財務管理硏究 第二十一券 第二號(2004. 12), 211~233

급첨 분포와 옵션 가격 결정

기호삼* · 이미영** · 최병욱***

〈요 약〉

본 연구는 기초자산의 수익률이 정규분포가 아닌 급첨분포(leptokurtic distribution)를 따른다고 가정할 경우 옵션의 가격식을 도출한다. 두 정규분포의 확률밀도함수의 선형 결합으로 첨도가 3이 아닌 급첨분포의 확률밀도함수를 모델링하고 이를 이용하여 Black- Scholes 공식의 확장된 형태인 옵션 가격 공식을 유도한다. 본 논문에서 제시한 급첨분포에 의한 옵션가격모형은 변동성 스마일 성질을 설명할 뿐만 아니라 기존의 실증연구에서 제기된 Black-Scholes 옵션가격의 과대 및 과소평가 현상을 설명한다. 마지막으로 본 가격식의 모델적합성을 검증하기 위하여 KOSPI 200 지수옵션의 시장가격으로부터 내재변동성과 내재첨도를 추정한다.

주제어 : 옵션가, 급첨분포, 마팅게일 제약조건, 모멘트조건, 첨도, KOSPI 200 지수옵션

Ⅰ. 서 론

Black-Scholes(1973)와 Merton(1973)의 옵션가격모델에서 주식 가격의 움직임을 설명하기 위하여 도입한 기하브라운 운동(geometric Brownian motion)과 이의 결과로서 주어지게 되는 주식수익률에 대한 정규분포의 특성은 다양한 종류의 파생금융상품의 가치를 평가하기 위한 유용한 수단이 되었다. 하지만 이 모형은 여러 실증연구를 통해서 다음과 같은 문제점이 노출되었다.

첫째, Black-Scholes 모형에 의해 산출된 옵션의 가격과 실제 시장가격 사이에 많은 괴리가 발생한다는 점이다(Black, 1975 ; MacBeth-Merville, 1980 ; Rubinstein, 1985 ; Ritchey, 1990). 이는 단순히 이론과 현실 사이의 괴리 차원이 아니라 주식 가격의 분포

논문접수일 : 2003년 12월 1일　　논문게재확정일 : 2004년 8월 11일

*　건국대학교 상경대학 국제무역학과
**　건국대학교 경영대학 경영정보학과
***　건국대학교 경영대학 경영학과

**** 본 논문은 2003년도 추계재무관리학회에서 발표한 논문임. 이때 토론자로서 좋은 지적을 해주신 오영덕 교수님과 익명의 심사자께 감사드린다. 본 논문은 2003년도 건국대학교 신임교원연구비 지원에 의한 논문임. 교신저자 : 최병욱, Tel : 02-450-4206, E-mail : bwchoi@konkuk.ac.kr

를 기하브라운 운동과 정규분포로서 설명하려는 Black-Scholes 모델의 근원적 한계점을 일부 보여준다는 점이다. 둘째, 주식수익률의 분포가 비대칭성과 급첨성(leptokurtic)을 보인다는 점인데, 구체적으로 설명하면 분포가 좌측 또는 우측으로 기울거나(skewed), 평균을 중심으로 뾰족한 분포를 보이고(leptokurtic) 두툼한 꼬리(fat-tailed)를 갖는다는 것이다. 셋째, '변동성 스마일(volatility smile)' 성질을 보인다는 점이다. 실제 장내옵션시장에서 거래되는 옵션들로부터 Black-Scholes 공식을 이용하여 내재변동성을 계산하고 이를 여러 행사가격의 변화에 따라 좌표에 표시하면 볼록곡선으로 나타나게 되는데, 이는 Black-Scholes 모델에서 행사가격의 변화와 상관없이 내재변동성이 상수로 표현된다는 사실과 모순된다는 점이다.

이런 제반 문제를 설명하거나 해결하기 위한 다양한 연구가 있었는데 크게 세가지의 방향으로 연구가 진행되어 왔다. 첫번째의 유형은 기존의 Black-Scholes의 연구방법모형을 확장한 것인데, 확률적 변동성 모형(Hull-White, 1987 ; Heston, 1993 ; Bakshi et al., 1997)과 점프-확산 모형(Merton, 1976 ; Bates, 1996)은 이 유형의 대표적인 형태라고 할 수 있다. 이 모형에서는 주가의 움직임을 변동성과 더불어 복수의 확률적 요인에 의해 설명하기 때문에 완전시장(complete market) 조건을 충족하지 못하며 따라서 일반적으로 위험중립도(risk neutral measure)가 복수로 존재한다는 단점이 있다.

두번째의 방법은 만기시 주식수익률의 분포를 정규분포 이외의 다른 분포로 설명하고자 하는 방법이다. 우선 주식수익률의 확률밀도함수가 정규분포의 확률밀도함수들의 일차결합으로 이루어진 확률분포를 따르는 경우에 옵션의 가격을 도출한 결과로서 Ritchey(1990)의 연구가 있다. 또한, Janicki et al.(1997)과 Hurst et al.(1999)은 기초자산의 가격이 α-stable Levy 확률과정을 따를 경우에, Bibby-Sørensen(1997)은 기초자산의 가격이 쌍곡형(hyperbolic) 확산 모델을 따를 경우에 각각 옵션의 가격모델을 도출하였다. 한편 옵션 만기에서의 기초자산의 가격이 로그-정규분포를 따른다는 Black-Scholes 모형의 가정을 확장하여 3차, 4차 모멘트 즉, 왜도와 첨도까지도 고려한 분포로부터 옵션 가격을 도출한 연구에는 Jarrow-Rudd(1982), Corrado-Su(1996), Rubinstein(1998), Li(2000) 등이 있다. 특히, Jarrow-Rudd(1982)는 로그-정규분포의 확률밀도함수에 Edgeworth 급수를 적용하였고 Corrado-Su(1996)는 정규분포의 확률밀도함수에 Gram-Charlier 급수를 적용하였다. 이 모형들은 일반적으로 주가의 확률적 움직임이 Levy process(Protter, 1990, p.20 참조)의 조건을 충족하지 못해 이항모형 등 이산적 분석방법의 형태로 변형하기가 수월치 않다는 단점이 있다.

세번째의 유형은 위험중립측도 하에서 주가의 밀도함수를 옵션시장가로부터 직접 추

정하는 방법으로서 Derman-Kani(1994), Dupire(1994), Rubinstein(1994)의 연구가 여기에 속하며 특히 비모수적 방법으로서 Aït-Sahalia(1998)의 연구가 있다.

옵션의 가치는 위험중립측도(risk neutral measure) 하에서 미래의 기대수익을 현재가치로 할인한 값인데(Harrison and Kreps, 1979 ; Harrison-Pliska, 1981, 1983), 완전시장에서 위험중립측도는 유일하게 존재하게 되며, 이 측도 하에서 주식의 할인가는 마팅게일(martingale) 성질을 만족해야 한다. 이 조건을 Longstaff(1995)는 마팅게일 제약조건(martingale restriction)이라고 명명한 바 있다.

본 연구에서는 두 정규분포의 확률밀도함수의 선형 결합으로 첨도(kurtosis)가 3이 아닌 급첨분포의 확률밀도함수를 모델링하고 이를 이용하여 Black-Scholes 공식의 확장된 형태인 옵션 가격 공식을 유도한다. 만약 첨도가 정규분포와 동일할 경우 본 연구에서 제시한 옵션가격식은 Black-Scholes의 가격식과 동일하게 됨에 따라 본 연구에서 제시한 옵션가격식이 보다 일반적인 식이라고 할 수 있다.

본 논문의 나머지 부분의 구성은 다음과 같다. Ⅱ장에서는 위험중립 옵션가격결정모형의 일반이론을 기술하고, Ⅲ장에서는 위험중립조건 하에서 기초자산의 가격에 대한 확률분포가 급첨분포를 따를 경우, 즉 3이 아닌 첨도를 가질 경우에 유럽형 옵션의 가격식을 도출한다. Ⅳ장에서는 앞장에서 도출한 가격식을 이용하여 옵션의 가격을 구한 후 Black- Scholes 모형에 의한 옵션가와 비교한다. 또한 KOSPI200 지수 옵션의 시장가격으로부터 기초자산인 KOSPI200 지수의 내재변동성과 첨도를 추정하며 아울러 모델의 적합성을 검증한다. V장은 결론과 향후 연구 과제를 기술한다.

Ⅱ. 위험중립 가격결정모델

본 논문에서 우리는 다음과 같이 가정한다. (1) 주식시장에는 비대칭적 세금, 거래수수료, 매수매도 스프레드 등의 마찰(friction)이 없고 주식 거래는 연속적으로 발생한다. (2) 시장에는 기초자산인 주식과 무위험자산 두가지만 존재한다. (3) 주식 수익률의 변동성과 무위험이자율은 알려져 있고 거래 기간 동안 불변이다.

시장에서 차익거래가 발생하지 않을 조건은 위험중립측도가 존재해야 하는 것인데, 본 논문에서는 완전시장을 가정하여 다음 조건을 만족하는 위험중립측도가 유일하게 존재한다고 가정한다.

$$\mathbb{E}\{S_T\} = S_0 e^{rT} \qquad \text{(조건 I)}$$

참고로 Longstaff(1995)는 (조건 Ⅰ)을 *마팅게일 제약조건* 이라고 부른다. 여기서 $S_t(0 \leq t \leq T)$는 t 시점에서의 주식의 가격이다. 또한 윗식을 만족하는 위험중립측도를 $\mathbb{P}$로 표기하기로 하며 $\mathbb{E}$는 위험중립측도 하에서 확률과정(stochastic process)에 대한 기대값을 나타낸다. 임의의 확률변수 Y에 대한 모멘트생성함수를 $M(\theta)$라 정의하면 $M(\theta) = \mathbb{E}\{e^{\theta Y}\}$가 된다. 특히, $\ln S_T$에 대한 모멘트생성함수에 대해서 $\theta = 1$로 설정하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$M(1) = \mathbb{E}\{e^{\ln S_T}\} = \mathbb{E}\{S_T\} \tag{1}$$

그러므로(조건 Ⅰ)은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$M(1) = S_0 e^{rT} \qquad \text{(조건 Ⅱ)}$$

(조건 Ⅱ)를 우리는 위험중립가격모델의 *모멘트 제약조건(moment restriction)*으로 정의하며 이 조건의 의미는 다음과 같다. 임의의 주식수익률에 대한 분포가 가정되어 있다면 만기시 또는 일정한 시간(예를 들어 T 이후)이 지난 후 위험중립 하에서 주식수익률의 평균에 대한 조건이며 이는 반드시 $\theta = 1$로 설정한 모멘트생성함수와 같아야 한다는 점이다. 따라서 위의 조건을 만족하지 않는다면 그 옵션가격식은 위험중립 가격결정모형이라고 할 수 없으며 그 옵션가격은 차익거래를 유발하게 되는 불균형가격이라고 할 수 있다.

이제 임의의 분포가(조건 Ⅱ)를 만족한다고 했을때 옵션의 가격식은 어떻게 주어지게 되는지 고찰해 보겠다. 주가의 로그함수에 대한 임의의 확률분포에 대해서 확률밀도함수를 $h(y)$라 하면, 행사가격이 X이고 잔존만기가 T인 콜옵션의 가격 C는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT}\,\mathbb{E}\{(S_T - X)^+\} \\ &= e^{-rT}\int_X^\infty (S_T - X)\,d\,\mathbb{P}(S_T) \\ &= e^{-rT}\int_{\ln X}^\infty \{\exp(y) - X\}\,h(y)dy \end{aligned} \tag{2}$$

이러한 접근방법을 이용하여 Black-Scholes의 공식(1973)을 유도해 보도록 하겠다. Black-Scholes 모형에서는 잔존 만기가 T인 옵션의 경우, 위험중립조건 하에서 기초자산인 주가의 로그함수가 평균이 m, 표준편차가 $s = \sigma\sqrt{T}$인 정규분포를 따른다고

가정하게 되는데, 이때 평균 m은 앞에서 언급한(조건 Ⅱ)로 부터 주어지게 된다. 즉, (조건 Ⅱ)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M(1) = \exp\{m+\sigma^2 T/2\} = S_0 e^{rT} \tag{3}$$

이를 전개해서 m을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m &= \ln(S_0 e^{rT}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \\ &= \ln(S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) T \end{aligned} \tag{4}$$

즉, 위험중립조건에서 만기시점의 주가의 로그함수가 정규분포를 따른다고 가정하면 그 평균은 반드시 위의 식을 만족해야만 하는 것이다. 이때 평균이 m이고 표준편차가 $s=\sigma\sqrt{T}$인 정규분포의 확률밀도함수를 $h_{m,s}$라 하면, 식 (2)에 의해 행사가격이 X이고 잔존만기가 T인 콜옵션의 가격 C는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT}\int_{\ln X}^{\infty}\{\exp(y) - X\}h_{m,s}(y)dy \\ &= e^{-rT}\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty}\{\exp(sy+m) - X\}h_{0,1}(y)\,dy \\ &= e^{-rT}\exp\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty}h_{s,1}(y)\,dy - e^{-rT}X\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty}h_{0,1}(y)\,dy \\ &= S_0\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty}h_{s,1}(y)\,dy - e^{-rT}X\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty}h_{0,1}(y)\,dy \end{aligned}$$

여기서, 표준정규분포의 누적확률분포함수 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}h_{0,1}(x)\,dx$ 를 적용하면 윗식은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} C &= S_0\Phi\left(\frac{m+s^2-\ln X}{s}\right) - Xe^{-rT}\Phi\left(\frac{m-\ln X}{s}\right) \\ &= S_0\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

즉, Black-Scholes(1973) 공식과 동일한 옵션가격식을 도출할 수 있다.

Ⅲ. 급첨분포 하에서의 옵션의 가치

본 장에서는 급첨의 성질을 갖는 분포를 정의한 후, 위험중립조건 하에서 기초자산의 로그가격에 대한 확률분포가 정규분포 대신에 급첨의 성질을 보이는 분포를 따를 경우 유럽식 옵션의 가격식을 도출한다.

함수 $h_{m,\sigma}$를 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포의 확률밀도함수라고 할 때, 첨도 $k\geq 3$에 대하여 함수 $f_{m,\sigma,k}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f_{m,\sigma,k}(x)=ph_{m,\alpha\sigma}(x)+(1-p)h_{m,\beta\sigma}(x) \tag{6}$$

여기서 p, α, β는 다음과 같이 정의된다.(이에 대한 도출과정은 Appendix를 참조바람.)

$$p=k/(k+3),$$
$$\alpha=\sqrt{1-\sqrt{(1-p)/p(k/3-1)}},$$
$$\beta=\sqrt{1+\sqrt{p/(1-p)(k/3-1)}}$$

특히, $k=3$ 이면 $f_{m,\sigma,k}=h_{h,\sigma}$으로서 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포가 된다.

이제 다음의 분포를 정의하자. 확률변수 Y의 확률밀도함수가 식(6)의 $f_{m,\sigma,k}$으로 주어질 때, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ, 첨도가 k인 급첨분포 $F(m,\sigma,k)$를 따른다고 부르겠다. [그림 1]은 첨도 k가 각각 $k=3,5,7$ 인 경우의 확률밀도함수를 그림으로 나타낸 것이다. 그림을 통하여 첨도가 클수록 밀도함수의 중심부가 뾰족해짐을 알 수 있다.

한편, 급첨분포를 따르는 확률변수 Y의 적률생성함수를 계산하면 다음과 같다.

$$M(\theta)=\exp(m\theta)\left\{p\ \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\theta^2\right)+(1-p)\exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\theta^2\right)\right\} \tag{7}$$

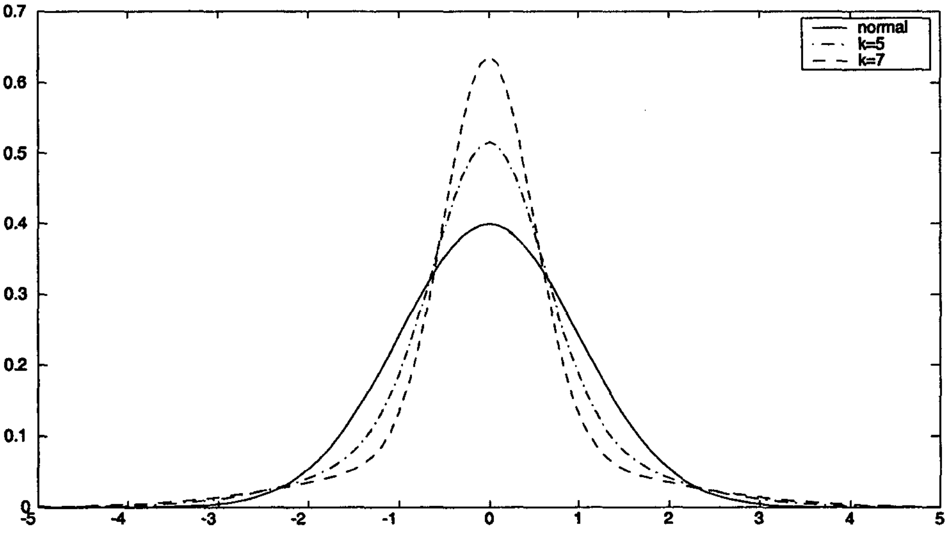
확률변수 Y의 4차 적률(moment)을 첨도(kurtosis)라고 하는데, 만약 Y가 급첨분포 $F(0,1,k)$를 따른다면 이 확률변수의 평균은 0, 표준편차는 1, 첨도는 k이다. 즉,

$$E(Y)=0,\ E(Y^2)=1,\ E(Y^4)=k$$

이다. 참고로 확률변수의 3차 적률을 왜도(skewness)라고 하는데 급첨분포 $F(0,\ 1,k)$를 따르는 확률변수 Y의 왜도는 0이다. 즉, $E(Y^3)=0$이다. 특히, 정규분포의 경우 왜도는 0이고 첨도는 3이다.

[그림 1] 정규분포와 급첨분포의 비교

이 그림은 확률변수가 표준정규분포와 급첨분포를 따를 경우 확률밀도함수를 각각 그린 것이다. 급첨분포에서 평균과 표준편차는 표준정규분포와 동일하지만 첨도는 각각 5와 7을 갖도록 설정하였다. 첨도가 클수록 중앙이 뾰족한 분포를 따름을 그림을 통하여 확인 할 수 있다.



Remark. 확률변수 X의 평균이 m이고 표준편차가 σ이면 X의 왜도는 $\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^3$의 평균이며 X의 첨도는 $\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^4$의 평균이다.

이제 위험중립조건 하에서 기초자산인 주식의 로그가 급첨분포를 따른다고 가정할 경우 유럽형 옵션의 가격을 구해 보겠다. 만기가 T인 시점에서의 가격 S_T에 대하여 $\ln S_T$는 평균이 m, 표준편차가 $s=\sigma\sqrt{T}$, 첨도가 k인 급첨분포 $F(m,\sigma\sqrt{T},k)$를 따른다고 가정하자. 이 때, $\ln S_T$의 평균 m은 모멘트조건을 만족해야 하는데 모멘트 생성함수를 이용해서 유도하면 평균 m은 다음을 만족해야 한다.

$$m = \ln\left(\frac{S_0 \exp(rT)}{p \exp(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 T) + (1-p)\exp(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 T)}\right) \tag{8}$$

이제 만기시 위험중립조건 하에서 만기시 주가에 대한 분포가 결정되었으므로 그 분포의 밀도함수를 이용하여 유럽형 콜옵션의 가치를 계산해 본다.

Proposition 1. *잔존만기가 T 이고 행사가격이 X 일 때, 위험중립조건에서 만기시 주식의 로그함수가 급첨분포, $F(m, \sigma\sqrt{T}, k)$를 따른다고 가정하면 평균 m은 식 (8)에서 주어진 값과 동일해야 하며, 유럽형 콜옵션의 비차익가격 C는 다음과 같이 주어진다.*

$$\begin{aligned} C &= S_0\left\{\frac{A}{A+B}\Phi(C_1) + \frac{B}{A+B}\Phi(D_1)\right\} \\ &\quad - X e^{-rT}\{p\Phi(C_2) + (1-p)\Phi(D_2)\} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서,

$$A = p\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 T\right),\ B = (1-p)\exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 T\right),$$

$$C_1 = \frac{\ln(S_0/X) - \ln(A+B) + (r+\alpha^2\sigma^2)T}{\alpha\sigma\sqrt{T}},\ C_2 = C_1 - \alpha\sigma\sqrt{T},$$

$$D_1 = \frac{\ln(S_0/X) - \ln(A+B) + (r+\beta^2\sigma^2)T}{\beta\sigma\sqrt{T}},\ D_2 = D_1 - \beta\sigma\sqrt{T}$$

이다.

증명 : 먼저 옵션의 만기수익에 대한 기대값을 위험중립측도 하에서 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{(S_T - X)^+\} \\ &= \int_{\ln X}^{\infty} \exp(y) - X f_{m,s,k}(y)\,dy \\ &= \int_{(\ln X - m)/s}^{\infty} \exp(sy+m) - X F_{0,1,k}(y)dy \\ &= p\exp\left(m + \frac{1}{2}\alpha^2 s^2\right)\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty} h_{\alpha^2 s,\alpha}(y)dy \\ &\quad + (1-p)\exp\left(m + \frac{1}{2}\beta^2 s^2\right)\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty} h_{\beta^2 s,\beta}(y)dy \end{aligned}$$

$$-Xp\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty} h_{0,\alpha}(y)dy - X(1-p)\int_{(\ln X-m)/s}^{\infty} h_{0,\beta}(y)dy$$

정규분포의 누적확률분포함수 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} h_{0,1}(x)dx$를 적용하면

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(S_T-X)^+\} = \exp(m)\Big\{ & p\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 s^2\right)\Phi\left(\frac{m+\alpha^2 s^2-\ln X}{\alpha s}\right) \\ & +(1-p)\exp\left(\frac{1}{2}\beta^2 s^2\right)\Phi\left(\frac{m+\beta^2 s^2-\ln X}{\beta s}\right)\Big\} \\ & -X\left\{p\Phi\left(\frac{m-\ln X}{\alpha s}\right)+(1-p)\,\Phi\left(\frac{m-\ln X}{\beta s}\right)\right\}\end{aligned}$$

이고, $A=p\exp(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 T)$, $B=(1-p)\exp(\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 T)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(S_T-X)^+\}=\frac{S_0 e^{rT}}{A+B}\Big\{ & A\Phi\left(\frac{\ln S_0+(r+\alpha^2\sigma^2)T-\ln(A+B)-\ln(X)}{\alpha\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & +B\Phi\left(\frac{\ln S_0+(r+\beta^2\sigma^2)T-\ln(A+B)-\ln(X)}{\beta\sigma\sqrt{T}}\right)\Big\} \\ & -X\Big\{p\Phi\left(\frac{\ln S_0+rT-\ln(A+B)-\ln X}{\alpha\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & +(1-p)\,\Phi\left(\frac{\ln S_0+rT-\ln(A+B)-\ln X}{\beta\sigma\sqrt{T}}\right)\Big\}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $q=A/(A+B)$라 하면 $t=0$ 에서의 유럽형 콜옵션의 가격 C는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}C &= e^{-rT}\mathbb{E}\{(S_T-X)^+\} \\ &= S_0\, q\, \Phi(C_1)+(1-q)\Phi(D_1) \\ &\quad -Xe^{-rT}p\Phi(C_2)+(1-p)\Phi(D_2)\end{aligned}$$

여기서,

$$C_1=\frac{\ln(S_0/X)-\ln(A+B)+(r+\alpha^2\sigma^2)T}{\alpha\sigma\sqrt{T}},\ C_2=C_1-\alpha\sigma\sqrt{T},$$

$$D_1=\frac{\ln(S_0/X)-\ln(A+B)+(r+\beta^2\sigma^2)T}{\beta\sigma\sqrt{T}},\ D_2=D_1-\beta\sigma\sqrt{T}$$

이다.

동일한 방법으로 유럽형 풋옵션의 가격을 P라 하면 이는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} P = & Xe^{-rT}p\Phi(-C_2)+(1-p)\Phi(-D_2) \\ & -S_0 q\Phi(-C_1)+(1-q)\Phi(-D_1) \end{aligned} \tag{10}$$

위의 공식에서 $k=3$ 이라 놓으면 Black-Scholes의 계산식과 동일한 식을 얻게 된다.

Ⅳ. 실증 분석

본장에서는 먼저 실증분석을 위해 사용되는 KOSPI 200 옵션가의 자료구성에 대해 기술한 후, Black-Scholes 모형과 급첨분포에 의한 옵션가격모형에 의한 옵션가를 계산, 비교하며, 마지막으로 KOSPI 200 지수옵션의 시장가로부터 내재변동성과 내재첨도를 추정한다.

1. 자료의 구성

본 연구에서는 실증분석을 위해 한국증권거래소에서 제공하는 KOSPI 200 옵션가격을 이용하였다. KOSPI 200 옵션은 풋옵션과 콜옵션이 모두 거래되고 있으며 권리행사는 최종거래일에만 할 수 있는 유럽식옵션이다. KOSPI 200 옵션거래의 결제월은 연속 3개월물 3개와 원월물 1개이다. 다시 말하면, 3월, 6월, 9월, 12월중 2개와 기타월(1월부터 11월)중 2개의 총 4개가 된다. 예를 들어, 2004년 5월 1일 현재의 결제월은 2004년 5월, 6월, 7월과 9월의 4개이다. 3월, 6월, 9월, 12월물의 거래기간은 6개월이고 기타월물의 거래기간은 3개월이다. 최종거래일은 각 결제월의 두 번째 목요일이며 새로운 결제월의 거래개시일은 최종거래일의 익일이다. 권리행사가격은 각 결제월의 거래개시일에 최초로 설정한다. 연속 3개월물의 경우 거래개시일 전일의 KOSPI 200에 가장 가까운 등가격 1개(5포인트의 배수)와 등가격으로부터 5포인트 간격으로 상하 2개씩 총 5개의 권리행사가격을 설정한다. KOSPI 200 옵션거래의 매매거래시간은 9시부터 15시 15분까지로 주식시장보다 15분 연장한다. 8시부터 9시까지와 15시 5분부터 15시 15분까지는 단일가격으로 매매체결하고(단일가매매), 9시부터 15시 5분까지는 복수가격으로 매매체결한다(접속매매). 다만, 최종거래일이 도래한 종목의 매매거래시간은 9시부터 14시 50분까지로 그 시간동안 접속매매로 체결한다. KOSPI 200 옵션의 시장가 자료의 범위는 2000년도 12월물의 결제일 다음날부터 2003년도 12월물 결제일까지이다. 단기

무위험이자율은 한국은행에서 제공하는 CD91일물의 이자율을 이용하였다.

옵션의 이론가를 산출하기 위해서, 옵션의 기초자산인 KOSPI 200 주가지수를 구성하는 주식으로부터 계약기간 동안에 발생하는 예상배당율을 추정해야 하는데 이를 위한 방법으로서 첫째, 개별기업의 배당 정보를 이용하여 직접 추정한 Bakshi et al.(1997)의 방법과 주가지수 선물가격으로부터 추정한 Poteshman(2001)의 방법이 있다. 주가지수 선물로부터 배당률을 추정하는 두 번째 방법은 KOSPI 200 주가지수선물과 주가지수옵션의 만기가 일치하지 않기 때문에 한국의 선물옵션시장에 적용하기가 수월치 않다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같이 풋-콜 패리티 성질을 이용하여 내재 선물가격, F_0를 구하고자 한다.

$$C-P=e^{-rT}(F_0-X) \tag{11}$$

여기서 C와 P는 KOSPI 200 주가지수의 콜옵션과 풋옵션의 가격을 나타내며, F_0는 이로부터 도출되는 내재 선물가(implied future price)이고 X는 행사가격이다.

한편 내가격(ITM ; in-the-money)옵션의 경우 유동성이 부족하므로 시장가의 적정성에 문제가 있을 수 있다. 이를 보완하기 위하여 Aït-Sahalia & Lo(1998)의 방법과 동일하게 풋-콜 패리티 관계를 이용하여, 유동성이 풍부한 동일한 조건의 다른 외가격(OTM ; out-of-money)옵션의 가격으로부터 내가격옵션의 가격을 도출하여 분석에 이용하였다. 이같은 방법은 Hull(2002, p.330-331)이 지적했듯이, 옵션시장에서 콜옵션과 풋옵션 간의 상대적 가격 괴리로 인해 차익거래의 기회가 없다면 풋옵션의 시장가격과 이론가격 사이의 오차는 콜옵션의 시장가격과 이론가격 사이의 오차와 동일하다는 점에 근거한 것이다.

마지막으로 Bakshi et al.(1997), Dumas et al.(1998), Poteshman(2001)에서 적용한 바와 같이, 유동성의 문제로 인해 적정가격이라고 간주될 수 없는 잔존만기 6일이내의 옵션들과 깊은 내가격옵션들은 분석대상에서 제외하였다.

2. 옵션의 가격비교 및 모수의 추정

본 절에서는 기초자산의 수익률이 급첨분포를 따른다고 가정하여 식 (9)를 이용하여 옵션의 가격을 산출한 후 이를 Black-Scholes 모형을 이용하여 계산된 옵션가와 비교하고자 한다. 또한 한국의 증권거래소에서 거래되는 KOSPI200 옵션 자료를 이용하여 식 (9)의 내재변동성과 내재첨도를 추정하고자 한다.

<표 1>에서 제시된 콜옵션가는 급첨분포의 첨도를 3, 4, 5, 6, 7로 각각 변화시켰을 때 식 (9)를 이용하여 계산된 콜옵션의 가격과 Black-Scholes모형에 의하여 계산된 콜옵션의 가격과의 차이를 표시한 것이다. 이를 계산하기 위하여 사용된 기초자산의 현재가 (S_0)는 98.0, 무위험수익률 (r)은 5.0%, 변동성 (σ)은 35%, 잔존만기는 0.1년, 배당률은 0이다. 또 <표 2>는 동일한 조건에서 콜옵션 대신 풋옵션의 가격과 Black-Scholes가격과의 차이를 나타낸 것이다. 이 표에 의하면 첨도가 3보다 클 경우 외가격과 내가격에서는 Black-Scholes모형에 의한 가격이 상대적으로 저평가되어 있으며, 등가격 주위에서는 고평가 되어 있음을 확인 할 수 있다. [그림 2]는 <표 1>의 결과를 그림으로 나타낸 것이다. 한편 [그림 3]은 기초자산의 가격이 98.0, 무위험 이자율이 4.8%, 잔존만기가 0.1년, 변동성이 30%, 첨도가 6.0일 때 식 (9)를 이용하여 계산된 유럽형 콜옵션의 가격으로부터 Black-Scholes공식을 이용하여 구한 내재변동성을 행사가격의 함수로 표시한 것이다. 이 그림을 통하여 Black-Scholes모형이 설명할 수 없는 변동성 스마일 성질을 급첨분포에 의한 옵션가격모형이 적절하게 설명함을 확인 할 수 있다.

<표 1> 첨도의 변화에 따른 옵션가의 비교 - 콜옵션

아래 표에 제시된 콜옵션가는 급첨분포의 첨도를 3, 4, 5, 6, 7로 각각 변화시켰을때 식 (9)에 의해 계산된 콜옵션의 가격과 Black-Scholes 모형에 의하여 계산된 콜옵션의 가격과의 차이를 표시한 것이다. 이 표에 의하면 첨도가 3보다 클 경우 외가격과 내가격에서는 Black-Scholes 모형에 의한 가격이 상대적으로 저평가되어 있으며, 등가격 주위에서는 고평가되어 있음을 확인 할 수 있다. 이를 계산하기 위하여 사용된 기초자산의 현재가 (S_0)는 98.0, 무위험수익률 (r)은 5.0%, 변동성 (σ)은 35%이며, 잔존만기는 0.1년이다.

첨 도	행사 가격(Exercise Price)									
	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
Panel A : 콜옵션 가격										
3	22.91	18.04	13.41	9.27	5.90	3.42	1.81	0.88	0.39	0.16
4	22.94	18.09	13.44	9.20	5.73	3.26	1.75	0.92	0.48	0.25
5	22.97	18.14	13.47	9.15	5.57	3.11	1.70	0.96	0.57	0.34
6	23.00	18.18	13.49	9.10	5.43	2.97	1.65	1.00	0.64	0.40
7	23.02	18.21	13.51	9.06	5.30	2.84	1.62	1.03	0.69	0.46
Panel B : Black-Scholes 옵션가와의 차이										
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.03	0.05	0.03	-0.17	-0.17	-0.16	-0.06	0.04	0.09	0.09
5	0.06	0.10	0.06	-0.12	-0.33	-0.31	-0.11	0.08	0.18	0.18
6	0.09	0.14	0.08	-0.17	-0.47	-0.45	-0.16	0.12	0.25	0.24
7	0.11	0.17	0.10	-0.21	-0.60	-0.58	-0.19	0.15	0.30	0.30

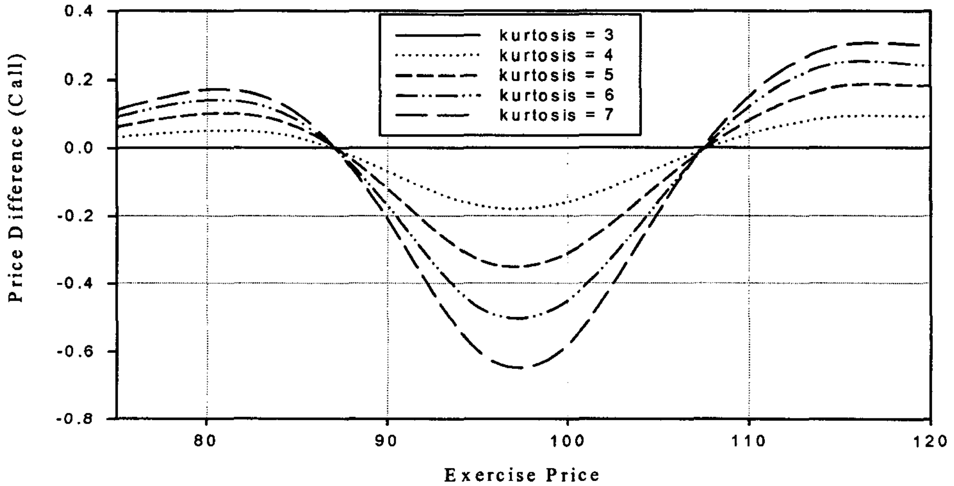
<표 2> 첨도의 변화에 따른 옵션가의 비교 - 풋옵션

아래 표에 제시된 콜옵션가는 급첨분포의 첨도를 3, 4, 5, 6, 7로 각각 변화시켰을때 식 (10)에 의해 계산된 풋옵션의 가격과 Black-Scholes 모형에 의하여 계산된 풋옵션의 가격과의 차이를 표시한 것이다. 이 표에 의하면 첨도가 3보다 클 경우 외가격과 내가격에서는 Black-Scholes 모형에 의한 가격이 상대적으로 저평가되어 있으며, 등가격 주위에서는 고평가되어 있음을 확인 할 수 있다. 이를 계산하기 위하여 사용된 기초자산의 현재가 (S_0)는 98.0, 무위험수익률 (r)은 5.0%, 변동성 (σ)은 35%이며, 잔존만기는 0.1년이다.

첨 도	행사 가격(Exercise Price)									
	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
Panel A : 풋옵션 가격										
3	0.02	0.13	0.47	1.31	2.91	5.41	8.78	12.82	17.30	22.05
4	0.06	0.18	0.50	0.24	2.75	5.25	8.71	12.86	17.40	22.15
5	0.09	0.23	0.53	1.19	2.59	5.10	8.66	12.90	17.48	22.23
6	0.11	0.27	0.56	1.14	2.44	4.96	8.62	12.94	17.55	22.29
7	0.13	0.30	0.58	1.10	2.32	4.83	8.58	12.97	17.61	22.35
Panel B : Black-Scholes 옵션가와의 차이										
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.04	0.05	0.03	-0.07	-0.16	-0.16	-0.07	0.04	0.10	0.10
5	0.07	0.10	0.06	-0.12	-0.32	-0.31	-0.12	0.08	0.18	0.18
6	0.09	0.14	0.09	-0.17	-0.47	-0.45	-0.16	0.12	0.25	0.24
7	0.11	0.17	0.11	-0.21	-0.59	-0.58	-0.20	0.15	0.31	0.30

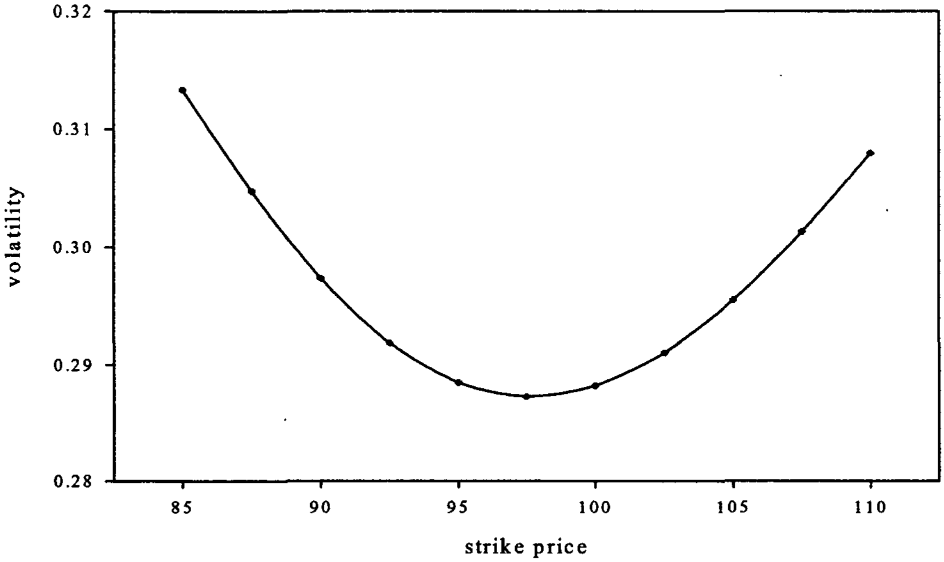
[그림 2] 첨도 변화시 콜옵션가격의 변화

이 그림은 급첨분포의 첨도를 3, 4, 5, 6, 7, 8로 각각 변화시켰을때 식 (9)에 의하여 계산된 콜옵션의 가격과 Black-Scholes 모형에 의하여 계산된 콜옵션의 가격과의 차이를 표시한 것이다. 이 그림에 의하면 첨도가 3보다 클 경우 외가격과 내가격에서는 Black-Scholes 모형에 의한 가격이 상대적으로 저평가되어 있으며, 등가격 주위에서는 고평가되어 있음을 확인할 수 있다. 이를 계산하기 위하여 사용된 기초자산의 현재가는 98.0, 무위험수익률은 5.0%, 변동성은 35%, 잔존만기는 0.1년이다.



[그림 3] 급첨분포의 변동성 스마일 성질

이 그림은 기초자산의 가격이 98.0, 무위험 이자율이 4.8%, 잔존만기가 0.1년, 변동성이 30%, 첨도가 4.0일 때 식 (9)를 이용하여 계산된 유럽형 콜옵션의 가격으로부터 Black-Scholes 공식을 이용하여 구한 내재변동성을 행사가격의 함수로 표시한 것이다. 이 그림을 통하여 급첨분포가 변동성 스마일 성질을 설명함을 확인할 수 있다.



<표 3>은 아래의 표에서 제시된 수치는 해당월에 만기가 되는 KOSPI 200 옵션에 대해서 전월 결제일 다음날부터 결제월 6일전까지의 시장가와 이론가와의 제곱합을 최소로 만드는 내재 모수의 월평균을 나타낸 것이다. 이때 이론가를 산출하는 모형으로서 Black-Scholes모형과 본 논문에서 제시된 급첨분포에 의한 옵션모형을 이용하였다. 특히 Black-Scholes모형에서는 내재가치의 상태에 따라서 ITM, ATM, OTM 등 세가지로 분류하여 내재변동성을 계산하였다. 급첨분포모델에서는 내재변동성과 내재첨도를 추정하였다.

여기서 내재변동성과 내재첨도를 추정하기 위하여 Levenberg-Marquardt 방법을 사용하였는데(Press, et al.(1997)의 p.521-528 참조.), 그 방법을 요약하면 다음과 같다. 먼저 다른 모수들은 고정되어 있다고 가정하고, 옵션의 이론가격이 행사가격 X_i $(i=1,2,\cdots,N)$, 변동성 σ, 첨도 k의 함수이므로 이를 $V(X_i,\sigma,k)$라고 정의한다. 한편 행사가격이 X_i일 때 옵션의 시장가격을 V_i라 하면 다음 식,

$$\sum_{i=1}^{N}\{V(X_i,\sigma,k)-V_i\}^2 \tag{12}$$

<표 3> 내재 모수의 추정

아래 표에 제시된 수치는 결제월에 만기가 되는 KOSPI 200 옵션에 대해서 거래개시일부터 최종거래일 6일전까지의 시장가와 이론가와의 제곱합을(식 (12) 참조.) 최소로 만드는 내재 모수의 월평균을 나타낸 것이다. 이때 이론가를 산출하는 모형으로서 Black- Scholes 모형과 본 논문에서 재시된 급첨분포를 이용하였다. 특히 Black-Scholes 모형에서는 내재가치의 상태에 따라서 ITM, ATM, OTM 등 세가지로 분류하여 내재변동성을 계산하였다. 급첨분포모델에서는 내재변동성과 내재첨도를 추정하였다.

만기(연도/월)	Black-Scholes 모델				급첨분포모델	
	내재변동성	ITM	ATM	OTM	내재변동성	내재첨도
2001/01	0.496	0.512	0.493	0.502	0.507	3.94
2001/02	0.523	0.522	0.521	0.538	0.530	3.41
2001/03	0.412	0.408	0.410	0.423	0.415	3.35
2001/04	0.370	0.368	0.366	0.416	0.377	3.84
2001/05	0.346	0.350	0.344	0.363	0.350	3.51
2001/06	0.325	0.325	0.322	0.345	0.329	3.60
2001/07	0.298	0.302	0.295	0.326	0.302	3.66
2001/08	0.289	0.309	0.286	0.329	0.297	4.27
2001/09	0.279	0.293	0.278	0.302	0.283	3.66
2001/10	0.415	0.455	0.411	0.419	0.419	3.44
2001/11	0.319	0.361	0.317	0.325	0.321	3.41
2001/12	0.364	0.372	0.360	0.379	0.371	3.79
2002/01	0.495	0.508	0.489	0.509	0.504	3.69
2002/02	0.368	0.374	0.365	0.379	0.378	3.90
2002/03	0.397	0.398	0.394	0.408	0.407	3.91
2002/04	0.364	0.370	0.363	0.365	0.368	3.33
2002/05	0.348	0.350	0.347	0.359	0.354	3.60
2002/06	0.371	0.371	0.369	0.377	0.377	3.51
2002/07	0.369	0.379	0.367	0.373	0.374	3.53
2002/08	0.428	0.434	0.425	0.437	0.436	3.67
2002/09	0.386	0.395	0.384	0.389	0.390	3.36
2002/10	0.354	0.372	0.353	0.356	0.358	3.39
2002/11	0.412	0.426	0.410	0.408	0.414	3.22
2002/12	0.343	0.362	0.342	0.341	0.345	3.27
2003/01	0.330	0.339	0.328	0.339	0.334	3.44
2003/02	0.368	0.404	0.368	0.362	0.372	3.37
2003/03	0.356	0.397	0.355	0.352	0.359	3.36
2003/04	0.397	0.443	0.396	0.382	0.399	3.20
2003/05	0.333	0.358	0.331	0.326	0.334	3.17
2003/06	0.322	0.357	0.323	0.314	0.324	3.19
2003/07	0.269	0.307	0.268	0.268	0.271	3.38
2003/08	0.233	0.274	0.233	0.234	0.236	3.62
2003/09	0.212	0.250	0.212	0.216	0.214	3.39
2003/10	0.221	0.259	0.220	0.226	0.224	3.68
2003/11	0.254	0.286	0.253	0.246	0.256	3.39
2003/12	0.270	0.299	0.270	0.265	0.272	3.36

가 최소가 되는 상수 α와 k를 구하면 이것이 각각 구하고자 하는 내재변동성과 내재 첨도가 된다. 이 때, 모수들을 콜옵션의 가격으로부터 추정했는데, 앞에서도 언급했듯이 내가격 옵션의 경우 유동성이 작으므로 풋옵션의 시장가격으로부터 풋-콜 패리티를 이용하여 구한 콜옵션의 가격을 사용하였다. <표 3>에 의하면 주가수익률 분포에서 첨도의 범위가(3.17, 4.27)로 나타나는데 이는 첨도가 3으로 고정된 Black-Scholes모형과는 차이가 있음을 보여주고 있다. 따라서 첨도가 3보다 크다면 앞에서 관찰하였듯이 정규분포에 비해 꼬리 부분의 확률이 커지기 때문에, 실제의 옵션가격은 내가격과 외가격에서 Black-Scholes 모형에 의한 옵션가보다 클것이고, 등가격 주위에서는 작게 나타날 것이다. 따라서 Black-Scholes 옵션가는 내가격과 외가격에서 옵션의 가치를 과소평가하고, 등가격 부근에서 과대평가하는 현상이 있음을 추정할 수 있다.

V. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 기초자산인 주식의 수익률이 정규분포의 1차선형결합으로 나타나는 급첨분포를 따른다고 가정하여 옵션의 가격식을 도출하였다. 급첨분포를 따른다고 가정할 경우 첨도가 3으로 고정되어 있는 Black-Scholes 모형과는 달리 첨도가 3이상으로 설정될 수 있음에 따라 옵션의 이론가격을 좀더 시장가격에 가깝게 반영하여 제시할 수 있음은 본 연구의 큰 의의라 할 수 있다. 본 논문에서 제시한 급첨분포에 의한 옵션가격모형은 Black-Scholes 모형에서 설명하지 못한 변동성 스마일 성질을 설명할 뿐만 아니라 기존의 실증연구에서 나타난 Black-Scholes 옵션가격의 과대 및 과소평가 현상을 설명하였다. KOSPI 200 옵션시장의 시장가로부터 내재 첨도를 추정한 결과 첨도가 3보다 크게 나타남에 따라 내가격과 외가격 옵션에서 Black-Scholes 옵션가는 실제의 옵션가를 과소평가하게 되고, 등가격 주위에서는 과대평가하게 되는 현상을 설명하였다.

Black-Scholes 모형의 한계는 주식의 수익률이 정규분포를 따른다고 가정함에 따라 첨도가 3으로 고정되는 문제 뿐 아니라 왜도가 0으로 고정되는 문제가 있다. 이를 해결하기 위하여 왜도까지 고려한 옵션가격모형을 제시해야겠지만 이는 별도의 연구과제로 설정하였다. 첫째, 첨도에 의해 영향을 많이 받는다고 알려진 통화옵션시장에 본 옵션가격모형을 적용하여 본 모형의 적정성을 평가하고자 한다. 한국의 선물시장에서 상장되어 있는 달러 옵션의 경우 거래가 거의 없어 유동성이 현저히 떨어지므로 미국 또는 유럽의 통화옵션시장을 대상으로 실증분석을 할 예정이다. 둘째, 모형의 적합성 검증과

효율성 측정을 위해 추가적으로 필요하지만 본 연구에서 수행하지 못한 외표본시험 (out-of-sample test)과 헤징성과를 비교하기 위한 실증분석을 수행한다. 끝으로 기초자산의 첨도에 대해 역사적 추이를 토대로 옵션가에 내재된 내재첨도를 비교함으로써 옵션의 거래전략 수립에 활용할 수 있는지 여부를 검토한다.

Appendix. 급첨분포의 도출

여기서는 식 (6)에서 제시한 급첨분포의 도출과정을 보이고자 한다. 먼저 $h_\sigma(x)$를 평균이 0이고 표준편차가 σ인 다음과 같은 정규분포의 확률밀도함수라 하자.

$$h_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

여기서 $k\geq 3$일 때, 평균 0, 표준편차 1, 첨도 k인 확률분포(이하 첨도 k인 급첨분포라 한다)의 확률밀도함수 $f_k(x)$를 구해보자. 이때, 확률밀도함수는 평균이 0인 두 정규분포함수의 선형결합 형태가 되도록 하자. 즉, $0\leq p\leq 1$와 양수 α,β에 대하여

$$f_k(x)=p\,h_\alpha(x)+(1-p)h_\beta(x)$$

이다.

확률변수 X가 첨도 k인 급첨분포를 따른다면 $E(X^2)=1$, $E(X^4)=k$이므로 p,α,β는 다음과 같은 연립방정식을 만족한다.

$$\begin{cases} p\alpha^2+(1-p)\beta^2=1, \\ p\alpha^4+(1-p)\beta^4=\dfrac{k}{3}. \end{cases}$$

위 연립방정식을 풀면 해는

$$\begin{cases} \alpha^2=1-\sqrt{\dfrac{1-p}{p}\left(\dfrac{k}{3}-1\right)} \\ \beta^2=1-\sqrt{\dfrac{1-p}{p}\left(\dfrac{k}{3}-1\right)} \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} \alpha^2=1+\sqrt{\dfrac{1-p}{p}\left(\dfrac{k}{3}-1\right)} \\ \beta^2=1-\sqrt{\dfrac{1-p}{p}\left(\dfrac{k}{3}-1\right)} \end{cases}$$

이다. 위의 해 중에서 첫번째 해는 $p\geq 1-\dfrac{3}{k}$일 때 존재하고, 두번째 해는 $p\leq\dfrac{3}{k}$일 때 존재한다. p를 k의 함수, 즉 $p=p(k)$라 하고 $p(3)=\dfrac{1}{2}$이라 하자. 그러면 만족하는 해의 하나로서 $p(k)=k/(k+3)$을 얻을 수 있다. 이때 첨도 k가 커질수록 $p(k)$가 커지고, 따라서 저분산함수 h_α의 가중치가 커지게 된다.

한편 첫 번째 해의 존재 조건에서 $\lim_{k\to\infty}p(k)=1$이므로 $p(k)$는 감소함수가 될

수 없다. 다시 말해서, k가 증가할 때 저분산함수 h_a의 가중치가 감소하도록 $p(k)$를 정할 수 없다. 또, 두 번째 해의 조건에서 $\lim_{k\to\infty} p(k)=0$이므로 $p(k)$는 증가함수가 될 수 없다. 다시 말해서, k가 증가할 때 고분산함수 h_a의 가중치가 증가하도록 $p(k)$를 정할 수 없다.

참 고 문 헌

한국증권거래소, 선물 · 옵션거래의 이해, (2002).

Aït-Sahalia, Y. and Lo, A., "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices," *Journal of Finance,* 53, (1998), 499-547.

Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance,* 52, (1997), 2003-2049.

Bates, D., "Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Processes Implicit in Deutche Mark Options," *Review of Financial Studies,* 9, (1996), 69-107.

Bibby, B. M. and Sørensen, M., "A Hyperbolic Diffusion Model for Stock Prices," *Finance and Stochastics,* 1, (1997), 25-41.

Black, F., "Fact and Fantasy in the Use of Options," *Financial Analysts Journal,* (1975), 684-701.

Black, F. and Scholes, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy,* 81, (1973), 637-659.

Brown, C. A. and Robinson, D. M., "Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices : A Correction," *Journal of Financial Research,* 25, (2002), 279-282.

Corrado, C. J. and Su, T., "Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices," *Journal of Financial Research,* 19, (1996), 175-192.

Corrado, C. J. and Su, T., "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 index Option Prices," *Journal of Derivatives,* 4, (1997), 8-19.

Cox, J. C. and Ross, S. A., "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics,* 3, (1976), 145-166.

Derman, E. and Kani, I., "Riding on a Smile," *RISK,* 7, (1994), 32-39.

Dumas, B., Flemming, J. and Whaley, R., "Implied Volatility Function : Empirical Test," *Journal of Finance,* 53, (1998), 2059-2106.

Dupire, B., "Pricing with a Smile," *RISK,* 7, (1994), 18-20.

Harrison, J. M. and Kreps, D. M., "Martingales and Arbitrage in Multiperiod securities Markets," *Journal of Economic Theory,* 20, (1979), 381-408.

Harrison, J. M. and Pliska, S. R., "Martingales and Stochastic Integrals in the

Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and their Applications*, 11, (1981), 215-260.

Harrison, J. M. and Pliska, S. R., "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading : Complete Markets," *Stochastic Processes and their Applications*, 15, (1983), 313-316.

Heston, S., "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, (1993), 327-344.

Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fifth edition, Prentice Hall, 2002.

Hull, J. and White, A., "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42, (1987), 281-300.

Hurst, S. R., Platen, E. and Rachev, S. T., "Option Pricing for a Log-stable Asset Price Model," *Mathematical and Computer Modeling*, 29, (1999), 105-119.

Jarrow, R. and Rudd, A., "Approximate Option Valuation for Arbitary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 10, (1982), 347-369.

Janicki, A. W., Popova, I, Ritchken, P. H. and Woyczynski, W. A., "Option Pricing Bounds in a Delta-stable Security Market," *Commun. Statist.-Stochastic Models*, 13, (1997), 817-839.

Li, F., "Option Pricing : How Flexible Should the SPD be?," *Journal of Derivatives*, (Summer, 2000), 49-65.

Longstaff, F. A., "Option Pricing and the Martingale Restriction," *Review of Financial Studies*, 8, (1995), 1091-1124.

MacBeth, J. and Merville, L., "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models," *Journal of Finance*, 35, (1980), 285-303.

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, (1973), 141-183.

Merton, R. C., "Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 5, (1976), 125-144.

Poteshman, A. M., "Underreaction, Overreaction, and Increasing Misreaction to Information in the Options Market," *Journal of Finance*, 56, (2001), 851-876.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., *Numerical*

Recipes : The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. New York, (1987).

Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, 1990.

Ritchey, R. J.. "Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures," *Journal of Financial Research*, 4, (1990), 285-296.

Rubinstein, M., "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976, through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40, (1985), 445-480.

Rubinstein, M., "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 69, (1984), 771-818.

Rubinstein, M., "Edgeworth Binomial Trees," *Journal of Derivatives*, 5, (1998), 20-27.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 21, Number 2, Dec. 2004

Option Pricing with Leptokurtic Feature

Hosam Ki* · Miyoung Lee** · Byungwook Choi**

<abstract>

This purpose of paper is to propose a European option pricing formula when the rate of return follows the leptokurtic distribution instead of normal. This distribution explains well the volatility smile and furthermore the option prices calculated under the leptokurtic distribution are shown to be closer to the market prices than those of Black-Scholes model. We make an estimation of the implied volatility and kurtosis to verify the fitness of the pricing formula that we propose here.

Keywords : Option Pricing, Leptokurtic Distribution, Martingale Restriction, Moment Restriction, Kurtosis, KOSPI 200 Index Option

* College of Commerce & Economics, Konkuk University
** College of Business Administration, Konkuk University