

## 외란관측기법과 최대최소 제어방법을 이용한 시변 입력 외란을 갖는 선형 시스템의 점근 안정화

### Asymptotic Stabilization of Linear Systems with Time-Varying Input Disturbances Using Disturbance Observer Techniques and Min-Max Control Method

송 성 호\*, 김 백 섭  
(Seong-Ho Song and Baek-Sop Kim)

**Abstract** : This paper deals with asymptotic stabilization problems for linear systems with time-varying input disturbances. In order to eliminate the influence of a disturbance on the system, a disturbance observer is designed and the time-varying disturbance can be rejected using its estimated value. Since the disturbance observer is kind of low-pass filter, it has inevitably estimation errors. To eliminate the influences on the performance due to these errors, the additional control is designed based on these estimation errors using a well-known min-max control method. It is shown that the asymptotic stability of the closed-loop system is guaranteed. In general, the min-max control method requires the switching of control inputs and the switching magnitude of the control input is determined by the disturbance estimation error bounds. As the error bounds can be made arbitrarily small by choosing the high gain for the disturbance observer, the control method suggested in this paper can reduce the chattering phenomena as small as possible. Therefore, it has superior performance to the existing ones.

**Keywords** : asymptotic stabilization, time-varying disturbance, disturbance rejection, disturbance observer, min-max control method, chattering

#### I. 서론

대부분의 제어 시스템은 자체적인 외란 소스나 모델 불확실성을 갖는다. 지난 30년간 이러한 모델 불확실성에 의한 건설 제어 문제를 해결하기 위한 방법들이 연구되어 왔으며, LQG/LTR,  $H_\infty$  제어, 슬라이딩 모드 제어, 적응제어 등이 이들에 해당한다. 특히, 모터나 로봇틱스와 같은 모션 제어 분야에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 외란 관측기법이 널리 사용되어 왔으며, 실제 좋은 제어 성능을 보인다[1-7].

기존 외란 관측기법에서는 공칭모델의 역모델을 외란 관측기의 설계에 이용하였는데, 만약 공칭모델이 비최소위상 영점(nonminimum phase zero)을 포함하고 있으면, 관측기가 내부적으로 불안정한 시스템을 포함하기 때문에 안정도에 문제가 야기될 수 있으며, 공칭모델 전달함수의 분모차수가 분자 차수보다 많은 경우에는 역모델이 미분기를 포함하여 고주파 잡음이 증폭되는 문제가 발생한다. 반면에, 역모델을 사용하지 않고 내부 공칭 모델(internal nominal model)을 사용한다면, 이러한 문제는 피할 수 있다. [5]에서는 기존의 내부 모델 제어(internal model control)에 필터를 첨가하여 외란을 직접 없애주는 향상된 내부 모델 제어 기법을 제시하였고, 외란 관측기의 건설성을 향상시킬 수 있음을 보였다.

그러나, 대부분의 외란관측기를 이용한 제어에서는 외란 관측기와 건설제어기를 분리하여 설계하고, 외란관측기의 성능을 건설제어기 설계시 고려하지 않았다.

본 논문에서는 [5]에서 제시하였던 구조를 이용하여 외란 관측기를 설계하고, 이 외란 관측기의 추정오차를 해석하여 이 오차의 한계값을 제시하며, 이 한계값을 이용하여 추정 오차에 의하여 발생하는 제어 오차를 제거하기 위한 제어 입력을 최소 최대 제어기법(min-max control method)을 이용하여 설계한다[8,9]. 본 논문에서 제시한 결과는 외란관측기의 구조에 영향을 받지 않으며, 전달함수의 역함수를 사용하는 외란관측기의 구조에서도 똑같은 결과를 유도할 수 있다. 또한, 리아프노프 방법을 이용하여 제시된 제어 기법이 페루우프 시스템의 점근 안정성을 보장함을 보이고, 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제시된 제어 기법의 성능을 보인다.

#### II. 외란 관측기법과 최대최소제어방법에 의한 점근안정화 제어기의 설계

본 논문에서 다음과 같은 시변 입력 외란을 갖는 선형 시스템을 다룬다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bf(t) \quad (1)$$

여기서,  $x(t) \in R^n$  은 상태 변수이고,  $u(t) \in R$  은 입력이다. 함수  $f: R \rightarrow R$  은 다음의 가정을 만족하는 시변 함수이다.

**가정 1** : 함수  $f$  는 양수  $\epsilon_1$  에 대하여 다음을 만족한다.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 5. 16., 채택확정 : 2003. 9. 1.

송성호, 김백섭 : 한림대학교 정보통신공학부

(ssh@hallym.ac.kr/bskim@hallym.ac.kr)

※ 본 논문은 한림대학교 교비 연구비(HRF-1999-12)에서 지원하여 연구하였음.

$$f(t) < \epsilon_1, \forall x \neq 0, t \geq 0. \quad (2)$$

**가정 2 :** 함수  $f$  의 시간 미분은 양수  $\epsilon_2$  에 대하여 다음을 만족한다.

$$\frac{df(t)}{dt} < \epsilon_2, \forall t \geq 0. \quad (3)$$

**가정 3 :**  $(A, B)$  는 제어가능(controllable)하다.

가정 3 으로부터 행렬  $A$  가 불안정하다면, 상태변수 되 먹임에 의하여 안정하게 할 수 있다.

본 논문에서는 (1)로 주어지는 시스템의 접근 안정화 제어 문제를 다룬다. 이를 위하여 시변 외란 함수  $f(t)$ 를 추정하기 위한 추정기를 외란관측기법을 이용하여 설계하고, 이 값을 입력에 추가함으로써 시변 외란 함수의 영향을 없앤다. 이 추정기는 저주파 필터의 성격을 가지므로, 추정 오차가 존재하기 때문에 외란 관측기에 의한 제어만으로는 접근 안정화 문제를 풀 수 없다. 따라서, 이러한 추정 오차가 미치는 영향을 제거하기 위하여 부가의 입력을 인가하여 시스템의 접근 안정화를 보장한다. 이 부가 입력은 추정 오차의 한계값들로 형성되는데, 본 논문에서는 추정 오차의 한계값들을 가정 1과 가정 2를 이용하여 제시하고, 외란관측기의 이득을 키움으로써 이들 오차의 한계값을 원하는 만큼 줄일 수 있음을 보인다.

2.1 외란 관측기의 설계

외란 관측기에 의한 제어 입력은 시스템 행렬  $A$  를 안정화시키기 위한 안정화 제어입력과 시변외란  $f(t)$  의 영향을 제거하기 위한 제어입력  $u_1$  으로 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$u(t) = -K_C x(t) + u_1(t) \quad (4)$$

여기서,  $K_C$  는 양한정 행렬(positive definite matrix)  $P$  와  $Q$  에 대하여 다음과 같은 리아프노프 방정식을 만족하도록 선택한다.

$$(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C) = -Q \quad (5)$$

이제 잘 알려진 외란관측기법을 이용하여 시변 외란  $f(t)$ 를 추정하기 위한 추정기를 설계한다. 그림 1 은 외란 관측기의 구조를 나타내는데, 불확실 함수  $f(t)$  에서 외란 관측기의 출력  $\hat{f}(t)$ 까지의 전달함수가 다음과 같은저주파 필터 형태가 되도록 외란관측기를 설계한다.

$$G_D(s) = \frac{\mathcal{L}[\hat{f}(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{K}{s+K}, \quad K > 0 \quad (6)$$

여기서,  $\mathcal{L}[(\cdot)]$  은  $(\cdot)$ 의 라플라스 변환을 의미한다. 그림 1에서 각 서브시스템  $P(s)$  와  $Q(s)$  는 다음과 같이 설계한다.

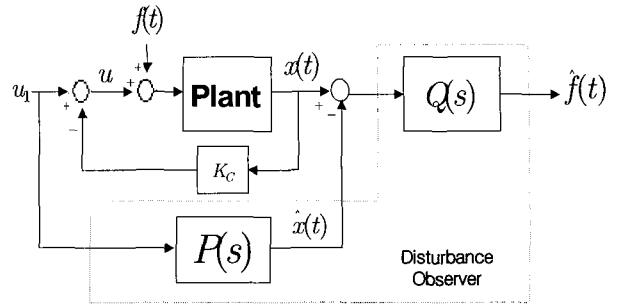


그림 1. 외란 관측기의 구조.

Fig. 1. Block diagram of disturbance observer.

$$P(s) = \frac{\hat{X}(s)}{U_1(s)} = (sI - A + BK_C)^{-1}B \quad (7)$$

$$Q(s) = \frac{\mathcal{L}[\hat{f}(t)]}{X(s) - \hat{X}(s)} = \frac{K}{s+K} C(sI - A + BK_C)$$

여기서,  $X(s), U_1(s), \hat{X}(s)$  는 각각 상태변수  $x(t)$ , 입력  $u_1(t)$  와 외란관측기의 상태변수  $\hat{x}(t)$  의 라플라스 변환(Laplace transform)이고, 행렬  $C$  는  $CB = 1$  이 되도록 설계한다. 그러면, (1)과 (4)로부터  $X(s) = (sI - A + BK_C)^{-1}B \{U_1(s) + \mathcal{L}[f(t)]\}$  이므로, (5)로부터 외란관측기의 전달함수는 (6)을 만족하게 된다.  $P(s)$ 는 주어진 플랜트 (1)의 상태변수 되먹임에 의해서 안정화된 내부모델에 해당하며,  $Q(s)$ 는 센서잡음 등을 없애기 위한 일종의 필터로 외란관측기 설계나 내부모델에 의한 적응제어기법등에서의 구조에서 흔히 쓰인다.

다음의 보조정리는 외란관측기의 추정오차의 한계값(Upper bound)이 가정 1 과 가정 2 로 주어지는 불확실 함수  $f(t)$  의 한계값에 의하여 결정되어 짐을 보인다.

**보조 정리 1 :** 외란 관측기의 추정오차  $e_d(t) = f(t) - \hat{f}(t)$  는 다음을 만족한다.

$$|e_d(t)| \leq |\epsilon_1 - \hat{f}(0)| e^{-Kt} + \frac{\epsilon_2}{K} (1 - e^{-Kt}) \quad (8)$$

여기서,  $\hat{f}(0)$  와  $K$  는 각각 외란관측기의 출력초기값 과 외란관측기의 이득이고,  $\epsilon_1, \epsilon_2$  는 각각 가정 1 과 가정 2에서 주어진 시변외란  $f(t)$  의 한계값이다. ■

**증명 :** (6)으로 주어지는 전달함수  $G_D(s)$  로부터 다음과 같은 미분 방정식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{df(t)}{dt} - \frac{d\hat{f}(t)}{dt} = -K\{f(t) - \hat{f}(t)\} + \frac{df(t)}{dt} \quad (9)$$

따라서,  $\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$  라고 정의하면, (9)로 주어지는 외란관측기의 추정오차 방정식의 해는  $e_d(t)$ 의 정의, 가정

1 과 가정 2로부터 다음의 관계식을 만족함을 쉽게 보일 수 있다 [11].

$$\begin{aligned}
 |e_d(t)| &= |e_d(0)e^{-Kt} + \int_0^t e^{-K(t-\tau)}\dot{f}(\tau) d\tau| \\
 &\leq |e_d(0)e^{-Kt}| + \left| \int_0^t e^{-K(t-\tau)}\dot{f}(\tau) d\tau \right| \quad (10) \\
 &\leq |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-Kt} + \frac{\epsilon_2}{K} (1 - e^{-Kt})
 \end{aligned}$$

따라서, (8)이 성립함을 알 수 있다. ■

(6)에서 보면 알 수 있듯이 정상상태에서의 추정오차는 외란관측기의 이득  $K$  를 충분히 크게 잡으면, 아주 작게 만들 수 있음을 알 수 있다.

다음 절에서는 보조 정리 1을 이용하여 외란 추정 오차에 의하여 발생하는 제어오차를 없애기 위한 제어 입력과 외란 추정값으로 이루어지는 안정화 제어를 설계한다. (4)에서 외란 관측기에 의한 제어 입력은 시스템 행렬  $A$  를 안정화시키기 위한 안정화 제어입력과 시변외란  $\dot{f}(t)$  의 영향을 제거하기 위한 외란 관측기의 출력  $\hat{f}(t)$  로 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$u(t) = -K_C x(t) - \hat{f}(t) \quad (11)$$

다음의 정리는 (11)로 주어지는 제어입력이 (1)로 주어지는 선형시스템에 적용되었을 때 폐루프 시스템의 제어 오차가 유한하고, 정상상태 오차는 외란 관측기의 이득  $K$  를 크게 함으로써 얼마든지 작게할 수 있음을 보여준다.

**정리 1 :** (1)로 주어지는 선형 시스템에 (11)로 주어지는 제어입력을 인가하면, 폐루프 시스템의 제어오차는 다음과 같이 주어진다.

$$x(t) \leq \begin{cases} \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} + \frac{\sigma_1 |\epsilon_1 - \dot{f}(0)|}{\sigma_2 - K} (e^{-Kt} - e^{-\alpha_2 t}) + \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 K} (1 - e^{-\alpha_2 t}), & \text{if } \sigma_2 \neq K \\ \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} + \sigma_1 |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| t e^{-\alpha_2 t} + \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2} (1 - e^{-\alpha_2 t}), & \text{if } \sigma_2 = K \end{cases} \quad (12)$$

여기서, 양수  $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1$  과  $\sigma_2$  는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 e^{(A+BK_C)t} x(0) &\leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} \\
 e^{(A+BK_C)t} B &\leq \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}
 \end{aligned} \quad (13)$$

**증명 :** (1)로 주어지는 불확실 시스템에 (11)로 주어지는 제어입력을 인가하면, 폐루프 시스템은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = (A - BK_C)x(t) + B[f(t) - \hat{f}(t)] \quad (14)$$

(15)로부터 행렬  $A - BK_C$  는 안정행렬이다. (14)로 주어지는 시스템의 해는 다음과 같다.

$$x(t) = x(0)e^{A_C t} + \int_0^t e^{A_C(t-\tau)} B [f(\tau) - \hat{f}(\tau)] d\tau \quad (15)$$

여기서  $A_C = A - BK_C$  이다. (15)는 보조 정리 1 로부터 다음의 부등식을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 |x(t)| &\leq |x(0)e^{A_C t}| + \int_0^t e^{A_C(t-\tau)} B |f(\tau) - \hat{f}(\tau)| d\tau \\
 &\leq |x(0)e^{A_C t}| + \int_0^t e^{A_C(t-\tau)} B [|\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-K\tau} + \frac{\epsilon_2}{K} (1 - e^{-K\tau})] d\tau
 \end{aligned} \quad (16)$$

그런데, 행렬  $A_C$  는 (5)을 만족하는 안정행렬이므로,

(13)을 만족하는 양수  $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1$  과  $\sigma_2$  가 존재한다[12]. 따라서, (13)과 (16)으로부터

$$\begin{aligned}
 x(t) &\leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} + \int_0^t \alpha_1 e^{-\alpha_2(t-\tau)} [|\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-K\tau} + \frac{\epsilon_2}{K}] d\tau \\
 &\leq \begin{cases} \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} + \frac{\sigma_1 |\epsilon_1 - \dot{f}(0)|}{\sigma_2 - K} (e^{-Kt} - e^{-\alpha_2 t}) + \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 K} (1 - e^{-\alpha_2 t}), & \text{if } K \neq \sigma_2 \\ \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} + \sigma_1 |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| t e^{-\alpha_2 t} + \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2} (1 - e^{-\alpha_2 t}), & \text{if } K = \sigma_2 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (17)$$

이 된다. 주어진 양의 값  $K$  와  $\sigma_2$  에 대하여

$$\begin{aligned}
 e^{-Kt} - e^{-\sigma_2 t} &\leq 0, & \text{if } K \geq \sigma_2 \\
 e^{-Kt} - e^{-\sigma_2 t} &\geq 0, & \text{if } K \leq \sigma_2
 \end{aligned} \quad (18)$$

이 성립하므로, (17)에서 임의의 양수  $K \neq \sigma_2$  에 대하여

$$\frac{\sigma_1 |\epsilon_1 - \dot{f}(0)|}{\sigma_2 - K} (e^{-Kt} - e^{-\sigma_2 t}) \geq 0 \quad (19)$$

을 만족한다. 따라서, (12)가 만족됨을 알 수 있다. ■

정리 1 로부터 외란 관측기를 이용한 안정화 제어기는 상태변수를 유한하게 하며, (12)로부터 정상상태에서  $|x(\infty)| \leq \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 K}$  임을 알 수 있다. 즉, 정상상태에서 상태변수의 최대 크기는 시변외란의 변화율의 한계값(bound),  $\epsilon_2$  와 외란관측기의 추정이득  $K$  에 의하여 결정되며, 외란 관측기의 추정 이득  $K$  를 크게 함으로써 시스템의 정상상태 안정화 오차를 줄일 수 있음을 알 수 있다. 한편, 정상상태에서 상태변수의 크기는  $K$  를 크게 함으로써 줄일 수 있지만, 여전히 접근 안정성은 만족하지 못한다. 따라서, 시변외란이 존재하는 시스템의 접근 안정화를 위하여서는 부가의 제어입력이 설계되어야 한다. 본 논문에서는 추정오차에 의하여 발생하는 제어오차를 제거하기 위하여 최대최소 제어방법을 이용한다.

### 2.2 접근 안정화 제어기의 설계

접근 안정화 제어기는 시스템 행렬  $A$  를 안정화시키기 위한 상태변수 되먹임 제어입력과 시변 외란 함수  $f(t)$  의 영향을 제거하기 위한 외란 관측기의 출력, 그리고 외란 관측기의 추정오차에 의해서 야기되는 제어 오차를 없애기 위한 최대최소 제어입력으로 구성되며, 다음 식으로 주어진다.

$$u(t) = \begin{cases} -K_{\mathcal{C}}(t)\dot{f}(t) - [(\epsilon_1 - \dot{f}(0))e^{-\kappa t} + \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t})] \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}, \\ \quad \text{if } B^T P x(t) \neq 0 \\ -K_{\mathcal{C}}(t)\dot{f}(t), \text{ if } B^T P x(t) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(20)에서 첫째 항은 안정화 제어입력이고, 둘째 항은 외란관측기의 출력값으로 시변 외란 함수를 없애기 위한 제어입력이며, 마지막 항은 외란관측기의 추정오차에 의한 제어오차를 없애기 위한 제어입력이다. 마지막 항은 잘 알려진 최대최소 제어입력과 유사한 형태로서 스위칭을 필요로 한다.

다음의 정리는 (20)으로 주어지는 제어입력이 (1)로 주어지는 선형시스템을 점근 안정화시킴을 보여준다.

**정리 2 :** (1)로 주어지는 선형 시스템에 (20)으로 주어지는 제어입력을 인가하면, 페루우프 시스템은 점근적으로 안정하게 된다.

**증명 :** (20)으로 주어지는 제어입력을 (1)에 대입하면, 페루우프 시스템의 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} (A - BK_C)x(t) + B[f(t) - \dot{f}(t) \\ -|\epsilon_1 - \dot{f}(0)|e^{-\kappa t} + \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t})] \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}, \\ \quad \text{if } B^T P x \neq 0 \\ (A - BK_C)x(t) + B[f(t) - \dot{f}(t)], \text{ if } B^T P x = 0 \end{cases} \quad (21)$$

이 된다. 리아프노프 함수(Lyapunov function)  $V$  를 다음과 같이 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} x^T P x \quad (22)$$

$B^T P x = 0$  인 모든  $x \neq 0$  에 대하여 리아프노프 함수  $V$  의 시간 미분은

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x) \\ &= \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x \\ &\leq -\frac{1}{2} x^T Q x \end{aligned} \quad (23)$$

이 되어, (5)로부터 리아프노프 함수  $V$  의 시간 미분은 음수가 된다. 또한,  $B^T P x \neq 0$  인 모든  $x \neq 0$  에 대하여, 리아프노프 함수  $V$  의 시간 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x) \\ &= \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x + x^T P B f(x, t) \\ &\quad - x^T P B [f(t) - [(\epsilon_1 - \dot{f}(0))e^{-\kappa t} + \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t})] \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}] \end{aligned} \quad (24)$$

보조 정리 1 과 (24)로부터 다음의 부등식이  $t \geq 0$  와  $B^T P x \neq 0$  인 모든  $x \neq 0$  에 대하여 만족된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x \\ &\quad + x^T P B f(x, t) - \dot{f}(t) \\ &\quad - [(\epsilon_1 - \dot{f}(0))e^{-\kappa t} + \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t})] \frac{x^T P B B^T P x(t)}{B^T P x(t)} \\ &\leq \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x + x^T P B e_d(t) \\ &\quad - [(\epsilon_1 - \dot{f}(0))e^{-\kappa t} + \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t})] B^T P x(t) \quad (25) \\ &\leq \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x \\ &\leq -\frac{1}{2} x^T Q x \end{aligned}$$

그러므로, (23)과 (25)으로부터 페루우프 시스템은 점근적으로 안정하다. ■

다음의 따름정리는 (20)으로 주어지는 제어 입력에서  $\epsilon_1 - \dot{f}(0)$  를 포함한 항을 제거하여도 점근안정성이 보장됨을 보인다.

**따름 정리 1 :** (1)로 주어지는 선형 시스템에 (26)으로 주어지는 제어입력을 인가하면, 페루우프 시스템은 점근적으로 안정하게 된다.

$$u(t) = \begin{cases} -K_{\mathcal{C}}(t)\dot{f}(t) - \frac{\epsilon_2}{K}(1 - e^{-\kappa t}) \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}, \\ \quad \text{if } B^T P x(t) \neq 0 \\ -K_{\mathcal{C}}(t)\dot{f}(t), \text{ if } B^T P x(t) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

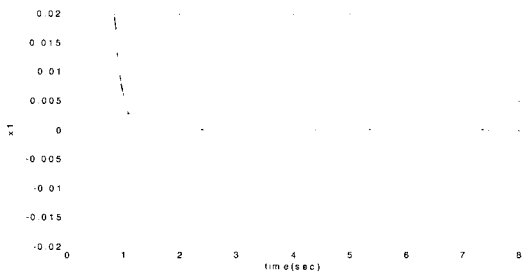
**증명 :** (26)으로 주어지는 입력을 (1)의 시스템에 대입하면,  $B^T P x = 0$  인 모든  $x \neq 0$  에 대하여 (22)로 주어지는 리아프노프 함수의 시간 미분은 (23)을 만족한다. 또한,  $B^T P x \neq 0$  인 모든  $x \neq 0$  에 대하여서는 (22)로 주어지는 리아프노프 함수의 시간 미분은 다음의 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{1}{2} x^T [(A - BK_C)^T P + P(A - BK_C)] x \\ &\quad + |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-\kappa t} B^T P x(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

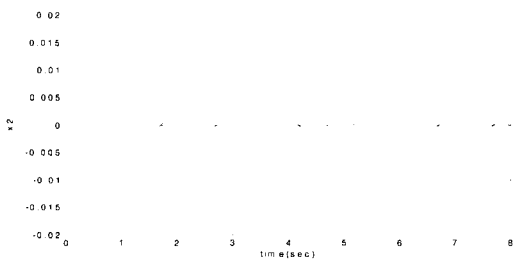
또한,  $\frac{dV}{dt} = 2\sqrt{V} \frac{dV^{1/2}}{dt}$  이 만족되므로, (5)와 (27)로부터 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dV^{1/2}}{dt} \leq -\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)} V^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-\kappa t} |B^T P^{1/2}|, \quad \forall t \geq 0 \quad (28)$$

여기서,  $\lambda_M(P)$  와  $\lambda_m(Q)$  는 각각 양한정행렬 (positive definite matrix)  $P$  와  $Q$  의 최대, 최소 특이값 (eigenvalue)이다. 따라서, (28)로부터 모든  $t \geq 0$  에 대하여  $k = \frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}$  에 대하여



(a) 상태변수  $x_1$  의 궤적



(b) 상태변수  $x_2$  의 궤적

그림 2. 외란관측기만의 성능과 제시된 방법의 성능 비교.  
Fig. 2. Performance comparison between disturbance observer and the proposed controller.

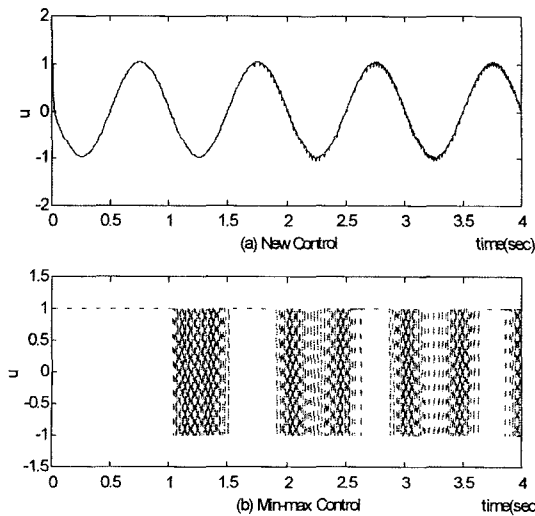


그림 3. 제어 입력의 궤적.  
Fig. 3. The trajectories of control inputs.

$$\begin{aligned} V^2(x) &\leq e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}t} \frac{1}{V^2}(x(0)) \\ &+ \int_0^t e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{2}} |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-K\tau} |B^T P^{1/2}| d\tau \\ &= e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}t} \frac{1}{V^2}(x(0)) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| |B^T P^{1/2}| \cdot \frac{e^{-Kt} - e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}t}}{\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)} - K}, \end{aligned} \quad (29)$$

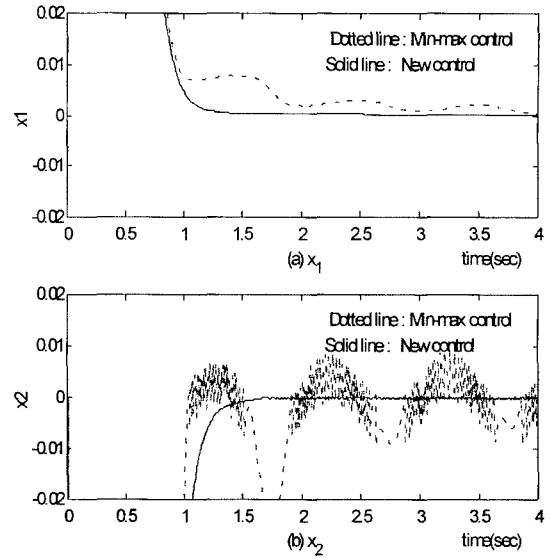


그림 4. 상태변수의 궤적.  
Fig. 4. The trajectories of state variables.

또는  $k = \frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}$  인 경우에는

$$\begin{aligned} V^2(x) &\leq e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}t} \frac{1}{V^2}(x(0)) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 - \dot{f}(0)) |B^T P^{1/2}| \cdot t e^{-\frac{\lambda_m(Q)}{2\lambda_M(P)}t}, \end{aligned}$$

이 만족되고,  $V^{1/2}$  은 0 보다 크거나 같기 때문에 시간  $t \rightarrow \infty$  이면,  $V^{1/2} \rightarrow 0$  이 되므로, 결국  $x \rightarrow 0$  이므로 폐루우프시스템은 점근적으로 안정하다. ■

(20)과 (26)에서 보면 알 수 있듯이, 외란관측기의 이득  $K$  를 충분히 크게 선택함으로써 입력의 스위칭 부분인

$$\left\{ |\epsilon_1 - \dot{f}(0)| e^{-Kt} + \frac{\epsilon_2}{K} (1 - e^{-Kt}) \right\} \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}$$

의 크기를 정상상태에서는 얼마든지 작게 할 수 있음으로써 기존의 단순한 최대최소 제어입력에 비하여 채터링 현상을 현저히 줄일 수 있다. 다음 절에서는 컴퓨터모의실험을 통하여 제시된 제어입력 (20)과 (26)에 의하여 구동되는 선형 시스템의 점근 안정성을 검토 분석하고, 제시된 제어입력이 기존의 최대최소 제어입력에 비하여 채터링 현상을 줄임을 보이고, 기존의 외란 관측기만을 사용하였을 경우의 제어입력 (11) 과도 그 성능을 비교함으로써 제안된 제어방법의 우수한 성능을 비교, 검토한다.

### III. 컴퓨터 모의 실험

본 절에서는 제안된 제어방법의 유용성을 입증하기 위하여 기존의 잘 알려진 최대최소 제어법칙[8]과 컴퓨터 모의 실험을 통하여 그 성능을 비교 분석한다.

(1)에서 시스템 행렬과 시변 외란 함수는 다음과 같다고 가정한다.

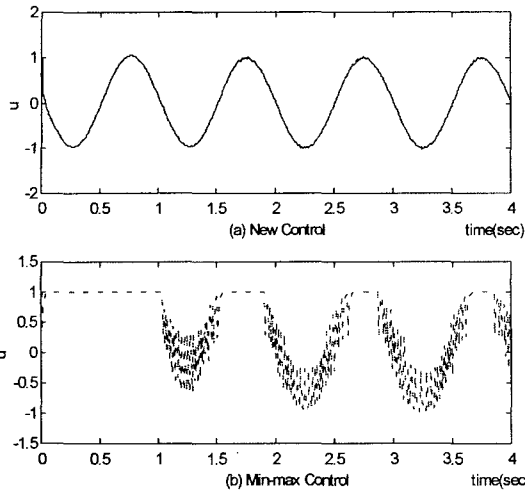


그림 5. 제어 입력의 궤적(필터링한 경우).  
Fig. 5. The trajectories of filtered control inputs.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \sin(2\pi t)$$

행렬  $A$  가 불안정 행렬이므로, 편의상 제어 이득  $K_C = [-110 \ -10]$  로 한다. 그러면, 다음과 같은 양한정 행렬  $P$  와  $Q$  에 대하여 (10)이 만족된다.

$$A - BK_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 6.2625 & -25 \\ -25 & 126.25 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

불확실 함수  $f(t) = \sin(2\pi t)$  이므로, 가정 1 과 가정 2를 만족시키는 한계값은 다음과 같다.

$$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 2\pi$$

성능비교를 위한 최대 최소 제어 입력은 다음과 같이 정의한다.

$$u(t) = \begin{cases} -K_C x(t) - \epsilon_1 \frac{B^T P x(t)}{B^T P x(t)}, & \text{if } B^T P x(t) \neq 0 \\ -K_C x(t), & \text{if } B^T P x(t) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

마지막으로 외란관측기의 관측 이득  $K$  는 150 으로 한다. 그림 2는 외란관측기의 출력만으로 구성된 제어입력, (11) 과 본 논문에서 제시한 제어 방법, (20)과의 성능비교를 나타낸다. 예상했던 것처럼 외란관측기만을 사용하였을 경우에는 상태변수는 정상상태 오차가 존재하나, 본 논문에서 제시한 (20)의 제어입력에 대하여서는 점근안정화가 보장됨을 알 수 있다. 그림 3은 (31)로 주어지는 최대최소 제어입력만을 이용한 경우와 (20)으로 주어지는 제어입력에 대한 성능비교로서 상태변수의 궤적을 나타낸다. 또한, 그

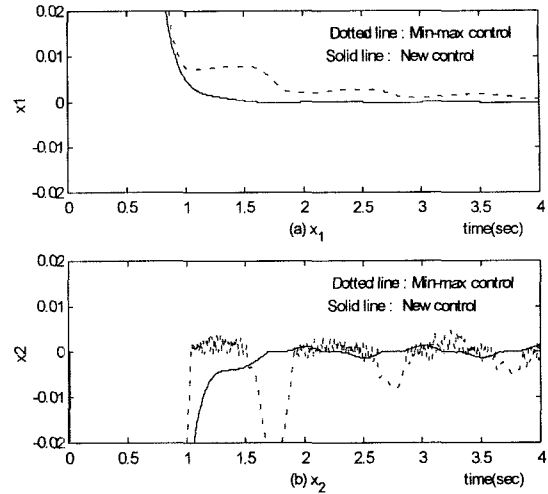


그림 6. 상태변수의 궤적(필터링한 경우).  
Fig. 6. The trajectories of state variables(filtered input case).

그림 4 는 제어 입력에 대한 그래프로 (31)으로 주어지는 최대최소 제어입력은 구현시 제어기에 과도한 스위칭을 요구하는데 반해, (20)으로 주어지는 방법은 스위칭을 거의 요구하지 않으며, 따라서 채터링 현상을 현저히 줄임으로써 원하는 성능을 유지할 수 있다. 그림 5와 그림 6은 제어기에 스위칭으로 인한 제어입력의 불연속성을 필터링하기 위하여 저주파 필터가 추가된 경우의 성능 비교이다. 본 컴퓨터 모의실험에서는 저주파 필터의 전달함수가  $\frac{70}{s+70}$  인 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다. 그림 5 에서보면 알 수 있듯이 제안된 방법이 기존의 최대 최소 방법에 비하여 필터링된 경우에도 우수한 성능을 보임을 알 수 있다.

IV. 결론

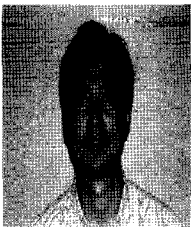
본 논문에서는 시변 외란이 존재하는 선형 시스템의 점근안정화 문제를 다루었다. 본 논문에서는 시변 외란을 외란관측기법을 이용하여 추정하여 입력에서 빼 줌으로써 외란의 영향을 억제하고, 외란 추정 오차에 의해서 발생하는 점근안정화 제어 오차를 최대최소 제어를 설계하여 제거함으로써 점근안정화를 가능하게 하였다.

본 논문에서 설계한 외란 관측기는 저주파 필터의 형태를 가지며, 따라서 추정 오차가 존재한다. 본 논문에서는 이러한 관측기의 추정오차의 한계값을 수학적으로 해석하였으며, 이를 이용하여 점근안정화를 보장하는 최대최소 제어 입력을 설계하였다. 최대 최소 제어입력은 스위칭을 요구하며, 그 스위칭 크기는 시변외란의 변화율에 비례하고, 외란관측기 이득에 반비례한다. 만약 외란관측기의 관측이득  $K$  를 키우면 이 스위칭 크기도 작게 함으로써 실제 구현시 스위칭으로 인한 채터링 현상을 줄일 수 있어서 이론적으로 예상한 결과를 실제 구현시 보장할 수 있다. 그 이유는 외란 전체의 유한값을 이용하는 최대최소방법에 비하여 외란 추정값의 오차의 유한값을 이용함으로써 그 크기를 현저히 줄일 수 있기 때문이다. 기존의 최대최소제어 방법에서는 전체 외란의 크기를 이용하여 제어입력을 구현

함으로써 심한 스위칭을 요구하게 되고, 따라서 실제 구현 시에 많은 문제점을 유발시켰다.

#### 참고문헌

- [1] M. T. White, M. Tomizuka, and C. Smith, "Improved track following in magnetic disk drives using a disturbance observer," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 5, pp. 3-11, Mar. 2000.
- [2] B. K. Kim, H. T. Choi, W. K. Chung, and I. H. Suh, "Analysis and design of robust motion controllers in the unified framework," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 124, pp. 313-321, 2002.
- [3] S. Komada, N. Machii, and T. Hori, "Control of redundant manipulators considering order of disturbance observer," *IEEE Trans. Ind. Electron*, vol. 47, pp. 413-420, Apr. 2000.
- [4] Y. J. Choi, W. K. Chung, and Y. Youm, "Disturbance observer in  $H^\infty$  frameworks", *IEEE IECON*, pp. 1394-1400, 1996.
- [5] H. A. Zhu, G. S. Hong, C. L. Teo, and A. N. Poo, "Internal model control with enhanced robustness," *International Journal of Systems Science*, vol. 26, no. 2, 277-293, February 1995.
- [6] K. Ohnishi and K. Miyachi, "Adaptive DC servo drive control taking force disturbance suppression into account", *IEEE Transactions on Industry Application*, vol. 24, no.1 1998.
- [7] C. H. Yim, J. H. Kang, S. H. Song, and D. I. Kim, "New feedforward control of brushless DC motors using a novel disturbance suppressor", *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, pp. 1910-1916, Oct. 1995.
- [8] S. Gutman, "Uncertain dynamical systems-a lyapunov min-max approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 24, no. 3, pp. 437-443, 1979.
- [9] M. Corless, "Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 64, no. 3, pp. 481-494, 1990.
- [10] B. R. Barmish, M. Corless and G. Leitmann, "A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems," *SIAM Journal of Control, Optimization*, vol. 21, no. 4, pp. 246-255, 1983.
- [11] C. T. Chen, *Linear system theory and design*, 3rd ed. Oxford, 1999.
- [12] V. M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1978.



송 성 호

1964년 10월 2일생. 1987년 서울대 제어계측과 졸업. 동대학원 석사(1991), 동대학원 박사(1995). 1996년-현재 한림대학교 정보통신공학부 부교수. 관심분야는 제어 이론 및 응용, 광메카트로닉스, 비선형 제어



김 백 섭

1955년 11월 4일생. 1978년 한양대학교 전자공학과 졸업. 한국과학기술원 산업전자공학과 석사 (1980). 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사(1985). 1987년-현재 한림대학교 정보통신공학부 교수. 관심분야는 패턴인식, 컴퓨터

비전.