

공간구조물의 비선형해석과 불안정현상

Nonlinear Analysis and Instability of Spatial Structures



손수덕*

Shon, Su-Deok

1. 서론

인간이 창조된 이후로 그들은 무한한 시간의 인류역사 속에서 변화하며 살아나가는 형태로 생존해 갔다. 반면 시간의 흐름이라는 차원에서 보면 건축은 인류의 역사 속에서 생겨나고, 인류역사의 변천과 진화는 문화의 변화와 더불어 건축의 다양성도 더해져 가는 모습으로 비춰진다. 이러한 건축의 다양성은 인류의 지혜와 도전에 의해 공간에 대한 끊임없는 확장으로 변화되었으며, 지식의 축적을 기반으로 하는 인간의 특성과 과학, 기술의 발전으로 대규모 공간으로의 변화는 실현화되기 시작하였다. 대규모 구조물의 안전한 구축을 위한 학자들과 기술자들의 노력은 시대가 흐름에 따라 다양한 형태로 발전·변화해 왔다. 그럼에도 불구하고 무수한 구조물의 사고는 존재해 왔으며, 이들의 사고원인을 분석하고 규명하는 것이 건축기술의 발달에 많은 영향을 가져왔다. 이로 인해 구조물의 안정과 불안정에 대한 문제는 원인분석과 규명을 하는데 있어서 한 분야를 차지하고, 불안정현상의 특성과 거동을 분석함으로써 문제의 원인과 대처방법을 고안해

낼 수 있게 되었다.

대규모 공간을 형성하는 구조물 중에서 무주의 대공간을 구축하기 위해서는 일반적으로 셸 구조원리를 이용한다. 곡률을 가진 곡면구조 형태인 셸 구조는 외부 하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 가볍고 얇게 대공간을 만들 수 있는 장점을 갖고 있다. 또한, 기본적인 구조저항 메커니즘은 구조물 자체의 곡률을 이용하여 면외방향으로 작용하는 외력을 주로 면내력으로 저항할 수 있게 한 구조 시스템이다. 이런 셸 형태로 만들어진 공간구조물은 경제적이라는 장점과 함께 구조불안정이란 중요한 문제를 가지고 있다. 즉, 연속체 셸 구조의 원리에서 긴 경간을 얇게 만들면 필좌굴(Snap-through) 및 분기좌굴(Bifurcation) 등과 같은 불안정거동이 나타나게 된다. 또한 셸형 구조시스템의 구조불안정 문제의 중요한 특징은 초기조건에 매우 민감하게 반응한다는 것이고, 이러한 문제들은 수학적으로는 비선형 문제에 귀착하게 된다.^{[3],[4],[5],[9]}

본 고에서는 구조물에서 나타나는 불안정현상을 선형연구를 중심으로 기술하며, 공간구조물에 대한 비선형 해석기법에 따른 불안정현상의 분별과 초기

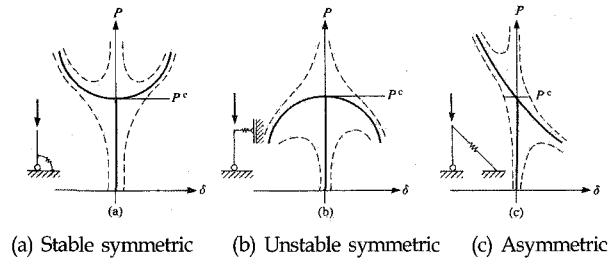
* 경북대학교 건축공학과 시간강사, 공학박사

불완전(Initial imperfection)에 따른 분기거동을 예제를 통해서 소개하고자 한다.

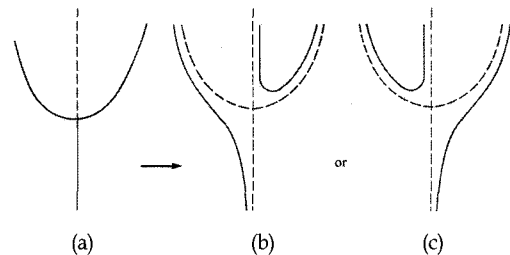
2. 불안정현상의 종류와 민감한 구조물

구조물의 하중-변위 곡선은 구조물의 평형 특성을 나타내며, 구조물의 불안정거동을 파악하는데 있어서의 중요한 개념의 하나이다. 불안정현상을 하중-변위관계 곡선으로 분류하면, 일반적으로 뿔좌굴, 분기좌굴, 굴복좌굴로 말할 수 있다. 비선형의 "Softening"한 특성을 갖는 구조물은 하중이 증가함에 따라 극한점(Limit point)에서 강성을 상실하게 되며, 이때 미소한 하중변화에 대해서도 동적효과를 나타내어 새로운 평형점으로 이동하게 되는 현상을 뿔좌굴 또는 극한점 불안정이라고도 불린다. 분기좌굴 현상은 하중이 어떤 레벨에 도달하면, 지금까지의 변형과는 다른 형태의 변형양식이 나타나, 변형 모드가 새로운 변형양식으로 이동하는 불안정 현상을 말하며, 구조공학에 있어서 분기좌굴 현상은 하중에 의한 변위의 형태가 축대칭에서 비축대칭으로 변화하거나, 면외방향으로 변위 요소가 발생하는 경우로 설명할 수 있다. 분기 현상에서의 주경로는 2차적인 경로에 의해 교차하게 되는데 평형경로를 교차하여 분기가 일어나는 점을 분기점(Bifurcation Point)이라 하며, 이러한 분기점에서의 평형방정식은 각 분기에 대응하는 다수의 해를 갖는다. 그리고 굴복 현상은 얇고 긴 원통이 휨변형을 받았을 때, 단면강성의 저하로 인하여 하중-변위 관계 곡선이 최대점을 나타내는 현상이며, 최대점 이후에는 불안정한 상태가 되는 것을 말한다.

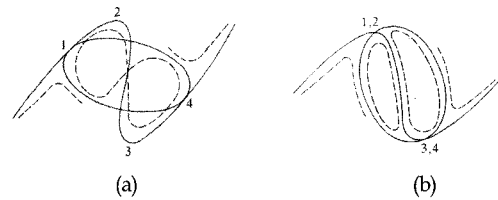
구조물의 하중-변위 곡선에 대해서 그림1의 경우를 살펴보면, 임계후거동의 세가지 형태를 볼 수 있고, 그림에서 실선은 완전형상일때, 점선은 불완전형상의 경로를 나타낸 것이다. 그림1(a)는 임계점에 도달했을 때 분기현상이 일어나며, 이후의 진행경로는 안정대칭(Stable symmetric)의 거동을 보이며, 그림1(b)의 경우는 그림1(a)의 경우와 임계점 이전의 거동이 같지만, 임계후거동은 불안정대칭(Unstable symmetric)의 거동을 보인다. 그러나, 그림1(c)에서 나타나는 평형경로는 비대칭(Asymmetric)으로 나타나며, 구조물의 초기



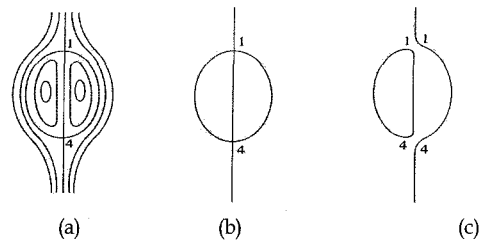
〈그림 1〉 임계후거동



〈그림 2〉 대칭분기의 두가지 변화



〈그림 3〉 형상 불완전과 주경로의 분기과정



〈그림 4〉 주경로로부터 분기된 불완전 궤적

조건에 의해 안정경로와 불안정경로가 결정된다. 이때, 그림1(c)의 경우를 초기불완전에 민감한 구조물이라 말한다.^[8]

분기경로에 대한 비선형 불안정 해의 집합중 하나를 살펴보면, 그림3에서 보는 것과 같이 초기 불완전성을 지닌 고립된 해(isolated solution)를 찾아볼 수가 있다. 이러한 고립된 해는 섭동분기와 같이 해석적이고 특이점의 점침이 없는 위상적인 관점으로 볼 수 있으며, 그림2(a)에서 초기 불완전형

상으로 인한 경로는 그림2(b), 그림2(c)의 대칭적 불완전시스템(imperfect system)로 진행된다. 이런 종류의 해에 있어서 특별한 경우를 살펴보면 그림3의 주경로와 주경로상의 분기점을 가지는 경우를 볼 수 있다. 그림에서 보는 2와 3번점은 주경로의 극한점을 나타내며 1과 4번점은 분기경로와 주경로가 만나는 분기점이 된다.

해의 비선형거동에 있어서 2번 극한점 이전에 1번의 분기점이 존재하는 경우의 불완전한 형상의 고려는 점선과 같이 분기경로로의 진행되는 해를 얻을 수 있으며, 분기계적상에서 8자형(Spatial eight)의 고립된 고리를 발견할 수 있으나, 분기가 극한점에서 발생하는 경우, 그림3(b)에서 보는 바와 같이 고립된 고리의 해의 형태는 매우 단순해지며, 그림4에서 나타나는 궤적을 보인다. 이러한 궤적에 대해 앞서 보여진 그림2와 같이 불완전성에 대한 해는 그림4(c)와 같은 형태로 나타나며, 이 때의 고립된 해는 불완전량에 의해 점차 오그라들 것이다.¹⁸⁾ 이와 같이 분기경로와 민감성은 서로 밀접한 관계가 있으며 초기 형상의 불완전성이 다양한 분기경로의 방향을 결정하게 되는 요인이 된다.

3. 비선형 해석기법과 불안정 거동의 판별

구조물의 비선형 다원 연립방정식의 일반적인 형태를 식(1)과 같이 tensor로 나타내면, 연립 비선형방정식을 풀어서 하중-변위 관계를 구하는 문제에 귀착된다. 그러나 자유도가 증가하면 식(1)을 풀어서 해를 얻는다는 것은 불가능하게 되고, 여러 가지 근사해법을 이용하여야 한다.

$$f_m(D_i, \Lambda) \equiv K_{mi} D_i + K_{mij} D_i D_j + K_{mijk} D_i D_j D_k + \dots + \Lambda(F_m + F_{mi} D_i + F_{mij} D_i D_j + \dots) = 0 \quad (1)$$

(m=1, 2, ..., n)

D_i (i=1,2, ..., n) 변위, Λ : 하중파라미터, K: 강성계수, F: 하중모드, n: 자유도

(D_i^0, Λ^0) 를 기준으로 (d_i, λ) 만큼 증분한 상태 (D_i, Λ) 에서 식(1)을 만족하는 새로운 평형 상태를 추적하여 $f_m(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) - f_m(D_i^0, \Lambda^0)$ 를 계산하면,

$$K_{mi}^0 d_i + K_{mij}^0 d_i d_j + K_{mijk}^0 d_i d_j d_k + \dots + \lambda(F_m^0 + F_{mi}^0 d_i + F_{mij}^0 d_i d_j + \dots) = 0 \quad (2)$$

여기서,

$$K_{mi}^0 = K_{mi} + (K_{mij} + K_{mji}) D_j^0 + (K_{mijk} + K_{mkij} + K_{mjki}) D_j^0 D_k^0 + \dots + \Lambda^0 \{F_{mi} + (F_{mij} + F_{mji}) D_j^0 + \dots\}$$

$$K_{mij}^0 = K_{mij} + (K_{mijk} + K_{mjki} + K_{mkij}) D_k^0 + \dots$$

$$F_m^0 = F_m + F_{mi} D_i^0 + F_{mij} D_i^0 D_j^0 + \dots \quad (3)$$

$$F_{mi}^0 = F_{mi} + (F_{mij} + F_{mji}) D_j^0 + \dots$$

식(2)는 식(1)의 비선형방정식을 증분방정식으로 나타낸 것이고, 각 증분구간에서의 기초방정식의 각 계수는 식(3)에서와 같이 기준상태의 변위 D_i^0 및 하중파라미터 Λ^0 를 포함하는 식으로 표현되어 있다. 또 식(2)는 미지수 중 1개를 선택하여 임의 값을 주어야 할 필요가 있으며, 미지수가 하중파라미터 λ 일때 하중증분형, 변위 d_i 일때 변위증분형이 된다.

각 미지수가 새로운 파라미터 t 의 함수일 경우를 생각할 때 식(2)는 t 의 함수가 된다.

$$K_{mi}^0 d_i(t) + K_{mij}^0 d_i(t) d_j(t) + K_{mijk}^0 d_i(t) d_j(t) d_k(t) + \dots + \lambda(t)(F_m^0 + F_{mi}^0 d_i(t) + F_{mij}^0 d_i(t) d_j(t) + \dots) = 0 \quad (4)$$

식(4)의 (d_i, λ) 를 구하기 위해, 변위와 하중파라미터를 Maclaurin 전개하면,

$$d_i(t) = d_i(0)t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i(0)t^2 + \frac{1}{6} d_i^{(3)}(0)t^3 + \dots \quad (5)$$

$$\lambda(t) = \lambda(0)t + \frac{1}{2}\lambda''(0)t^2 + \frac{1}{6}\lambda'''(0)t^3 + \dots \quad (6)$$

위 식에서 적당한 t 값을 선정하고 d_i, λ, \dots 를 구하면, 미지값 d_i, λ 가 얻어진다. 식(5),(6)을 식(4)에 대입하고, t 의 각 차수에 관하여 각 계수를 정리하면,

$$K_{mi}^0 d_i + F_m^0 \lambda = 0 \quad (7)$$

$$K_{mi}^0 d_i + K_{mij}^0 (2d_i d_j) + F_{mi}^0 (2\lambda d_i) + F_m^0 \lambda = 0 \quad (8)$$

...

식(7)은 d_i, λ 에 관한 선형방정식이므로 쉽게 해를 얻을 수 있고, 얻어진 d_i, λ 를 식(8)에 대입하면 d_i, λ 에 관한 선형방정식이 되며, 역시 해가 얻어진다. 이러한 순서로 계속적으로 반복하면, $(d_i, \lambda), (d_i, \lambda) \dots$ 순으로 구할 수 있고, 이를 식(5),(6)에 대입하면 (d_i, λ) 가 얻어지며, $D_i = D_i^0 + d_i, \Lambda = \Lambda^0 + \lambda$ 로 부터 (D_i, Λ) 가 구해진다.

이상과 같이, 섭동법(static perturbation method)은 임의 하중레벨에서의 변형 상태를 이용하여, 다음 증분 단계에서는 1차 근사, 2차 근사 등을 구해 새로운 변형 상태를 추적해 나가며, 이를 반복 수행하여 변형의 전 과정을 구하는 해석법이다. 그러므로 각 증분구간에서 오차를 가능한 줄이고, 증분구간은 크게 하여 증분수를 줄일 수 있는 비선형 해석기법이다.

식(7)의 선형화된 비선형 증분방정식을 다음과 같이 변형시켜 나타낸다.

$$\lambda F = K d \quad K = [K_1 K_2 \dots K_n] \quad (9)$$

위 식은 증분구간에서 부분적으로 선형화한 것을 나타내고, 기하학적 비선형 해석에서 많이 이용되고 있는 증분방정식이다. 여기서, 파라미터 t 를 변위벡터 d 중의 1개, 가령 d_1 을 선택하면 변위증분법에 관한 기초방정식이 된다. 즉, $t = d_1$ 이다.

식(9)에서 강성매트릭스 K 를 열벡터로 분해하

여 변형시켜 선택된 미지수를 식(5),(6)에 대입하여 얻은값을 이용하면,

$$d_1(-K_1) = [-F \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \begin{pmatrix} \lambda \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

식(10)이 변위증분법의 기초방정식이고, 변위증분 d_1 에 대응하는 하중파라미터의 증분 λ 와 d_1 이외의 변위증분 $d_2, d_3 \dots d_n$ 을 구할 수 있다.

비선형 평형레도의 각 증분구간에서 접선강성방정식을 이용하여 임계하중에 도달하였을 때의 좌굴점을 분류하기 위하여 식(9)의 제1섭동방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$K d + f \lambda = 0 \quad (11)$$

여기서, 접선강성행렬 K 는 보존계에서는 대칭행렬이고, 서로 직교하는 직교변환행렬이 존재하므로, 따라서 대각화가능행렬이 된다. K 의 n 개의 고유치를 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$ 에 대응하는 정규화 고유벡터를 $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ 라하고, t_i 를 열벡터로 하는 변환행렬을 T 라 정의할 때, T 는 직교행렬이므로 $T^T = T^{-1}$ 가 성립한다. 변환행렬 T 를 이용하여 변위벡터 d 를 다음과 같이 u 로 나타낸다.

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \Delta d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_1 \\ \Delta u \end{pmatrix} = T u \quad (12)$$

여기서, Δd 와 Δu 는 각각 d 와 u 에서 d_1, u_1 를 제외한 $(n-1)$ 차의 열벡터이다. 식(12)을 식(11)에 대입하고 양변에 T^T 를 곱하면,

$$T^T K T u + T^T f \lambda = 0 \quad (13)$$

식(13)을 고유치로 구성된 대각화행렬을 이용하여 다시 표현하면,

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & \Delta C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \Delta \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \Delta g \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서,

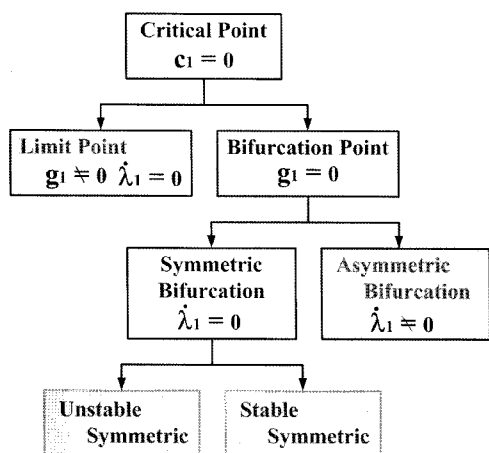
$$g = T^T f = \begin{pmatrix} t_1 \cdot f \\ t_2 \cdot f \\ \vdots \\ t_n \cdot f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \Delta g \end{pmatrix}$$

$$C = T^T K T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & \Delta C \end{bmatrix}$$

식(14)에서 최소 고유치를 c_1 이라 하면 ($c_1 < c_2 \leq \dots \leq c_n$), 특이점(singular point)에서는 $\det(K) = 0$ 이므로 $\det(C) = 0$ 이 성립하고, 따라서 $c_1 = 0$ 이 된다. 그러므로 식(14)의 첫 행 연산에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$g_1 \lambda = 0 \quad (15)$$

위 식의 λ 및 g_1 을 이용하면 좌굴점은 그림5에서와 같이 분류할 수 있다. g_1 의 의미를 생각해보면, $g_1 = t_1 \cdot f$ 이므로, c_1 에 대응하는 고유행렬



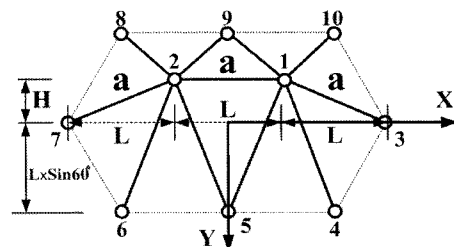
〈그림 2.5〉 좌굴점의 분류

t_1 과 하중모드 f 의 내적을 말하며, $g_1 = 0$ 은 서로 직교함을 의미한다. 따라서 $g_1 = 0$ 또는 $g_1 \neq 0$ 에 따라 임계점(critical point)을 각각 분기점과 극한점으로 분류할 수 있다. $g_1 = 0$ 인 경우가 분기점이 되며 분기좌굴을 발생시킨다. 이때 $\lambda = 0$ 일 때가 대칭분기점, $\lambda \neq 0$ 일 때가 비대칭 분기점이 된다. 또 $g_1 \neq 0$ 인 경우에는 $\lambda = 0$ 일 때가 극한점이 되며 뒤틀좌굴을 발생시킨다.

4. 고유진동모드에 의한 초기 불안정성 판 분기거동

초기불안전에 따른 분기경로의 관찰과 불안정 현상을 알아보기 위해서 문헌14에 소개되는 2-자유절점 단위 공간구조물을 대상으로 설명하도록 한다. 모델의 형상은 그림6에 나타난 바와 같고, 하중은 1번과 2번 절점에 연직방향의 집중력이 작용하며, 부재의 탄성계수는 $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 이므로 동일하다. 2-자유절점 공간구조물의 불안정 현상을 보다 선명하게 살펴보기 위해서 표1과 같이 모델을 선정하며, 여기서 모델 A가 뒤틀좌굴 거동을 모델 B가 분기좌굴현상이 발생하는 모델로 문헌14에 나타나 있다.

모델A와 B의 불안정 거동에 대한 완전형상에서의 해석결과를 그림7에 나타내었으며, 그림에서 실선은 하중-변위 곡선이고, 점선은 매 증분에서 얻어



〈그림 6〉 2-자유절점 공간구조물

〈표 1〉 2-자유절점 공간구조물의 입력 데이터

Model	$\mu = H/2L$	L (cm)	H (cm)	그외	
				a 부재 $A(\text{cm}^2)$	그외 $A(\text{cm}^2)$
A	0.1	500	100	11.2	11.2
B	0.1	500	100	11.2	1.12

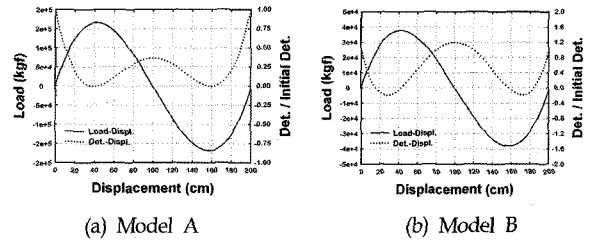
지는 행렬식을 초기 행렬식으로 나누어 일반화시킨 값(normalized value)과 변위와의 관계를 나타낸 곡선이다. 모델 A에서는 행렬식의 특이점(singular point)이 하중-변위 곡선 상의 첫 번째 극한점에서 나타난다. 따라서 모델 A는 하중-변위 곡선의 극한점 부근에서 불안정 현상이 나타나며, 이는 뒤틀좌굴 현상에 의해 불안정 거동임을 알 수 있다. 그러나 모델 B에서는 행렬식의 특이점이 하중-변위 곡선의 첫 번째 극한점 이전에 나타나고 있으며, 이는 뒤틀좌굴 현상이 일어나기 전에 분기현상에 의한 불안정 거동이 있음을 나타낸다.

분기경로를 살펴보기 위해서, 그림8과 같이 완전형상일 때 초기접선강성행렬의 고유치 해석으로 구한 최소 고유치에 대응하는 고유모드를 좌굴모드로 채택하기로 한다. 채택되어지는 좌굴모드는 주 경로상의 분기경로로의 변환을 알아볼 수 있으며, 초기불완전량은 2L의 값을 기준으로 0.01%, 0.05%, 0.1%, 0.3%의 값을 적용하여 해석 하였다.

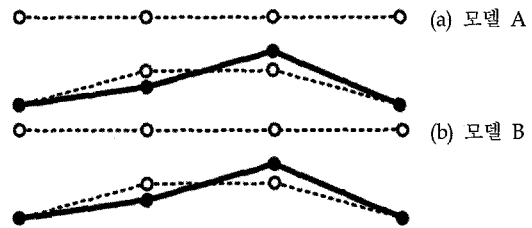
그림9는 초기불완전을 고려한 모델 A의 해석결과이다. 그림에서 두 절점은 완전형상일때의 극한점 부근에서 서로 다른 방향으로의 거동을 하며, 이때 행렬식은 특이점을 나타내고 있다. 또한 행렬식 곡선도 완전형상과는 다른 양상을 보인다. 초기불완전량의 증가에 대하여도 절점의 비대칭적 거동의 발생은 완전형상일때의 극한점에서 점점 더 멀어짐을 관찰할 수 있다.

모델 B에 대한 해석결과인 그림10에서 두 절점은 완전형상일때의 분기점 부근에서 분기현상을 나타내고, 이때 행렬식은 특이점을 나타내고 있으며, 완전형상일때의 극한점에서는 특이점이 더 이상 발생하지 않는다. 또한 모델 A와 마찬가지로 행렬식 곡선도 완전형상일때와는 다른 양상을 보인다. 초기불완전량의 증가에 대하여도 절점의 비대칭적 거동의 발생은 완전형상일때의 극한점에서 점점 더 멀어짐을 관찰할 수 있다.

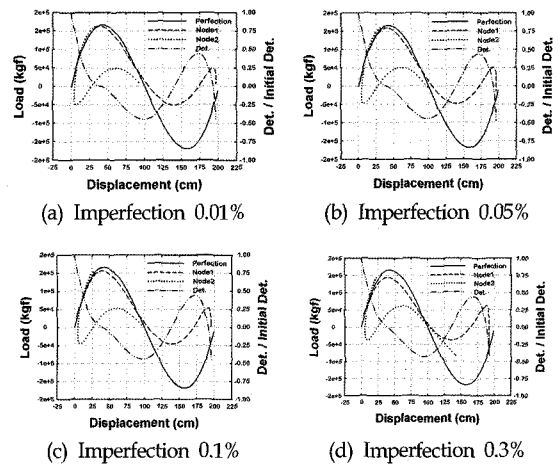
해석결과에서 볼 수 있듯이 형상 불완전량이 고려된 모델 A의 절점들의 거동은 모델 B의 절점들의 거동과 유사하게 나타난다. 그러나 모델 A와 모델 B에서 나타나는 하중레벨과 분기경로의 변환점이 모델A의 경우는 극한점 부근에서 불안정 경로가 바



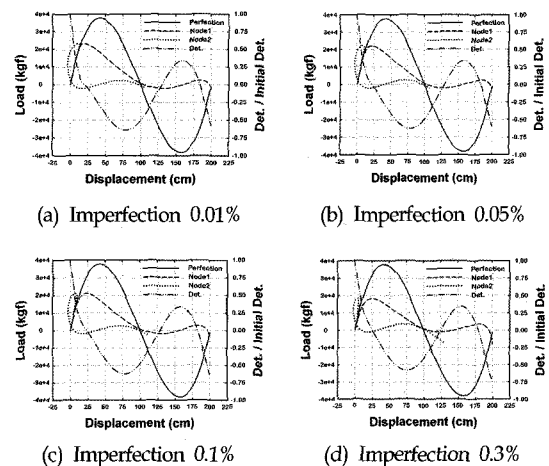
(a) Model A (b) Model B
 <그림 7> 2-자유절점 공간구조물의 하중-변위곡선 (Perfect)



(a) 모델 A (b) 모델 B
 <그림 8> 2-자유절점 공간구조물의 고유좌굴모드



(a) Imperfection 0.01% (b) Imperfection 0.05%
 (c) Imperfection 0.1% (d) Imperfection 0.3%
 <그림 9> 2-자유절점 공간구조물의 하중-변위곡선 (Model A, Mode 1)



(a) Imperfection 0.01% (b) Imperfection 0.05%
 (c) Imperfection 0.1% (d) Imperfection 0.3%
 <그림 10> 2-자유절점 공간구조물의 하중-변위곡선 (Model B, Mode 1)

뛰기 시작하며, 모델B에서는 분기점에서 불안정 경로가 바뀐다는 것의 차이가 있다. 이는 완전형상의 불안정점에 있어서 모델 A에는 분기점이 없는 반면 모델 B에는 분기점이 존재하기 때문이다.

이상과 같이 두 모델의 임계후거동은 초기불완전에 따라 불안정점에서의 분기경로로의 진행을 예상할 수 있다. 그러나 선택되어지는 고유모드에 따라 그 경로는 다르게 나타날 수 있으며, 하중벡터와 고유모드간의 영향력에 따라 연구자의 필요한 예측 가능한 분기경로를 살펴보고 판단할 수 있다.

5. 결론

지금까지 공간구조물의 비선형 해석기법과 불안정 현상에 대하여 살펴보았다. 구조물의 비선형 해석기법에 따른 특해들의 조합으로 전체거동을 예측하는 것은 접선강성행렬의 변화에 따른 불안정점과 초기 불완전성에 의한 분기경로를 살펴봄으로 알 수 있으며, 다수의 분기경로들은 구조물의 임계후거동을 여러 가지로 예측할 수 있다. 이상과 같이 불안정 문제의 형성과 그 현상의 규명을 위한 해석적 방법론을 문헌을 바탕으로 설명해 보았으며, 소개되어진 내용 이외에도 많은 연구자들에 의해 다양하게 다루어지고 있다. 마지막으로 본 고를 통해서 공간구조물의 연구에서 대단히 중요한 비선형 해석과 불안정 문제에 대해 기초 학습 및 연구에 조그마한 도움이 되었으면 한다.

참고문헌

1. Analysis, Design and Construction of Braced Domes, Edited by Makowski, Z. S., Nichols Publishing Company, New York, 1984.
2. Analysis, Design and Realization of Space Frames, IASS, Madrid, 1984.
3. Bergan, P. G., "Solution algorithms for nonlinear structural problems," Computers and Structures, Vol.12, 1980, pp.497-509.
4. Bulenda, Th. and Knippers, J., "Stability of grid shells," Computers and Structures, Vol. 79, 2001, pp.1161-1174.

5. Choong, K. K. and Hangai, Y., "Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures," IASS, Vol.34, No.112, 1993, pp.133-149.
6. Conci, Aura, "Large displacement analysis of thin-walled beams with generic open section," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.33, 1992, pp.2109-2127.
7. Crisfield, M. A., "A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"," Computers & Structures, Vol.13, 1981, pp.55-62.
8. El Naschie, M. S., Stress, stability & chaos in structural engineering ; An energy approach, Elsevier, Netherlands, 1991.
9. Kato, Shiro, Chiba, Yoshinao and Mutoh, Itaru, "Secondary buckling analysis of spherical caps," Structural Engineering and Mechanics, Vol.5, No.6, 1997, pp.715-728.
10. Kim, S. D., Kang, M. M., Kwun, T. J. & Hangai, "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," Computers & Structures, Vol.64 No1-4, 1997.5, pp.481-489.
11. Kim, S. D., Kim, H. S., Sohn, S. D., Kang, M. M., Lee, S. G. and Kwun, T. J., "Dynamic Instability of Hybrid Cable Dome Structures," IASS Symposium, Nagoya Japan, 2001, pp.130-131.
12. Kollar, L. and Dulacska, E., Buckling of shells for engineers, John wiley & Sons, Budapest, 1984.
13. Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells," Computers & Structures, Vol. 7, 1997, pp.725-735.
14. 金勝德, "偏平構造物の動的安定に関する研究," 東京大學 大学院, 博士學位論文, 1990.