 (LMI))을 이용하여 필요충분조건을 만족시키는 행렬을 찾으면, 병렬보상기(PFC)와 정방화 행렬을 동시에 설계할 수 있음을 보였다[1].

본 논문에서는 새로운 형태의 병렬 보상기를 제안함으로써 논문 [1]의 필요충분조건을 완화하는 연구를 행한다. 앞의 결과에서 Riccati 부등식 형태의 식을 만족하는 해에 대한 추가적인 조건을 없애는 것이다. 결과적으로 제안된 보상기를 통해 수동화 될 수 있는 시스템의 집합이 확대됨을 의미한다.

예제에서는 이전 논문 [1]에서 제안된 형태의 보상기를 설계하기 어려운 역진자 시스템 [13]에 대하여 본 논문에서 제안된 보상기를 쉽게 설계할 수 있음을 보인다. 또, 병렬 보상기를 통해 PD 제어기의 미분항을 대체할 수 있었던 [1]의 크레인 시스템에 대해서는 적분항을 추가하여 PID 제어를 사용하는 경우에도 미분항을 대체할 수 있음을 확인한다.

2. 기본 내용들

본 논문에서는 다음과 같이 표현되는 시스템의 출력 제한 수동화 문제를 생각한다. 식에서 x 는 상태; u 는 제어 입력; y 는 시스템의 출력이다.

$$(P): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^m \\ y = Cx, & y \in R^p. \end{cases} \quad (1)$$

입력과 출력의 개수가 같을 때 (즉, $m=p$), 시스템 (1)은 정방(square)이라 하고, 그렇지 않은 경우일 때, 비정방(non-square)이라고 한다.

선형 시불변(LTI) 시스템이 정방일 경우에 대해서는 최소

* 正 會 員 : 明知大 工大 電氣工學科 助教授
接受日字 : 2002年 6月 30日
最終完了 : 2003年 10月 20日

위상이고 상대 차수 1을 가지면 출력 제한에 의해 엄격한 수동성을 갖도록 만들 수 있다 [14, Remark 4.1]. 이 때 시스템은 거의 엄격한 수동적(Almost Strictly Passive, ASP)이라 한다. 최소 위상이라 함은 출력이 영일 때의 시스템의 영 동특성(zero dynamics)이 안정함을 뜻하고, 시스템 (1)에 대해서 상대 차수가 1인 것은 행렬 CB 가 정방 행렬이고 가역일 때이다 [2]. 반면에 시스템 (1)이 정방일지라도 상대 차수가 1보다 크거나 비최소 위상이라면 상태 제한에 의해 시라도 수동화될 수 없다. 그러한 경우 - 특히, 출력 정보만이 측정 가능할 때 - 시스템의 출력에 적절한 보상을 통해 수동성을 얻기 위한 방법이 병렬 보상기를 사용하는 것이다 [7-10]. 또한, 수동 시스템 이론은 시스템의 입출력의 개수가 같은 경우에 정의되므로 비정방 시스템에 대해서는 출력의 개수를 입력과 같게 만들어 주는 정방화 행렬을 구해야 한다 (그림 1의 N 에 해당) [1].

본 논문에서 제안된 보상기도 [1]에서와 같이 정적출력제한(SOF) 안정화 알고리즘으로 설계될 수 있다. 시스템 (1)이 대한 정적출력제한(SOF) 안정화 문제란 제어 입력 $u = -Fy$ (단, $F \in R^{m \times p}$)를 이용하여 페루프 시스템 행렬 ' $A - BFC$ '의 모든 고유치가 음의 실수부를 갖도록 하는 문제이다. 그러한 행렬을 안정한 행렬이라고 한다.

Cao와 Sun [15]은 다음의 행렬 부등식을 이용하여 출력 제한 이득 행렬 F 를 계산하는 반복적인 선형 행렬 부등식(LMI) 알고리즘을 제시하였다. SOF 알고리즘에 대한 소개와 더 자세한 내용은 논문 [15-17]들을 참고한다.

정리 1 [15]. 시스템 (1)이 정적출력제한(SOF)에 의해 안정화될 수 있는 필요충분조건은 다음의 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 $P = P^T > 0$ 와 F 가 존재한다는 것이다.

$$A^T P + PA - PBB^T P + (B^T P - FC)^T (B^T P - FC) < 0 \quad (2)$$

논문 [1]에서는 시스템 (1)에 대해서 다음과 같은 병렬 보상기 (V_1)과 정방화 행렬 $N \in R^{m \times p}$ 을 설계하여, 함께 결합한 새로운 시스템이 거의 엄격한 수동성을 갖도록 하였다 (그림 1 참조).

$$(V_1): \begin{cases} \dot{\eta} = E\eta + Mu, & \eta \in R^m, u \in R^m \\ y_\eta = L\eta, & y_\eta \in R^m. \end{cases} \quad (3)$$

이 때, 보상기 (3)과 정방화 행렬 N 의 설계 문제는 새로운 가상 시스템의 출력 제한 안정화 문제로 바뀌고, 설계를 위한 행렬들이 존재할 필요충분조건은 식 (2)와 같은 형태의 행렬 부등식의 해가 존재하여 추가적인 조건을 만족하는 것이다 [1]. 논문 [1]에서 언급하였듯이 추가적인 조건이 정방 시스템에서는 큰 제한이 되지 않지만 비정방 시스템에 대해서는 보상기를 설계할 수 있는 시스템의 집합을 제한할 수 있다.

본 논문에서는 새로운 병렬 보상기를 제안하여 [1]의 제한적인 조건 없이 (행렬 부등식의 해 만으로) 보상기와 정방화 행렬의 설계 문제를 해결한다. 이 때 시스템들은 논문 [1]에서와 같이 상대 차수(relative degree)가 1보다 크거나 비-최소 위상(non-minimum phase)이며, 출력 정보만이 측정 가능한 경우를 생각한다.

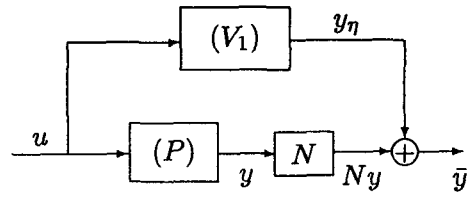


그림 1 비정방 시스템을 위한 병렬연결
Fig. 1 Parallel Compensation for Non-square Systems

3. 병렬 보상기와 정방화 행렬의 설계

본 절에서는 다음과 같은 변형된 병렬 보상기 (V_2)를 제안하고, 정방화 행렬 $N \in R^{m \times p}$ 과 함께 결합한 새로운 시스템이 거의 엄격한 수동성(ASP)을 갖도록 한다 (그림 2 참조).

$$(V_2): \begin{cases} \dot{\eta} = E\eta + Mu, & \eta \in R^m, u \in R^m \\ y_\eta = L\eta, & y_\eta \in R^m. \end{cases} \quad (4)$$

이 때, 추가적인 시스템 (V_2)와 주어진 시스템의 입력은 같은 차수를 가진다 (즉, $\eta \in R^m$). 이런 시스템을 입력-차수(input-dimensional) 시스템이라 부른다 [1].

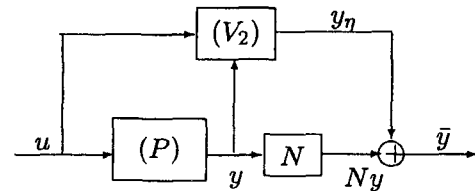


그림 2 새로운 보상기의 병렬연결
Fig. 2 Parallel Connection with a New Compensator

주어진 시스템이 수동화되기 위해서는 상대 차수 1이고 최소 위상을 가져야 한다. 그림 2와 같이 연결된 시스템 식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ EC & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ M \end{bmatrix} u \\ \bar{y} = [NC \ L] \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

병렬 보상기 (V_2)와 정방화 행렬 N 을 설계하는 과정으로서 먼저 시스템 (5)가 상대 차수 1을 갖도록 행렬들을 결정하고, 그 조건 하에서 시스템 식 (5)를 정규형태(normal form)로 전환한다. 정규 형태로 바뀌어진 시스템들은 영 동특성(zero dynamics)을 명확하게 보여줌으로써 시스템들을 최소 위상으로 만드는 과정을 쉽게 해준다. 찾아낸 영 동특성들이 안정하게 나머지 행렬 값들을 결정하면 시스템 (5)는 거의 엄격히 수동적(ASP)이게 된다. 마지막으로 수동화하는 이득 행렬 F 는 쉽게 찾을 수 있다.

입력의 영이 아닌 상수 γ 로 $L = \gamma I_m$ 으로 정하면, 시스

템 (5)의 출력은

$$\bar{y} = Ny + \gamma\eta, \quad \bar{y} \in R^m \quad (6)$$

이다. 행렬 N 은 비정방 시스템의 출력 개수를 입력의 수와 같게 한다. 정방 시스템에 대한 결과에서 이 행렬은 $N = I_m$ 이라 생각할 수 있다.

식 (6)을 시간에 대해 미분하면

$$\dot{\bar{y}} = NCAx + \gamma E\dot{\eta} + (NCB + \gamma M)u \quad (7)$$

이다. 임의의 가역 행렬 $R \in R^{m \times m}$ 을 이용하여 병렬 보상기 (4)의 M 을 다음과 같이 결정한다.

$$M = \gamma^{-1}(R - NCB) \quad (8)$$

이제, 시스템 (5)는 상대 차수 1을 갖게되고, 아래의 좌표 변환 행렬을 이용하면 [2,12]

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - BR^{-1}NC & -\gamma BR^{-1} \\ NC & \gamma I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} \text{ 또는} \\ \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & BR^{-1} \\ -\gamma^{-1}NC & \gamma^{-1}(I_m - NCBR^{-1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} \quad (9)$$

다음과 같은 정규 형태로 표현된다 [1].

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_1 & \widehat{A}_2 \\ \widehat{A}_3 & \widehat{A}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} u \quad (10)$$

위에서 $\xi \in R^n$ 이고,

$$\begin{cases} \widehat{A}_1 = A - \gamma BR^{-1}EC - BR^{-1}NCA, \\ \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 BR^{-1}, \\ \widehat{A}_3 = NCA + \gamma EC, \\ \widehat{A}_4 = \widehat{A}_3 BR^{-1}. \end{cases} \quad (11)$$

편의상 행렬 $\widehat{C} := \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ 으로 둔다. 이제, 시스템 (10) (혹은 (5))의 영 동특성은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\dot{\xi} = (A - B[\gamma R^{-1}E \quad R^{-1}M] \widehat{C})\xi \quad (12)$$

시스템 (12)가 안정하도록 하는 E 와 N 을 구하기 위해 다음의 가상 시스템을 생각한다.

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + B\omega, & \xi \in R^n \\ y_\xi = \widehat{C}\xi, & y_\xi \in R^{2p}. \end{cases} \quad (13)$$

시스템 (13)에 대한 SOF 문제는 행렬 $(A - B\widehat{F}\widehat{C})$ 가 안정하도록 하는 \widehat{F} 를 찾는 것이므로, 다음과 같이 찾은 행렬 \widehat{F} 은

$$\widehat{F} = [\gamma R^{-1}E \quad R^{-1}M] \quad (14)$$

영 동특성 (12)를 안정하게 한다. 즉, 적절한 알고리즘을 이용하여 시스템 (13)에 대한 SOF 문제가 풀리면, 얻어진 이득 \widehat{F} 는 $\widehat{F} = [\widehat{F}_1 \quad \widehat{F}_2]$ 로 쓸 수 있고, \widehat{F}_1 과 \widehat{F}_2 는 모두 $m \times p$ 행렬이다. 나머지 행렬 N, E, M 들은 행렬 \widehat{F}_1 과 \widehat{F}_2 로부터 차례대로 얻을 수 있다.

병렬 보상기 (4)와 행렬 N 이 결정된 후에 전체 시스템은 출력 제환에 의해 엄격한 수동성을 가질 수 있다. 이것을 다음에서 정리하였다. 행렬 E 와 N 이 존재할 필요충분조건은 참고 논문 [15]에서 인용하였다.

정리 5. 영이 아닌 상수 γ 로 $L = \gamma I_m$ 과 같이 정한다. 시스템 (5)가 거의 엄격히 수동적(Almost Strictly Passive, ASP)이기 위한 필요충분조건은 아래 행렬 부등식들을 만족하는 $P = P^T > 0$ 와 \widehat{F} 가 존재하는 것이다.

$$A^T P + PA - PBB^T P + (B^T P - \widehat{F}\widehat{C})^T (B^T P - \widehat{F}\widehat{C}) < 0. \quad (15)$$

증명: 시스템 (5)는 식 (8)에 의해 상대 차수 1을 갖고 시스템 (10)과 동치이다. 위의 조건이 만족되면 $(A - B\widehat{F}\widehat{C})$ 를 안정하게 만드는 $\widehat{F} = [\widehat{F}_1 \quad \widehat{F}_2]$ 가 존재한다. 행렬 E 와 N 은 식 (12)에 의해 얻을 수 있다.

$$E = \gamma R \widehat{F}_1, \quad N = R \widehat{F}_2 \quad (16)$$

즉, 아래의 병렬 보상기를 통해 (10)의 \widehat{A}_1 가 안정함을 의미한다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \gamma^{-1} R \widehat{F}_1 y + \gamma^{-1} R (I_m - \widehat{F}_2 C B) u \\ \dot{y} = R \widehat{F}_2 y + \gamma \eta \end{cases} \quad (17)$$

한편, \widehat{A}_1 가 안정하면 조건 (15)가 만족되므로, 조건 (15)는 시스템 (10)이 최소 위상이기 위한 E 와 N 이 존재할 필요충분조건이다. 그런데, 시스템 (10)은 상대 차수 1을 가짐으로 위 조건은 시스템 (5)가 거의 엄격히 수동적이기 위한 필요충분조건이 된다.

완전한 증명을 위해 다음의 출력 제환 제어입력

$$u = -F\bar{y} + R^{-1}v \quad (18)$$

를 통해 페루프 시스템 (10)-(18)이 v 로부터 \bar{y} 가 엄격한 수동성을 지님을 보인다 (그림 3 참조). 위에서 식 (10)의 \widehat{A}_1 이 안정하므로 다음을 만족하는 행렬 $P_1 = P_1^T > 0$ 가 존재한다.

$$P_1 \widehat{A}_1 + \widehat{A}_1^T P_1 = -I_n \quad (19)$$

리아프노프 함수를 아래와 같이 정하고

$$V(\xi, \bar{y}) = \frac{1}{2} \xi^T P_1 \xi + \frac{1}{2} \bar{y}^T \bar{y} \quad (20)$$

시스템 (10)을 따라 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \xi^T (\widehat{A}_1^T P_1 + P_1 \widehat{A}_1) \xi + \xi^T P_1 \widehat{A}_2 \bar{y} \\ &\quad + \bar{y}^T \widehat{A}_3 \xi + \bar{y}^T \widehat{A}_4 \bar{y} + \bar{y}^T R u \\ &\leq -\frac{1}{2} |\xi|^2 + |P_1 \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3^T| |\xi| |\bar{y}| + \bar{y}^T \widehat{A}_4 \bar{y} + \bar{y}^T R u \\ &\leq -\frac{1}{4} |\xi|^2 + |P_1 \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3^T|^2 |\bar{y}|^2 + \bar{y}^T \widehat{A}_4 \bar{y} + \bar{y}^T R u. \end{aligned}$$

식 (18)에서 $F = \sigma R^{-1}$ 이고 $\sigma > |P_1 \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3^T|^2 + 1$ 일 때,

$$\dot{V}(\xi, \bar{y}) \leq -\frac{1}{4} |\xi|^2 - |\bar{y}|^2 + \bar{y}^T v. \quad (21)$$

식 (21)은 페루프 시스템 (10)-(18)(또는 (5)-(18))의 엄격한 수동성을 의미하고, $v = 0$ 일 때 점근적 안정성을 보장한다. 그림 3은 $v = 0$ 에서 그림 4와 같이 나타낼 수 있으므로, 제안된 보상기 설계 방법은 준 시스템 (1)에 대한 출력 제환 동적 안정화 제어기 설계 방법으로 볼 수 있다. \square

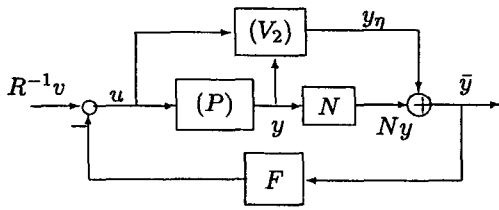


그림 3 병렬연결된 시스템에 대한 SOF
Fig. 3 SOF for Parallel-Connected System

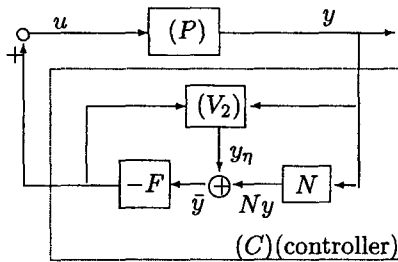


그림 4 병렬연결과 등가의 폐환 연결
Fig. 4 Equivalent Feedback Connection

첨언 3. 이전 결과 [1]과 비교하여 정리 2에서는 식 (15)의 행렬 \hat{F} 에 대하여 추가적인 조건을 요구하지 않는다. 사실 병렬 보상기 (3)을 고려한 이전 결과 [1, 정리 5]와 [1, 정리 8]에서는 $\hat{F}_1 = K\hat{F}_2$ 라는 조건을 추가로 만족해야 한다. 이는 시스템 (3)을 이용했을 때의 영 동특성이 아래와 같기 때문이다.

$$\dot{\xi} = (A - B[-R^{-1}EN \quad R^{-1}N]\hat{C})\xi. \quad (22)$$

다시 말해서 식 (12)와 달리 (22)에서는 행렬 N 이 \hat{F}_1 과 \hat{F}_2 에 공통으로 속해있어 추가적인 조건을 필요로 하게 된다. 정방 시스템의 경우에는 행렬 \hat{F}_1 과 \hat{F}_2 가 모두 정방 행렬이므로 행렬 \hat{F}_2 가 가역이면 행렬 $K = \hat{F}_1 \hat{F}_2^{-1}$ 로 쉽게 찾을 수 있으나, 비정방 시스템의 경우는 K 의 존재 여부를 쉽게 판단할 수 없다. 정리 2에서는 추가적인 조건을 제거함으로써 병렬 보상기의 설계를 보다 쉽게 하고, 적용 시스템의 범위를 확장한 것이라 할 수 있다.

첨언 4. 시스템의 모든 출력에 대해서 상대 차수 2이상이면 $CB=0$ 이다. 좌표 변환 (9)에서 $\bar{y}=0$ 일 때 $\xi=x$ 임을 주목하면, $\bar{y}=0$ 이고 $CB=0$ 일 때 (13)에 대한 SOF 입력 ω 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega = -\hat{F}\hat{C}\xi = -\gamma R^{-1}E y - R^{-1}N \dot{y}. \quad (23)$$

따라서, 만약 준 시스템 (1)이 다음 비례-미분(PD) 제어 입력에 의해 안정화된다면

$$u = -K_p y - K_d \dot{y} = -(K_p C + K_d CA)x, \quad (24)$$

병렬 보상기 (17)을 $\hat{F}_1 = K_p$ 와 $\hat{F}_2 = K_d$ 로부터 구성할 수

있다. 이것은 병렬 보상기를 사용함으로써 PD 제어기의 미분항을 대체할 수 있음을 의미한다.

한편, 시스템 (13)을 안정화시키는 이득 행렬 \hat{F} 는 다른 SOF 알고리즘으로도 얻을 수 있으며 (예를 들어 [17]), 위에서 출력과 그 미분이 시스템의 모든 상태 정보를 갖는 경우라면 임의의 극배치 알고리즘도 사용할 수 있다.

4. 두 가지 예제

제안된 병렬 보상기 설계 방법을 설명하기 위해 두 가지 시스템을 다루었다. 첫 번째는 논문 [13]에서 다룬 역진자 시스템이고, 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 보다 쉽게 보상기와 정방화 행렬을 설계하였다. 다음으로 논문 [1]에서 보인 크레인(Convey-Crane) 모델을 다시 다루었다. 여기서는 제안된 보상기가 PD 제어기 뿐만 PID 제어기에서의 미분항도 대체할 수 있음을 보였다.

예제 1. 다음 시스템은 논문 [13]에서 다룬 역진자 시스템이다 (입력: 1개, 출력: 2개). 이 시스템은 비-최소 위상(non-minimum phase)이며, 상대 차수 (2, 2)를 가지고 $CB=0$ 이다. 이전 결과 [1]에서 제안한 보상기로는 [정리 3]{Son03a}의 두 번째 조건을 만족하기 힘들지만, 본 논문의 병렬 보상기와 정방화 행렬을 쉽게 설계할 수 있음을 확인한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 32.7218 & -0.7217 & 0 & 13.0168 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.4426 & 0.0098 & 0 & -4.0785 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.2542 \\ 0 \\ 1.0196 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

식 (15)를 만족하는 행렬 \hat{F} 를 찾기 위해 \hat{C} 을 살펴보면, \hat{C} 는 역행렬이 존재하고 $\hat{C}x$ 는 시스템의 모든 상태 정보를 다 가지고 있음을 알 수 있다. 위 시스템은 가제어성(controllability)을 가지므로 행렬 $(A-BG)$ 의 고유치는 상태 궤환 행렬 G 에 의해서 임의로 정할 수 있다. 즉, $(A-B\hat{F}\hat{C})$ 를 안정화 시키는 \hat{F} 를 찾는 방법으로 임의의 극배치 방법(예를 들어, LQR)으로 G 를 찾아서 $\hat{F} = G\hat{C}^{-1}$ 로 구할 수 있다.

다음 행렬에 의하면

$$\bar{F} = [-36 \quad -6 \quad -6 \quad -10], \quad (26)$$

$(A-B\hat{F}\hat{C})$ 의 고유치는 $\{-2.3283 \pm j1.8324, -3.6256, -5.8471\}$ 이다. 따라서, 식 (15)를 만족하는 P 를 찾을 수 있다. 반면에 첨언 3에서 지적했듯이 위 시스템에 대하여 [1, 정리 3]의 두 번째 조건을 만족하는 \hat{F} 를 찾기는 거의 불가능하다.

이제 $\gamma=R=1$ 로 두면, 병렬 보상기 (17)은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}} = (-36 - 6)y + u \\ \bar{y} = (-6 - 10)y + \eta. \end{cases} \quad (27)$$

결과적으로 결합된 시스템 (25)-(27)는 거의 엄격히 수동적(ASP)이고, 시스템 (25)는 출력의 미분항 없이 안정화 될 수 있음을 알 수 있다.

예제 2. 아래와 같이 표현되는 선형 크레인 모델을 생각한다 [18].

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{lM} \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 0]z. \end{aligned} \quad (28)$$

각 문자들의 의미는 [18]을 참고한다. 단, $z = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ 인 상태 변수에서 x 는 카트의 위치이고 θ 는 짐(또는 추)가 수직선과 이루는 흔들림 각이다. 참고 논문 [18]에서는 입력에서 \dot{x} 까지가 수동적임을 이용하여 다음 PD 규칙으로 시스템을 안정하게 만들었다:

$$u = -(k_x x + k_d \dot{x}). \quad (29)$$

한편, 논문 [1]에서는 측정 가능한 출력 $y = x$ 뿐이라 생각하고, 병렬 보상기를 설계하여 \dot{x} 의 측정없이 안정화 할 수 있음을 보였다.

본 예제에서는 실제적인 이유로 $\zeta = \int x dt$ 의 적분항을 추가한 다음의 PID 규칙을 고려한다:

$$u = -(k_i \zeta + k_x x + k_d \dot{x}) = -K_{PID} \begin{bmatrix} \zeta \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

우리는 위 제어 규칙(PID)에서도 미분항을 사용하지 않고, 병렬 보상기를 이용하여 시스템을 안정화 할 수 있음을 보인다. 제어에 사용할 수 있는 상태는 카트의 위치 x 와 그 적분인 ζ 라고 생각하고, 편의상 ζ 가 포함된 시스템 방정식의 행렬을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ \frac{1}{lM} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

제어 규칙 (30)이 시스템 (31)을 안정화 할 때, 즉 $(A - BK_{PID})$ 가 안정할 때, 그에 해당하는 \hat{F} 를 찾으면 $K_{PID} = \hat{F}C$ 에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[k_i \ k_x \ k_d \ 0 \ 0] = \hat{F} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

윗 식으로부터 $\hat{F} = [k_i \ k_x \ 0 \ k_d]$ 로 얻을 수 있고, $\gamma = R = 1$ 일 때 병렬 보상기 (17)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [k_i \ k_x] \begin{bmatrix} \zeta \\ x \end{bmatrix} + u \\ \bar{y} = [0 \ k_d] \begin{bmatrix} \zeta \\ x \end{bmatrix} + \eta. \end{cases} \quad (33)$$

정리 2에 의하여 두 시스템 (31)-(32)의 연결된 시스템은 거의 엄격한 수동성을 갖고, $u = -F\bar{y}$ 에 의하여 안정화 됨을 알 수 있다. 따라서, PID 제어기에서 속도 정보없이 위치 정보만을 이용한 제어 규칙으로 페루프 시스템이 안정하게 된다.

5. 결 론

본 논문에서는 상대 차수가 1보다 크거나 비-최소 위상인 시스템에 대하여 병렬 보상기(PFC)와 정방화 행렬을 설계하는 방법을 연구하였다. 설계된 병렬 보상기와 이득 행렬을 통해 페루프 시스템들은 엄격한 수동성을 갖는다. 따라서 논문의 결과는 출력 정보만이 측정 가능하고 정적 출력 궤환(SOF)만으로 안정화 할 수 없는 시스템에 대해, 저차의 동적 출력 궤환 제어기를 설계하는 한가지 방법을 제시한 것으로 볼 수 있다. 논문에서는 새로운 형태의 병렬 보상기를 제안함으로써 비정방 시스템의 병렬 보상기 구성에서 제한적이었던 추가 조건을 제거하였다. 이는 병렬 보상기를 통해 수동화할 수 있는 대상 시스템의 집합을 확장한 것이라 할 수 있다.

한편, 많은 실제적인 시스템들이 입력에서 일반적인 속도 출력까지 수동성을 가지며, 그 결과로 비례-미분(PD) 제어기가 얻어진다. 제안된 수동화 방법은 PD 제어기로 제어 가능한 시스템에 대해 미분 항을 대체하는 방법으로 활용될 수 있고, 적분항이 추가된 PID 제어기에서의 미분항도 대체할 수 있음을 역진자 시스템과 크레인 시스템의 예로 설명하였다.

감사의 글

본 논문은 과학재단 지역대학우수과학자 지원연구사업(KOSEF-R05-2003-000-10624-0)에 의해 연구되었음.

참 고 문 헌

- [1] 손영익, 심형보, 조남훈, "비정방 선형 시스템의 강인 제어기 설계 및 그 응용," *전기학회 논문지*, vol. 52D, no. 4, pp. 189-197, 2003.
- [2] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.
- [3] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2nd Ed., 1996.
- [4] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, 1997.
- [5] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [6] H. Shim, J.H. Seo, and A.R. Teel, "Nonlinear observer design via passivation of error dynamics," *Automatica*, vol. 39, pp. 885-892, 2003.
- [7] I. Bar-Kana, "Parallel feedforward and simplified adaptive control," *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 95-109, 1987.
- [8] H. Kaufman, I. Bar-Kana, and K. Sobel, *Diect Adaptive Control Algorithms*, Springer-Verlag, 2nd Ed., 1998.

- [9] Z. Iwai and I. Mizumoto, "Realization of simple adaptive control by using parallel feedforward compensator," *Int. J. Control*, vol. 59, no. 6, pp. 1543-1565, 1994.
- [10] A.G. Kelkar and S.M. Joshi, "Robust control of non-passive systems via passification", In *Proc. of ACC*, 1997.
- [11] M. Deng, Z. Iwai, and I. Mizumoto, "Robust parallel compensator design for output feedback stabilization of plants with structured uncertainty", *Systems & Control Letters*, vol. 36, pp. 193-198, 1999.
- [12] Young I. Son, Hyungbo Shim, and Jin H. Seo, "Passification of nonlinear systems via dynamic output feedback", *Journal of KIEE*, pp. 23-28, 2000.
- [13] Y. Kawasaki, I. Mizumoto, R. Wakamiya, and Z. Iwai, "Adaptive control of an inverted pendulum system," In *Proc. of Asia-Pacific Vibration Conference '93*, Japan, vol. 3, pp. 1114-1119, 1993.
- [14] Z.P. Jiang and D.J. Hill, "Passivity and disturbance attenuation via output feedback for uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 7, pp. 992-997, 1998.
- [15] Y.-Y. Cao, J. Lam, and Y.-X. Sun, "Static output feedback stabilization: an ILMI approach," *Automatica*, vol. 34, no. 12, pp. 1641-1645, 1998.
- [16] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, and S.R. Souza, "Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 7, pp. 997-1003, 1996.
- [17] C.A.R. Crusius and A. Trofino, "Sufficient LMI conditions for output feedback control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 5, pp. 1053-1057, 1999.
- [18] J. Collado, R. Lozano, and I. Fantoni, "Control of convey-crane based on passivity," In *Proc. of ACC*, pp. 1260-1264, 2000.

저 자 소 개



손 영 익 (孫 瑛 翼)

1995년 서울대학교 전기공학과 졸업.
2002년 동 대학원 전기·컴퓨터공학부 졸업(공학). 2003년~현재 명지대학교 전기공학과 조교수.

Tel : 031-330-6358

Fax : 031-321-0271

E-mail : sonyi@mju.ac.kr