

단단한 비전도 반평판 사이에서 미끄럼 운동하는 평판층의 열탄성 불안정성

하 태 원¹⁾ · 조 용 구¹⁾ · 김 흥 섭²⁾ · 이 정 윤³⁾ · 오 재 응^{*4)}

한양대학교 대학원 자동차공학과¹⁾ · 인제대학교 기계자동차공학부²⁾
· 경기대학교 기계시스템디자인공학부³⁾ · 한양대학교 기계공학부⁴⁾

Thermoelastic Instability of the Layer Sliding between Two Rigid Non-conducting Half-planes

Taewon Ha¹⁾ · Yonggoo Joe¹⁾ · Hungsub Kim²⁾ · Jungyoun Lee³⁾ · Jaeung Oh^{*4)}

¹⁾Department of Automotive Engineering, Hanyang University Graduate School, Seoul 133-791, Korea

²⁾School of Mechanical & Automotive Engineering, Inje University, Gyungnam 621-749, Korea

³⁾Department of Mechanical Engineering, Kyonggi University, Gyeonggi 442-760, Korea

⁴⁾School of Mechanical Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea

(Received 26 August 2003 / Accepted 28 November 2003)

Abstract : Frictional heating in brakes causes thermoelastic distortion of the contacting bodies and hence affects the contact pressure distribution. The resulting thermo-mechanical coupling can cause thermoelastic instability (TEI) if the sliding speed is sufficiently high, leading to non-uniform heating called hot spots and low frequency vibration known as hot judder. The vibration of brakes to the known phenomenon of frictionally-excited thermoelastic instability is estimated studying the interface temperature and pressure evolution with time. A simple model has been considered where a layer with half-thickness α slides with speed V between two half-planes which are rigid and non-conducting. The advantage of this properly simple model permits us to deduce analytically the critical conditions for the onset of instability, which is the relation between the critical speed and the growth rate of the interface temperature and pressure. Symmetrical component of pressure and temperature distribution at the layer interfaces can be more unstable than antisymmetrical component. As the thickness α reduces, the system becomes more apt to thermoelastic instability. For perturbations with wave number smaller than the critical m_{cr} the temperature increases with m vice versa for perturbations with wave number larger than m_{cr} the temperature decreases with m .

Key words : Disc brake(디스크 브레이크), Thermoelastic instability(열탄성 불안정성), Hot spot(열점), Brake judder(브레이크 저더), Critical speed(임계 속도), Growth rate(성장률)

1. 서론

자동차 기술의 진보에 따른 고속화 및 고출력화가 추진되면서 브레이크 시스템은 악조건에서 운전

되어야 하고 차량의 제동시 안정성 확보는 대단히 중요한 문제이다. 브레이크 시스템의 연구 개발에서는 열변형과 편마모, 소음과 진동의 발생, 과도한 온도상승으로 인한 열적 문제가 중요한 연구 대상이 되고 있다.

브레이크와 클러치 등 마찰에 의한 제동과 동력

*To whom correspondence should be addressed.
jeoh@hanyang.ac.kr

을 전달하는 장치는 마찰면에 국부적인 온도와 기계적 압력이 발생하여 마찰열의 집중되는 현상이 널리 알려져 있다. 두 물체가 상대속도 V 를 가지고 미끄럼 접촉을 하고 있을 때 마찰면에서 생성된 열속 q 는 접촉 압력 분포 p 에 비례한다. 일반적으로 표면의 요동, 거칠기, 기하학적 불안정성 그리고 기계적 진동 때문에 접촉압력은 균일하지 않다. 결과적으로 열속은 접촉 경계면의 불균일한 열변형을 야기하고 이로 인한 접촉 압력 분포가 불균일해진다. 이에 따라 마찰력의 변화가 생기게 되어 온도 섭동을 야기하여 열변형에 의한 국부적인 접촉이 발생한다. 만약 로터가 임계속도보다 낮은 속도로 미끄럼 운동을 하고 있을 때 열섬에 추가적인 에너지가 입력되는 것에 비해 더 빠르게 주위의 재료로 에너지를 소산시킨다. 그러나 로터가 임계속도보다 높은 속도로 미끄럼 운동하면 열섬의 증가된 압력은 주위의 재료로 에너지를 소산시키는 것보다 더 빠르게 열섬에 더 많은 에너지의 입력을 야기한다.¹¹⁾ 이러한 접촉 마찰열과 열적-기계적 변형 사이의 상호 피드백(feedback) 이득(gain)이 양의 값을 가지면 접촉 압력의 크기가 시간에 따라 증가하여 마찰에 의한 열탄성 불안정성(TEI)으로 알려진 불안정을 야기할 수도 있다. 주변 매질로 소산되는 에너지와 열섬으로 입력되는 에너지가 평형상태에 도달할 때까지 열섬은 계속적으로 온도와 두께의 증가를 야기한다. 이러한 불안정성은 항공기나 자동차 브레이크와 클러치와 같은 고성능 시스템의 설계 제약 조건으로 작용한다. 열탄성 불안정성의 발생은 브레이크에 높은 온도와 압력이 가해지는 작은 영역인 열섬의 형성을 유발할 수도 있다. 이는 마모율을 증가시키고 열-기계적 손상, 진동·소음, 열적 균열 발생의 근본적인 메커니즘으로 작용한다. 그러므로 열탄성 불안정성은 열탄성 접촉 문제에 대한 최근 연구의 주요한 동기가 되고 있으며 오랜 시간 동안 관심의 대상이 되어 왔다.

Burton¹⁾ 등은 열탄성 불안정성의 발생 예측을 위한 해석적 모델을 처음으로 제안했다. 만약 미끄럼 속도 V 가 재료의 물성치, 형상 등의 함수인 임계속도 V_c 보다 높을 때 시스템이 불안해진다는 임계속도를 도입했다. 그러나 이 모델은 브레이크의 두께

를 고려하지 않았기 때문에 임계 속도가 실제보다 높게 평가된다. 이런 문제점을 해결하기 위해 디스크 두께의 영향을 고려한 모델이 Lee와 Barber²⁾에 의해 제안되었다. 이 모델로 열탄성 불안정성 최초 발생을 예측할 수 있는 임계 조건들을 추정하는데 기여하였다. Floquet와 Dubourg^{3,4)}은 축대칭성을 갖는 물체의 열 해석을 빠른 시간에 효율적으로 해석하는 방법인 FFT-FEM을 제안하여 수치적인 어려움을 제거하고 계산시간을 상당히 단축할 수 있음을 보였다. Kao와 Richmond⁵⁾은 디스크 브레이크의 열섬과 열간 저터를 일으키는 열탄성 불안정성 문제 해결을 위한 유한요소 해석 기법을 개발하여 적용하였고 실험적으로 비교 분석하였다. 국내에서는 여태인⁶⁾은 벤틸레이트 디스크 브레이크의 온도 해석을 위해 등가상수를 적용한 축대칭 모델을 적용하여 3차원 모델을 대체할 수 있는 기법을 연구하였다.

최근 성능향상에 따라 클러치와 브레이크의 미끄럼 작동 속도가 증가하였고 실제적으로 열탄성 불안정성에 대한 임계속도보다 고속으로 작동하고 있다. 그리고 전형적인 작동은 급제동 등의 혹독한 환경에서 작동이기 때문에 클러치와 브레이크는 과도 상황에서 지배적으로 작동한다.

본 연구에서는 브레이크 시스템의 열간 저터 현상을 파악하기 위한 기초 연구로 Barber와 Hector⁷⁾가 제시한 두 개의 단단한 비전도 반 평판 사이에서 미끄럼 운동하는 금속 판 모델을 기본으로 한 Ciavarella⁸⁾ 등의 연구를 기초로 마찰면 온도와 압력의 성장률과 임계 속도의 관계를 고찰하고 미끄럼 마찰 시스템의 과도적 진전에 관해 연구하였다.

2. 모델 및 정식화

본 연구에서 고려한 모델은 브레이크 디스크로 모사되는 두께 $2a$ 를 갖는 얇은 금속 평판층과 브레이크 패드로 모사되는 두개의 단단한(rigid) 비전도 반평면을 Fig. 1에 나타내었다. 금속 평판층(2)은 두 반평면(1)에 대해 상대 속도 V 로 운동하고 균일한 압력 p_0 는 마찰면 사이의 완전한 접촉을 가지게 하기 위해서 작용한다. 그리고 미끄럼 접촉 면에서 균일한 접촉 압력은 파수(wave number)가 m 인 정형 파

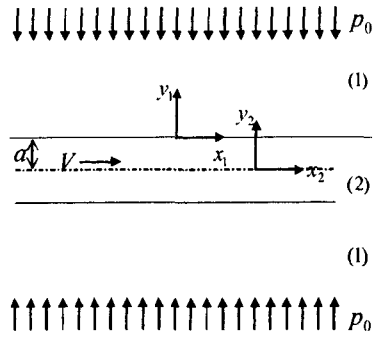


Fig. 1 A layer sliding with relative speed between two rigid and non-conducting half planes

의 중첩으로 섭동한다.

$$p(x, t) = p_0 e^{bt} e^{imx} \quad (1)$$

여기서, b 는 성장률을 i 는 허수단위이다.

Burton의 방법을 따라 섭동이 시간에 따라 지수적으로 성장한다는 섭동 기법을 통하여 시스템의 열탄성 불안정성을 연구하였다. 이러한 섭동의 속도는 x 방향에 대하여 절대 속도 c 이고 두 물체에 대하여 상대 속도 $c_i (i=1,2)$ 이다. Burton 등이 좋은 전도체에 대하여 압력 섭동이 거의 정제되어 있다는 것을 보였기 때문에 $c_2 \approx 0$ 이고 그에 따라 $c_1 = c = V$ 이다.

평판층의 중심 면에 대하여 시스템의 형상은 대칭적이지만 응력과 온도장은 대칭적이지 않다. 미소한 섭동이라는 가정하에서 선형성은 보장되며 임의의 섭동은 대칭적인 성분과 반대칭적인 성분의 중첩으로 표현이 가능하다. 가장 높은 성장률 b 를 가지는 섭동이 다른 낮은 성장률의 섭동에 비하여 가장 지배적이다.

미끄럼 접촉면에서 발생하는 마찰열 q_y 는 반 평판들이 비전도체이기 때문에 전도체인 평판층에만 가해진다.

$$q_y = q_{y_2} = \left. \frac{-K_2 \partial T_2}{\partial y_2} \right|_{y=0} = fVp_0 e^{bt} e^{imx} \quad (2)$$

여기서, K_2 는 열전도도, f 는 마찰계수이다.

일반적으로 브레이크 시스템의 마찰계수는 보통 0.3~0.4 구간에서 변동하는 경향이 있다. 그러나 본 연구에서 과도 진전 경향을 보기 위한 것이기에 마

찰계수는 동일한 상황에서 수행하였다. 그리고 열전도 방정식인 식 (3)의 해로 구해진 불균일한 온도 분포는 식 (4)의 형태이다. 실제 브레이크 시스템은 전도, 대류, 복사에 의해서 열을 소산된다. 그 중 본 연구에서는 열탄성 불안정성에는 큰 영향을 미치지 않는 대류와 복사항을 제외한 열적 지배 방정식으로 전도항만을 고려하였다.

$$k_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (3)$$

여기서, k_2 는 열확산계수이다.

$$T_2 = T_0 e^{bt} e^{imx} \quad (4)$$

2.1 대칭인 경우

온도분포가 대칭인 경우 Lee와 Barber²⁾에 의해 알려진 금속판(2)의 온도장은 식 (5)로 나타낼 수 있다.

$$T_2(x, y, t) = \theta(y) e^{bt} e^{imx} = T_0 \frac{\cosh[\lambda_2(y+a)]}{\cosh[\lambda_2 a]} e^{bt} e^{imx} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } \lambda_2 = \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}$$

식 (5)를 식 (2)에 대입하면 식 (6)을 얻을 수 있다.

$$(K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2 a]) T_0 = fVp_0 \quad (6)$$

Lee와 Barber²⁾에 의해 알려진 바와 같이 마찰 패드는 비전도체이기 때문에 온도장은 금속 평판층에서만 섭동한다. 또한 마찰 패드가 단단하기 때문에 미끄럼 경계면에서 변위 u_x 와 응력 σ_{xy} 는 0이다. 온도 섭동 $T_2(x, y, t)$ 는 식 (7)로 표현되는 미끄럼 경계면의 압력 분포를 야기한다.

$$p(x, t) = p_0 e^{bt} \cos(mx) \quad (7)$$

$$p_0 = \frac{8\beta Gm}{(x+1) \sinh[2ma]} \int_{-a}^a \cosh[m(s_2 \pm a)] \theta(s_2) ds_2 \quad (8)$$

여기서, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: 전단계수(shear modulus)

$$\beta = \begin{cases} a \text{ planestress} \\ a(1+\nu) \text{ planestrain} \end{cases}$$

$$\nu = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ planestress} \\ 3-4\nu \text{ planestrain} \end{cases}$$

식 (8)에서 부호의 선택은 무관하며 미끄럼 경계면에 고정된 참조 좌표에 대하여 식 (8)을 나타내면 식 (9)와 같다.

$$p_0 = \frac{8\beta Gm}{(x+1)\sinh[2ma]} \int_{-2a}^0 \cosh[m(s\pm a)]\theta(s)ds \quad (9)$$

식 (5)로부터 $\theta(y)$ 를 식 (9)에 대입하여 적분하고 정리하면 식 (10)으로 나타낼 수 있다.

$$p_0 = \frac{8\beta GmT_0}{x+1} \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (10)$$

식 (10)을 식 (6)에 대입하여 정리하면 특성 방정식 (11)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & (K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2]) \\ & = f\nu \frac{8\beta Gm}{k+1} \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

물성치와 형상이 정해지면 식 (11)에서 미끄럼 속도 ν 는 성장률 b 의 함수인 파장 λ_2 에 의존한다. 평면 변형을 상태라고 가정하면 식 (11)은 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2 a] \\ & = \frac{fYm}{k_2} \tilde{H}_2 \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{여기서, } \tilde{H}_2 = \frac{2\alpha(1+\nu)Gk_2}{K_2(1-\nu)}$$

파장 λ_2 에 관한 식을 성장률 b 로 나타내어 식 (12)에 대입하여 미끄럼 속도 ν 에 관하여 나타내면 식 (13)을 얻는다.

$$V = \frac{b\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh\left[a\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}\right]}{mf\tilde{H}_2\left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth[ma] \tanh\left[a\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}\right] - m\right)} \quad (13)$$

식 (13)에 $b \rightarrow 0$ 일 때의 속도가 임계 속도로 연산 결과 식 (14)를 얻을 수 있다. 즉 $b > 0$ 일 경우 불안정한 섭동이 발생한다.

$$V_{cr} = \frac{4k_2 m \sinh^2[ma]}{f\tilde{H}_2(2ma + \sinh[2ma])} \quad (14)$$

2.2 반대칭인 경우

온도분포가 반대칭인 경우 Lee와 Barber²⁾에 의해

알려진 평판 층(2)의 온도장은 식 (15)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} T_2(x, y, t) &= \theta(y)e^{bt}e^{imx} \\ &= T_0 \frac{\sinh[\lambda_2(y+a)]}{\sinh[\lambda_2 a]} e^{bt}e^{imx} \end{aligned} \quad (15)$$

또 대칭적인 경우와 유사하게 접촉 압력은 식 (16)으로 나타낼 수 있다. 그리고 동일한 방법으로 식 (15)와 식 (16)을 식 (2)에 대입하여 얻은 특성방정식을 식 (17)로 나타내었다.

$$p_0 = \frac{8\beta GmT_0}{x+1} \left(\frac{\lambda_2 \tanh[ma] \coth[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & K_2 \lambda_2 \coth[\lambda_2 a] \\ & = \frac{fYm}{k_2} \tilde{H}_2 \left(\frac{\lambda_2 \tanh[ma] \coth[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

대칭적 문제와 동일하게 미끄럼 속도를 성장률의 함수로 나타내면 식 (18)이고 $b \rightarrow 0$ 일 때의 속도, 즉 임계속도는 식 (19)로 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{b\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth\left[a\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}\right]}{mf\tilde{H}_2\left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh[ma] \coth\left[a\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}\right] - m\right)} \quad (18)$$

$$V_{cr} = \frac{4k_2 m \cosh^2[ma]}{f\tilde{H}_2(\sinh[2ma] - 2ma)} \quad (19)$$

2.3 무차원화

무차원화된 미끄럼 속도 $\tilde{\nu}$, 무차원화된 성장률 \tilde{b} 와 같이 무차원 변수를 도입하여 식 (13)과 식 (18)을 $\tilde{\nu}$ 와 \tilde{b} 의 관계로 나타내면 대칭적 조건에서의 무차원화된 미끄럼 속도, 반대칭적 조건에서의 무차원화된 미끄럼 속도를 각각 식 (20)과 식 (21)로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\nu}_{sym} = \frac{\tilde{b}\sqrt{1+\tilde{b}} \tanh[m\tilde{a}\sqrt{1+\tilde{b}}]}{f\tilde{H}_2(\sqrt{1+\tilde{b}} \coth[m\tilde{a}] \tanh[m\tilde{a}\sqrt{1+\tilde{b}}] - 1)} \quad (20)$$

$$\tilde{\nu}_{asym} = \frac{\tilde{b}\sqrt{1+\tilde{b}} \coth[m\tilde{a}\sqrt{1+\tilde{b}}]}{f\tilde{H}_2(\sqrt{1+\tilde{b}} \tanh[m\tilde{a}] \coth[m\tilde{a}\sqrt{1+\tilde{b}}] - 1)} \quad (21)$$

여기서, $\tilde{v} = \frac{V}{mk_2}$; $\tilde{b} = \frac{b}{m^2k_2}$

결과적으로 무차원화된 미끄럼 속도의 임계값은 아래의 식 (22)와 식 (23)으로 나타낼 수 있다.

$$(\tilde{V}_{cr})_{sym} = \left(\frac{V_{cr}}{mk_2}\right)_{sym} = \frac{4 \sinh^2[ma]}{f \tilde{H}_2(\sinh[2ma] + 2ma)} \quad (23)$$

$$(\tilde{V}_{cr})_{asym} = \left(\frac{V_{cr}}{mk_2}\right)_{asym} = \frac{4 \cosh^2[ma]}{f \tilde{H}_2(\sinh[2ma] - 2ma)} \quad (24)$$

2.4 온도장의 과도 진전(evolution)

Al-Shabibi와 Barber⁹⁾는 일정한 미끄럼 속도 조건에서 섭동의 과도 진전에 대한 일반해를 식 (25)와 같이 고유함수 급수로 표현했다.

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{b_i t} \theta_i(x, y, z) \quad (25)$$

여기서, n : 고유함수의 번호

C_i : 초기조건에 의한 임의의 상수

만약 최소한 하나의 고유치가 양의 값을 가지거나 복소수일 경우 실수부가 양의 값을 가질 경우 섭동은 구속 없이 성장하고 시스템은 불안정해진다. 가장큰 성장률의 실수값을 가지는 항이 과도 응답에 가장 지배적일 것이다. 그러므로 초기 섭동이 충분히 작을 때 가장 지배적인 항만을 고려하면 된다. 이를 식으로 표현하면 식 (26)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b_1 e^{b_1 t} \theta_1 = b_1 T \quad (26)$$

여기서, b_1 : 과도 상황을 좌우하는 성장률

이 결과는 암묵적으로 단지 접촉이 모든 시간에 걸쳐 유지되어 선형성이 보장되고 미끄럼 속도가 일정한 상황에서만 적용 가능하다. 그러나 속도가 변하는 문제의 근사적 해는 순간 속도 $V(t)$ 에서 지배적 성장률을 고려함으로써 정의할 수 있다. 그러므로 과도상황에서 압력과 온도장은 식 (27)과 식 (28)로 나타낼 수 있다.

$$T = T(0) \exp\left\{ \int_0^t b_1(V(t)) dt \right\} \quad (27)$$

$$P = P(0) \exp\left\{ \int_0^t b_1(V(t)) dt \right\} \quad (28)$$

식 (13)의 미끄럼 속도와 성장률의 관계식은 해석

적으로 역의 관계를 구하는 것이 불가능하기 때문에 미끄럼 속도의 변화가 선형적이라고 가정하면 식 (29)로 나타낼 수 있다.

$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \quad (29)$$

여기서, V_0 : 초기 미끄럼 속도

t_0 : 정지시까지 걸린 시간

식 (29)를 식 (13)에 적용하여 정리하면 식 (30)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{t}{t_0} \\ &= 1 - \frac{b \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh \left[\alpha \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right]}{m f \tilde{H}_2 V_0 \left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth [ma] \tanh \left[\alpha \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right] - m \right)} \end{aligned} \quad (30)$$

3. 결과

미끄럼 속도와 성장률 b 의 관계가 평판 층 두께 $2a$ 와 파수 m 의 함수로 표시되고 성장률이 0이 될 때의 속도인 임계속도의 거동을 살펴보았다. 그리고 접촉 면의 온도 분포는 시간의 함수로 주어진다. 급속 평판 층의 물성치는 자동차용 디스크 브레이크로 널리 쓰이는 주철을 사용하였고 이를 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Material properties for the metal layer

Properties	Value
Young's modulus (E)	$125 \times 10^9 \text{ MPa}$
Poisson's ratio (ν)	0.25
Coefficient of thermal expansion (α)	$1.2 \times 10^{-5} \text{ m/mK}$
Thermal conductivity(K)	54 W/mK
Thermal diffusivity (k)	$12.98 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

3.1 대칭과 반대칭 미끄럼 속도의 비교

파동 변수(wave parameter) ma 에 따른 무차원화된 임계 속도 $\tilde{V}_{cr} = V_{cr}/mk$ 를 Fig.2에 나타내었다. 대칭적 경우에 대한 임계 속도가 반대칭적 경우보다 더 낮게 나타난다. 이는 대칭적인 경우가 반대칭적 분포를 보이는 경우보다 더 빠르게 임계값에 도달함을 의미한다. 이는 Lee와 Barber가 실제 자동차

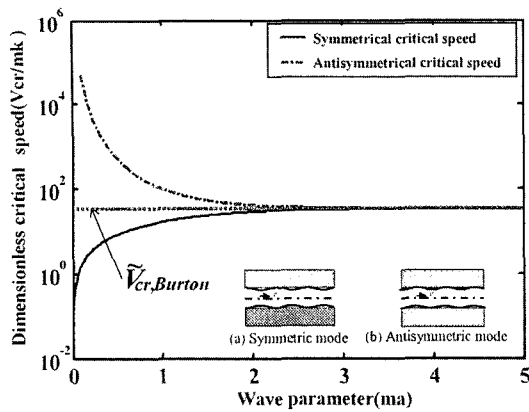


Fig. 2 A comparison between the dimensionless critical speeds for the symmetrical and antisymmetrical mode as a function of the wave parameter

브레이크 시스템에 사용되고 있는 패드와 디스크의 물성치로 예측한 결과와 상반되는 결과로 해석에 사용된 모델에서 단단한 반평판($E_1 \rightarrow \infty$)을 고려하였기 때문이다.

반무한 평판($a \rightarrow 0$)에 대한 Burton의 임계 속도 $V_{cr, Burton}$ 은 Fig.2에 점선으로 나타내었다. 두께가 증가하면 대칭인 경우와 반대칭인 경우가 모두 Burton의 예측식과 같은 형태로 나타난다.

실제 브레이크 시스템에서 마찰재의 열전도도가 디스크에 비해서 매우 작다. 그러므로 비전도체라는 가정은 결과에 실질적인 영향을 미치지 않는다. 대칭적 조건에 대하여 두께 a 가 감소함에 따라 단단한 반평판 사이의 금속 평판층이 압착하는 것이 훨씬 더 어려워진다. 이때 압력 섭동과 표면의 열변형에 의한 변위는 평판층의 반대쪽과 위상이 같다. 그리고 파장 변수 $ma=0$ 일 때 임계속도는 0으로 수렴한다. 반대로 반대칭 조건에 대하여 두께 a 가 감소함에 따라 평판층의 굽힘(bend)이 더 쉽게 일어난다. 이때 압력 섭동과 표면의 열 변형에 의한 변위는 층의 반대쪽과 반대의 위상이며 $ma=0$ 일 때 임계속도가 무한대로 발산한다. 패드의 마모를 줄이기 위해 마찰재로 충분히 딱딱한(rigid) 재질을 사용한 경우에 평판 층의 변형은 대칭적으로 나타난다. 본 연구에서는 이 결과를 바탕으로 가장 지배적인 모드인 대칭적 모드에 대해서만 고찰한다.

3.2 성장률

본 절에는 임계속도보다 더 큰 미끄럼 속도의 성장률에 대하여 평가한다. 이는 불안정성의 초기 발생이상에서 섭동의 성장 속도와 열점 형성에 의한 이 시스템의 열적-기계적인 손상 정도를 판단할 수 있다. 작동되고 있는 상황에서 온도 분포의 변화를 평가하기 위해서 각각의 미끄럼 속도에서의 성장률을 알아야 한다. 미끄럼 속도 V 의 함수로 표현된 성장률 $b(V)$ 는 식 (13)을 역변환하여 수치적으로 얻을 수 있다. 파장 변수 ma 가 작은 영역에서 성장률과 미끄럼 속도는 선형적인 관계를 나타내며 최소제곱법을 이용한 회귀식을 구성하여 문제를 단순화시켜 구할 수도 있다.¹⁰⁾

$a=0.02, 0.005$ 일 경우 4가지 조합을 각각 Fig.3에 나타내었다. 임계속도 V_{cr} 은 $b(V)$ 와 $b=0$ 인 V 층의 교점으로부터 결정된다. 금속 평판 층의 두께가 정해진 값을 가질 때 파수 m 이 증가할수록 임계속도가 증가한다. 즉 짧은 파장보다 긴 파장이 더 빠르게 임계 값에 도달한다. 그러나 두께가 정해진 값을 가지고 파수가 변할 때 미끄럼 속도가 충분히 클 경우에 대하여 낮은 파수(장파장)가 높은 파수(단파장)보다 더 지배적일 수도 있다. 또 파수가 정해진 경우에는 평판 층의 두께가 증가할수록 임계 속도 또한 증가한다. 즉 두께가 증가하면 시스템은 더 안정적일 수 있다.

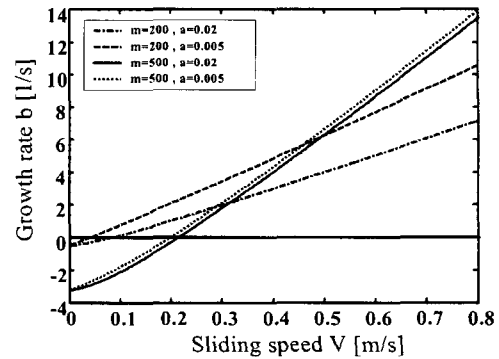


Fig. 3 Growth rate as a function of sliding speed

3.3 온도장의 과도 진전 해석

식 (30)을 (27)식에 적용하여 수치적으로 연산하여 $a=0.005[m]$ 이고 초기속도 $V_0=0.8[m/s]$ 일 때 파

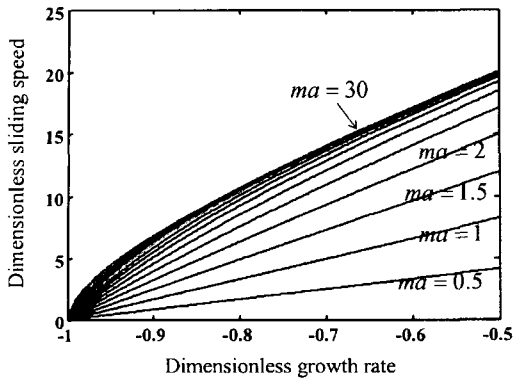
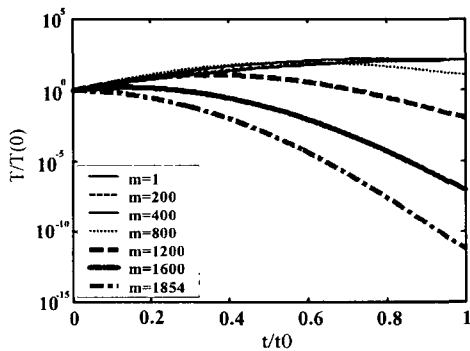
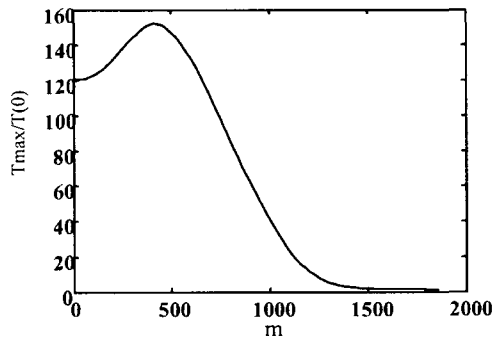


Fig. 4. Variation of the dimensionless growth rate with the sliding speed



(a) Transient evolution of the normalized temperature



(b) Maximum of the temperature perturbation

Fig. 5 Transient evolution of the temperature perturbation normalized w.r.t initial value for different values of the wave number as $a=0.005[m]$

수 m 의 변화에 따른 온도 분포의 과도 진전을 Fig.5(a)에 나타내었다. 온도의 진전량은 $T(0)$ 로부터 성장하여 최대값에 도달하고 시간이 흐름에 따라 감소한다. 이때 최대값과 최대값이 발생하는 시간

은 파수의 함수이다. 파장 m 이 $1854[m^{-1}]$ 보다 더 큰 경우에는 시간에 따라 온도가 감소하므로 모든 섭동들이 안정하다. 즉 미끄럼 속도가 항상 임계속도보다 작은 값을 가진다. 그리고 초기값에 대한 온도장의 최대값의 비를 파수 m 의 함수로 Fig.5(b)에 나타내었다. 파수 m 이 $400[m^{-1}]$ 보다 작은 영역에서는 고주파 섭동이 저주파 섭동보다 더 큰 영향을 미친다. 반대로 m 이 $400[m^{-1}]$ 보다 큰 영역에서는 저주파 섭동이 고주파 섭동 비해 시스템의 안정성을 저해한다. 다른 파수에 비해 지배적인 m_{cr} 이 $400[m^{-1}]$ 인 값을 가지는 섭동이 가장 지배적인 섭동이다. 그러나 브레이크 시스템에 적용하기 위하여 디스크를 유한 원형 확장하면 Lee와 Barber²⁾에 의해 밝혀진 적용 가능 최소 파장이 제한된다. 파장은 디스크의 발생한 열점의 수를 평균 반경으로 나눈 값으로 표현되는데 예를 들어 평균 반경이 $0.05[m]$ 이고 열점의 수가 1개일 때 m 이 $20[m^{-1}]$ 으로 디스크의 물리적 크기를 고려한 적합한 가장 작은 파수이다. 그러므로 파수 m 이 20보다 작은 값들을 가지는 섭동에 대해서는 고려할 필요가 없다. 무차원화 된 시간 ($\tau = k_2 m^2 t$)을 도입하여 식 (30)을 무차원화된 속도, 성장률과 파장변수(ma)로 표현하면 식 (31)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\delta \sqrt{1 + \delta \tanh[ma\sqrt{1 + \delta}]}}{f \bar{H}_2 \bar{V}_0 (\sqrt{1 + \delta \coth[ma] \tanh[ma\sqrt{1 + \delta}]} - 1)} \quad (31)$$

τ_0 이 3.82이고 $f \bar{H}_2 \bar{V}_0$ 가 10일 때 각각의 무차원화 된 파수인 파장변수 ma 에 대하여 무차원화 된 시간 τ 과 초기온도에 대한 온도비 $T/T(0)$ 의 관계를 Fig.6에 나타내었다. 이로부터 Burton의 모델은 디스크의 두께가 작은 경우에는 온도와 압력 섭동의 성장이 과소평가되었다는 것을 알 수 있고 ma 가 충분히 큰 경우에는 정확한 예측을 할 수 있다.

4. 결론

두개의 단단한 반평면 사이에서 미끄럼 운동하는 탄성 평판층 모델로 열탄성 불안정성에 대하여 해석을 수행하였다. 마찰계의 열전도도가 금속 디스크에 비해 아주 작은 값이므로 비전도 패드로 가정

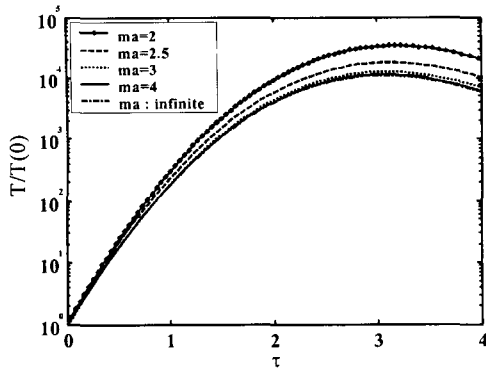


Fig. 6 Transient evolution with dimensionless time of the temperature perturbation normalized w.r.t initial value $T(0)$ for different values of the wave parameter

하여 해석을 수행한 것은 합당하다. 반평판과 그 사이에서 미끄럼 운동하는 평판층이 모두 탄성변형을 하고 전도체로 가정한 Lee와 Barber(2)의 모델에 비해 열유속이 평판층에 대하여 같은 상태를 유지하여 성장률과 임계속도의 관계를 닫힌 형식(closed form)으로 결정할 수 있고 미끄럼 운동을 하는 시스템의 과도 진전에 대한 연구를 가능하게 하는 장점이 있다.

본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) Burton의 해석 결과는 파장 변수 ma 가 충분히 큰 구간에서만 정확한 결과이고 이때 대칭 모드와 반대칭 모드는 Burton의 해와 일치한다.
- 2) 파장 변수 ma 가 작은 영역에서 성장률과 미끄럼 속도는 선형적인 관계를 나타내며 파장 변수 ma 가 증가할수록 임계속도가 증가한다.
- 3) 평판층의 두께가 감소함에 따라 임계속도는 감소하고 성장률은 증가한다. 즉 두께가 감소할수록 시스템은 열탄성적으로 불안정해지고 시스템에 열적-기계적 손상을 야기할 수 있다.
- 4) 저주파 섭동은 고주파 섭동에 비해 낮은 임계속도를 가지지만 고주파 섭동의 지수 성장률은 저주파 섭동에 비해 훨씬 더 빠르게 증가한다. 결과적으로 임계속도보다 충분히 큰 작동 속도에서는 고주파 섭동이 저주파 섭동보다 지배적일 것이다.
- 5) 과도 진전은 저주파 섭동에 대하여 증가하다 가장 지배적인 파장을 지나 고주파 영역으로 갈수록 감소하는 경향을 보인다.

References

- 1) T. A. Dow, R. A. Burton, "Thermoelastic Instability of Sliding Contact in the Absence of Wear," *Wear*, Vol.19, pp.315-328, 1972.
- 2) K. J. Lee, J. R. Barber, "Frictionally Excited Thermoelastic Instability in Automotive Disk Brakes," *Journal of Tribology*, Vol.115, pp.607-614, 1993.
- 3) A. Floquet, M. C. Dubourg, "Nonaxisymmetric Effects for Three Dimensional Analysis of Brake," *Journal of Tribology*, Vol.116, pp.401-408, 1994.
- 4) A. Floquet, M. C. Dubourg, "Realistic Braking Operation Simulation of Ventilated Disk Brakes," *Journal of Tribology*, Vol.118, pp.466-472, 1996.
- 5) T. K. Kao, J. W. Richmond "Brake Disc Hot Spotting and Thermal Judder : an Experimental and Finite Element Study," *Int. J. of Vehicle Design*, Vol.23, Nos.3/4, pp.276-297, 2002.
- 6) T. I. Yeo, "Axisymmetric Temperature Analysis of Ventilated Disk using Equivalent Parameters," *Transactions of KSAE*, Vol.11, No.1, pp.137-142, 2003.
- 7) J. R. Barber, L. G. Hector "Thermoelastic Contact Problems for the Layer," *ASME J Appl. Mech.*, Vol.66, pp.806-809, 1999.
- 8) L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, G. Demelio "Thermoelastic Instability in a Thin Layer Sliding Between Two Half Planes: Transient Behaviour," *Tribology International*, Vol.36, pp.205-212, 2003.
- 9) A. M. Al-Shabibi, J. R. Barber, "Transient Solution of a Two-Dimensional TEI Problem Using a Reduced Order Model," *Int. J. of Mech. Sciences*, Vol.44, pp.451-464, 2002.
- 10) L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, G. Demelio, "Transient Analysis of Frictionally Excited Thermoelastic Instability in Multi-Disk Clutches and Brakes," *Wear*, Vol.254, pp.136-146, 2003.
- 11) D. L. Hartsock, J. W. Fash, "Effect of Pad/ Caliper Stiffness, Pad Thickness, and Pad Length on Thermoelastic Instability in Disk Brakes," *Journal of Tribology*, Vol.122, pp.511-518, 2000.