

주식 수익률의 비선형 결정론적 특성에 관한 연구

장경천* · 김현석**

〈요 약〉

본 연구는 주식 수익률의 생성과정에 비선형적 특성이 존재하는지를 검증하기 위해서 1980년 1월부터 2002년 5월까지 종합주가지수 일별 수익률과 주별 수익률을 이용하여 실증분석을 실시하였다. 실증분석의 내용은 크게 비선형 종속성에 대한 검증과 비선형 확률적 특성검정 그리고 비선형 결정론적인 카오스검정으로 구분할 수 있다.

비선형적 특성에 대한 분석의 결과는 주식 수익률은 leptokurtic한 비정규분포를 따르며, 수익률의 생성과정이 IID하지 않고 비선형 종속성이 존재하는 것으로 나타났다. 그리고 ARCH류의 비선형 확률모형으로는 주식 수익률의 비선형적 구조를 완전히 설명하지는 못하는 것으로 판단된다. 이는 주식 수익률의 생성과정을 설명하기 위해서 ARCH류의 모형과는 다른 형태의 비선형모형의 도입에 대해 고려할 필요가 있음을 시사하는 것이다.

종합주가지수 수익률에 대한 카오스검정의 결과를 정리하면, 우선 장기기억을 가지는 지속성이 강한 시계열로 편이된 랜덤워크를 따르며, 프랙탈분포하는 것으로 나타났다. 그리고 프랙탈 차원의 근사값인 상관차원(D)이 3과 4사이에 안정적으로 수렴하며, 최대 리아푸노프지수(L₁)가 양(+)의 값을 가지므로 카오스적 끌개와 초기조건에 민감한 의존성이 존재하는 것으로 나타났다. 이러한 결과들은 카오스시스템의 특성과 부합하는 것으로 주식 수익률의 생성과정이 비선형 결정론적인 카오스과정을 따르는 것으로 판단할 수 있다.

주제어 : 비선형성, 카오스, 장기기억, 프랙탈, 초기조건에 민감한 의존성

I. 서 론

전통적인 자본시장이론들은 효율적 시장가설(EMH)을 근간으로 선형성을 가정하여 발전되어왔다. 효율적 시장에서는 모든 이용 가능한 정보가 즉각적으로 공표되고 합리

논문접수일 : 2003년 8월 20일 논문게재확정일 : 2004년 2월 12일

* 중앙대학교 상경학부

** 남서울대학교 경영세무학부

*** 본 연구의 질적 향상을 위해 유익한 논평을 해주신 익명의 두 분 심사위원께 감사드립니다.

적인 투자자들에 의해 가격에 충분히 반영된다. 따라서 과거 정보는 오늘 아무런 의미가 없으며 가격변동은 새로운 정보에 의해 무작위하게 발생하므로 주식 수익률의 생성 과정은 독립적이고 동일한 분포(independently & identically distributed)를 하게 된다. 이와 같이 주식 수익률의 생성과정이 IID하다면, 수익률은 무작위한 확률변수가 되고 랜덤워크를 따르게 된다. 그리고 충분히 많은 관측치들을 확보하게 되면, 중심극한정리에 의해 수익률의 확률분포는 정규분포를 이루게 된다. 따라서 모형설정에 있어 안정적인 균형을 전제로 하여 선형모형을 설정하고 실증분석에서 실제치와 이론치의 차이를 확률적 난수항으로 처리하면 되는 것이다.

그런데 이러한 가정에 따라 주식시장을 설명하려는 모형들에 대해서 의문이 제기되어 왔다. 이는 기존의 시계열모형들이 선형 데이터 생성과정을 기본 전제로 채택하고 있으나, 진정한 데이터의 생성과정이 비선형일 수도 있기 때문이다. 경제체제의 질적 변동이 작아서 낮은 차원의 비선형적 구조를 가지고 있는 경우에는 근사모형으로써 선형모형을 사용하여 주식시장의 행태를 설명하는데 별문제가 없다. 하지만 경제체제의 질적 변동이 심하거나 실물경제변수들이 다양한 요인들에 의해 서로 영향을 받는다면, 선형모형을 사용하는 분석으로는 주가의 움직임을 제대로 설명할 수 없을 뿐만 아니라 모형의 신뢰성에도 심각한 손상을 가져올 수 있다. 이러한 경우 무작위하다고 정의되고 있는 확률적 난수항 역시 경제체제의 질적 변동을 반영하여 비선형적인 특성을 가질 것이므로 주식시장의 현상을 설명하기 위해서는 비선형모형의 도입이 필요하게 된다.

주식 수익률의 비선형적 생성과정을 설명하려는 접근방법은 크게 ARCH류의 모형과 카오스모형으로 구분할 수 있다. 경제시계열에 대한 모형설정에 있어서 결정론적 과정과 확률적 과정의 결합으로 파악할 때, ARCH류의 모형은 확률적 과정에서 조건부 분산의 변화에 초점을 두고 시계열의 분산이 시간에 따라 변동함을 보여줌으로써 이에 따른 위험프리미엄을 발견하는데 공헌을 하였다. 이는 조건부 평균이 0이고 분산의 변화에 대한 비선형적 상관성만을 고려하므로 비선형 확률모형이 된다. 반면 카오스모형은 조건부 평균의 변화에 관심을 두는 것으로, 카오스과정은 비선형적 특성으로 인해 육안으로는 확률적 과정과 유사하게 관찰되지만 실제로는 결정론적인 구조를 가지고 있다. 즉, 카오스는 무작위하게 움직이는 것처럼 보이지만 사실은 숨은 질서가 존재하는 비선형 결정론적인 과정을 따르는 것이다.

경제현상을 설명하는 모형들은 크게 선형모형, 비선형 확률적 모형 그리고 비선형 결정론적 모형으로 구분할 수 있다. 하지만 이러한 모형들을 실제로 적용하기 위해서는 진정한 데이터의 생성과정이 어떠한 구조를 가지고 있는지를 밝히는 작업이 선행되

어야 한다. 본 연구의 주된 목적은 한국증권시장에서 주식 수익률의 생성과정이 확률적 선형구조인지 아니면 비선형적인 구조인지를 분석하는 것이다. 또한 비선형적인 구조를 가지고 있다면, 비선형 확률적 과정인 ARCH류의 모형과 비선형 결정론적인 특성을 가지는 카오스모형 중에서 어떠한 모형이 주식 수익률의 시계열적 특성을 보다 잘 설명할 수 있는가를 규명하는데 그 목적이 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 II장에서는 주식 수익률의 비선형적 생성과정을 설명하려는 접근법과 선행연구결과를 검토하고 분석방법론에 대해서 살펴보았다. 그리고 III장에서는 주식 수익률의 분포적 특성과 비선형성에 대하여 검정하고, ARCH류의 비선형 확률모형으로 설명 가능한지에 대해서 분석을 실시하였다. IV장에서는 주식 수익률이 비선형 결정론적인 카오스과정을 따르는지 종합적으로 분석하였으며, 끝으로 V장에서는 연구결과를 요약하고 결론을 제시하였다.

II. 비선형적 접근과 분석방법론

1. 비선형적 접근법

선형패러다임은 기본적으로 투자자들이 정보에 대하여 누적적으로 반응하지 않고 선형의 형태로 반응한다는 것이다. 이는 수익률이 근사적으로 정규분포를 이루며 독립적이어야 한다는 것을 의미한다. 그러나 많은 실증연구들에서 실제 주식 수익률의 분포는 정규분포에 비하여 높은 첨도(high peak)와 두터운 꼬리(fat tail)를 갖는 leptokurtic한 형태를 띠고 있으며, IID가 아닌 것으로 나타나고 있다. 이러한 경우 선형패러다임과는 다른 비선형모형의 도입이 필요하게 된다.

어떤 안정적(stationary) 시계열의 상관식을 2차 미분하였을 때 0이 아닌 수나 다항식으로 나타나는 경우, 또는 각 시기마다 수익률의 분포가 불안정하여 각 기의 분산이 서로 2차식 이상의 형태로 상관되어 있을 경우에 비선형적 상관관계를 가진다고 할 수 있다. 이는 급격한 주가의 변동과 불안정한(nonstationary) 확률분포를 의미하며, 이러한 불안정성은 외생적인 구조변화¹⁾ 또는 투자자들의 투자행위에 따른 내생적 요인에서 그 원인을 찾을 수 있다. 하지만 일일 또는 주간 주가변화에서 비선형적 상관성이 존재한다면, 주식시장의 구조변화가 그렇게 빈번하게 발생한다고는 볼 수 없기 때문에

1) 이는 외생적 요인, 즉 증권시장 운용제도의 변화, 경제정책의 변경, 기술과 금융공학의 발전 등의 구조적인 변화에 의해 주식 수익률의 분포가 변화하는 것을 의미한다.

내생적인 요인에 의해서 비선형 상관성이 존재하는 것으로 판단할 수 있다.²⁾

내생적 요인에 의한 비선형적 상관성이 존재한다는 것은 투자자들이 새로운 정보에 즉각적으로 반응하는 것이 아니라 확인정보가 입수될 때까지 기다리거나 추세가 명확해질 때까지 반응하지 않다가 어느 시점에서 축적된 정보를 한꺼번에 주가에 반영한다는 의미이다. 또한 비선형적 시스템에서는 장기적인 추세나 급격한 변동이 존재하는데, 이는 사회적 급변과 유행 등의 존재로 인해서 총합으로서의 투자자들도 비합리적일 수 있다는 것이다. 이는 주식시장에서 주가의 갑작스런 폭락과 급등(Black Monday 등) 및 여러 이상현상들(anomalies)에서 암시된다.

주식 수익률의 비선형적 생성과정을 설명하려는 접근방법은 크게 ARCH류의 모형과 카오스모형으로 구분할 수 있다. ARCH류의 모형은 확률적 과정의 조건부 평균은 0이고 조건부 분산의 변화에 대한 비선형적 상관성만을 고려하므로 비선형 확률적인 모형이다.³⁾ 반면에 카오스모형은 조건부 평균의 변화에 관심을 두는 것으로 무작위하게(확률적으로) 보이는 시계열의 결정론적인 구조를 설명하고자 하는 비선형 결정론적인 모형이다.

이러한 접근방법은 leptokurtic한 주식 수익률의 분포를 해석하는 두 가지 입장에서 보면, ARCH류의 모형은 Cootner(1964)의 견해를 지지하여 주식 수익률의 분포를 유한 분산을 가지는 leptokurtic한 가우스분포로 해석하고 시계열자료의 이분산성을 설명하고자 하는 것인 반면, 카오스적 접근법은 Mandelbrot(1964)가 주장하는 분산이 무한하거나 정의되지 않는 안정파레시안분포의 일종으로 해석하여 무작위하게 보이는 주식 수익률을 비선형 결정론적인 관점에서 설명하고자 하는 것이다.

ARCH류의 모형은 각 기의 분산의 변화를 예측할 수 있으며, 그 분산의 변화는 과거

2) Hsieh(1991)는 주별, 일별, 15분 수익률자료를 이용하여 실증분석을 실시한 결과, IID가설을 기각하는 것으로 나타나서 불안정성이 구조변화에 의한 것이라는 추론은 적절치 않다고 주장하였다.

3) 비선형 확률모형은 시계열 x_t 와 교란항들 사이의 비선형적 함수관계를 찾고자하는 모형으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_t = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

여기에서 $g(\cdot)$ 는 과거 정보에 기초한 x_t 의 조건부 평균, $E_{t-1}[x_t] = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ 을 나타내고, $E_{t-1}[(x_t - E_{t-1}[x_t])^2] = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)^2$ 이므로 $h(\cdot)^2$ 은 과거 정보에 기초한 x_t 의 조건부 분산이다. 예를 들어, $g(\cdot) = 0$ 이고 $h(\cdot) = \sqrt{\alpha \varepsilon_{t-1}^2}$ 으로 두면, ARCH(1)모형 ($x_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha \varepsilon_{t-1}^2}$)으로 평균식에는 비선형성이 없고 분산식이 비선형인 비선형 분산(nonlinear in variance)모형이 된다. 반면, $g(\cdot) = \varepsilon_{t-1}^2$ 이고 $h(\cdot) = 1$ 로 두면, 단순한 형태의 비선형 이동평균(NMA)모형 ($x_t = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_t$)으로 분산식에는 비선형성이 없고 평균식이 비선형인 비선형 평균(nonlinear in mean)모형이 된다. 보다 자세한 내용은 Campbell, Lo & MacKinlay(1997), pp.468-470을 참조할 것.

정보에 의해 비선형적 상관성을 가진다는 조건부 분산모형이다.⁴⁾ 예를 들어 실증분석에서 자주 사용되는 GARCH(1, 1)과정은 $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$ 이면 안정성조건을 충족하며, 첨도계수(K)는 3보다 크다.⁵⁾ 따라서 GARCH(1, 1)과정은 정규분포보다 첨도가 높고 두터운 꼬리를 가지는 leptokurtic한 분포이며, 이는 어떤 기의 주식 수익률에 커다란 변동성이 발생하면 다음 기에도 커다란 변동성이 발생할 수 있다는 것으로 과거의 정보가 지속적으로 반영됨을 의미한다.

카오스는 무작위하게 움직이는 것처럼 보이지만 사실은 숨은 질서가 존재하는 비선형 결정론적인 과정이며, 일반적으로 결정론적인 과정에서 일어나는 확률적 운동으로 정의할 수 있다. 즉, 어떤 시스템이 결정론적인 법칙에 따라 움직이고 있지만, 매우 복잡하고 불규칙하며 동시에 불안정한 행태로 인해서 먼 미래의 상태를 예측할 수 없는 현상을 의미한다. 이러한 특성 때문에 카오스는 결정론적인 과정임에도 불구하고 육안 또는 기존의 검정방법으로는 랜덤워크와 구분하기가 쉽지 않다.⁶⁾

어떤 시계열이 카오스과정(chaos process)을 따른다면 다음과 같은 결정론적인 함수로 나타낼 수 있다. 아래 식 (1)에서 $F(\cdot)$ 는 우리가 관찰할 수 없는 결정론적인 카오스이고, X_t 는 관찰 가능한 시계열이다. 이와 같이 오차항을 포함하지 않는 순수한 카오스모형을 백색카오스(white chaos)라고 한다.

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots) \tag{1}$$

백색카오스과정을 확률적 오차항을 포함시키는 방법으로 일반화하면, 식 (2)와 같은 비선형과정을 생각할 수 있으며, 이와 같이 오차항을 포함하는 일반모형을 노이지 카

- 4) 본 연구에서는 여러 조건부 분산모형들 중에서 조건부 분산의 기대치가 시간에 따라 변화하는 ARCH모형에서 모수제약을 완화하고 조건부 분산의 예측에 과거 잔차항의 자승치뿐만 아니라 조건부 분산을 도입한 GARCH(Generalized ARCH)모형과 조건부 분산이 위험프리미엄의 대용변수로써 조건부 평균에 영향을 줄 수 있는 GARCH-M(GARCH in mean)모형 그리고 충격에 대해서 비대칭적인 반응을 고려할 수 있는 TGARCH(Threshold GARCH)모형을 중심으로 살펴볼 것이다.
- 5) 분포의 첨도계수는 확률변수의 4차 적률을 2차 적률의 자승치로 나눈 것으로 다음과 같다.

$$K = E(\epsilon_t^4) \cdot E(\epsilon_t^2)^{-2} = \frac{3(1 + \alpha_1 + \beta_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)} > 3$$

- 6) 대표적인 카오스시계열 중의 하나인 로지스틱 맵 [$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$]에서 X_t 는 X_{t-1} 의 결정론적인 비선형함수이다. 아래 표는 두 시계열이 완전히 확률적인 시계열과 결정론적인 시계열로 그 생성방법이 전혀 다르지만 자기상관분석으로는 구별해 낼 수 없음을 보여주고 있다.

구분	1	2	3	4	5	10	20	30	$Q_{LB}(30)$
White noise	0.009	-0.004	-0.023	-0.016	-0.012	0.026	0.016	0.001	18.401 (0.952)
Logistic map	-0.033	-0.022	0.003	-0.028	0.008	-0.021	-0.012	0.039	19.751 (0.923)

오스(noisy chaos)라고 한다. 식 (2)에서 $F(\cdot)$ 는 X_t 의 과거값들에 대한 조건부 평균으로 생각할 수 있으므로 카오스는 일반적인 비선형 평균모형의 특수한 경우이다.⁷⁾

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t \quad (2)$$

X_t : t 기의 관측치, ε_t : 확률적 오차항

$E(\varepsilon_t | X_{t-1}, \dots) = 0$, $Var(\varepsilon_t | X_{t-1}, \dots) = 1$

$F(\cdot)$: 카오스를 야기하는 비선형함수

카오스 시스템의 중요한 특징을 정리하면 첫째, 장기기억을 가지는 피드백 시스템(feedback system)으로 과거의 사건이 현재에 영향을 미친다. 둘째, 자기 유사성(self-similarity)의 특징을 갖는 프랙탈구조(fractal structure)이다. 셋째, 나비효과(butterfly effect)라고 알려져 있는 초기조건에 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)을 가지고 있다.

2. 선행연구결과

경제시계열의 비선형적 생성과정을 설명하려는 연구들이 시작된 이후, 국내에서도 90년대부터 증권시장의 비선형적 특성에 관한 연구들이 활발하게 진행되고 있다. 본 절에서는 ARCH류의 비선형 확률모형 외에 비선형 결정론적인 카오스와 관련된 국내의 주요 연구결과들을 살펴보았다.

김영규·배재봉(1994)은 종합주가지수 수익률('80. 1~'92. 6)을 이용하여 분석을 실시한 결과, 일별 수익률은 매립차원 12, 주별 수익률은 매립차원 14에서 상관차원이 5와 6사이에 수렴하며, Shuffling방법에 의해 재구성된 자료는 상관차원이 높아지는 것으로 나타났다. 그리고 최대 리아푸노프지수(L_1)가 각각 일정한 양(+)의 값, 0.0024와 0.0109에 근사적으로 수렴하는 것으로 나타나서 주식 수익률의 생성과정이 카오스과정을 따른다고 결론내리고 있다.

김규영(1996)은 종합주가지수, 산업별 지수, 규모별 지수 등의 일별 및 월별 수익률('80. 1~'96. 3)에 대하여 Lo(1991)의 방법론을 이용하여 분석하였다. 일별 수익률에서는 종합주가지수 등 대부분의 지수에서 단기 종속성은 발견되고 있으나 장기 종속성은 발견할 수 없으며, 월별 수익률에서는 금융업과 시장II부에서만 단기 종속성이 존재하

7) 카오스가 비선형모형이라고 해서 비선형성이 카오스를 발생시키는 충분조건이 될 수는 없다. 예를 들어서 $f(x) = x^3$ 은 비선형이지만 카오스모형은 아니다. 즉, 비선형성은 카오스가 발생할 수 있는 필요조건일 뿐이고 충분조건은 될 수는 없다.

고 대부분의 지수에서는 랜덤워크를 기각할 수 없는 것으로 나타났다. 그리고 이러한 결과를 우리나라 주식시장에 장기 종속성이 존재하지 않다는 증거로 제시하였다.

백용기(1997)는 업종별 주가지수의 월평균치('80. 1~'96. 4)를 사용하여 실증분석을 실시하였다. 15개의 업종 중에서 V-통계량의 꺾인 점이 명확하게 나타나는 10개의 업종을 대상으로 AR(1)잔차에 대하여 Hurst지수를 추정한 결과 0.5보다 높으며, 상관차원이 3~4인 것으로 나타나고 있다. 그리고 BDS검정에서는 은행, 증권, 보험업을 제외한 대부분의 업종에서 IID의 귀무가설을 기각함으로써 비선형적 구조를 가지고 있다고 주장하였다.

이일균(1998)은 종합주가지수('80. 1~'96. 12)를 이용하여 분석하였으며, 일별 수익률의 첨도는 1.48로 3보다 낮고 주별 수익률은 4.29로 3보다 높게 나타났다. 하지만 Hinich(1982)의 이분광법을 적용한 분석에서 주식 수익률은 정규분포를 따르고 선형성이 유지된다는 결과를 보이고 있으며, BDS검정에서도 IID의 귀무가설을 기각하지 못하는 것으로 나타났다. 그리고 AR(2)잔차 시계열에 대해서 추정한 리아푸노프지수 또한 모두 음(-)으로 나타나서 주식 수익률에는 카오스적 특성이 없다고 밝히고 있다.

장경천·김현석(2002)은 종합주가지수 수익률('80. 1~'01. 8)을 이용하여 실증분석을 실시하였다. 일별 및 주별 수익률 모두 첨도가 3보다 상당히 높아서 leptokurtic한 분포를 보이고 있으며, AR(1)을 선형필터로 한 RESET검정과 ARCH-LM검정에서 평균과 분산에 비선형성이 존재하는 것으로 나타날 뿐만 아니라 BDS검정결과 또한 IID를 기각하고 있다. 그리고 Hurst지수가 0.5보다 높게 나타나며, 상관차원은 매립차원 8 이상에서 안정적으로 3과 4사이에 수렴하여 주식 수익률의 생성과정이 카오스적 특성을 보인다고 결론지었다.

위의 연구들은 모두 우리나라 증권시장에 대한 분석임에도 불구하고 표본기간과 분석방법에 따라서 상이한 결과를 보이고 있다. 따라서 본 연구에서는 기존연구들을 바탕으로 주식 수익률의 생성과정에 대하여 보다 심도 있고 종합적인 분석을 통하여 연구결과를 도출하고자 한다.

3. 분석방법론

본 절에서는 시계열이 IID한지를 검정하기 위한 BDS검정법과 카오스적 특성을 검정하기 위해서 사용되는 R/S분석(rescaled range analysis), 상관차원분석(correlation dimension analysis) 그리고 리아푸노프지수(Lyapunov exponent)의 추정과 관련한 방법론에 대해서 살펴보았다.

1) 상관적분과 BDS검정

Brock, Dechert & Scheinkman(1987)이 개발한 BDS통계량은 상관적분(correlation integral)의 함수로 주어진 시계열자료가 매립차원(embedding dimension)을 증가시키기에 따라 얼마나 조밀하게 위상공간(phase space)을 채우는가를 측정하는 방법이다. 상관적분은 두 개의 점 X_s^m 와 X_t^m 이 위상공간에서 특정한 거리(ϵ)내에 있을 확률을 의미하며, 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_{m,n}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m+1} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} I_{\epsilon}(X_{s+j}, X_{t+j}) \quad (3)$$

$$I_{\epsilon}(x, y) = \begin{cases} 1, & |x-y| < \epsilon \\ 0, & |x-y| \geq \epsilon \end{cases}$$

시계열자료가 약의존성(weak dependence)을 가질 때, 다음의 표본 확률추정치 $b_{m,n}(\epsilon)$ 은 0으로 기대할 수 있고,

$$b_{m,n}(\epsilon) = c_{m,n}(\epsilon) - c_{1,n-m+1}(\epsilon)^m \quad (4)$$

시계열이 IID하다는 귀무가설하에서 검정통계량 $W_{m,n}(\epsilon)$ 은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있으며, 이때 $\sigma_{m,n}(\epsilon)$ 은 BDS통계량의 표준편차를 나타낸다.

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n-m+1} \frac{b_{m,n}(\epsilon)}{\sigma_{m,n}(\epsilon)} \rightarrow N(0, 1) \quad (5)$$

2) R/S분석과 Hurst지수

시계열이 순수한 랜덤워크를 따르는지 아니면 편이된 랜덤워크를 따르는지를 판단할 수 있는 R/S분석은 Hurst(1951)에 의해서 제시되었다. u 개의 관측치를 가지는 시계열 t 에서 평균으로부터의 누적편차(cumulative deviation)는 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다. 이때 $X_{t,n}$ 은 n 기간 동안의 누적편차, e_u 는 u 기의 유입량 그리고 M_n 은 n 기간 동안 e_u 의 평균을 나타낸다.

$$X_{t,n} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_n) \quad (6)$$

범위(R)는 식 (7)과 같이 누적편차의 최대값과 최소값의 차이를 나타내며,

$$R = \text{Max}(X_{t,n}) - \text{Min}(X_{t,n}) \quad (7)$$

이때 범위는 고려되는 시간에 따라 달라지므로 R을 최초 관측치들의 표준편차(S)로 나눔으로써 일반화할 수 있으며, 각각의 R/S값은 Hurst의 경험법칙에 의해서 다음과 같이 추정된다.

$$R/S = a \cdot n^H \quad (8)$$

그리고 식 (8)의 양변에 log를 취하면 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 Hurst지수는 log(R/S)와 log(n) 사이의 관계를 일반적인 최소자승법(OLS)을 이용하여 추정할 수 있게 된다.

$$\log(R/S) = H \cdot \log(n) + \log(a) \quad (9)$$

3) 상관차원분석

Grassberger & Procaccia(1983)에 의해서 제시된 상관차원은 프랙탈차원의 근사값으로 시스템의 특성을 몇 개의 요인으로 정의할 수 있는가를 나타낸다. 끌개(attractor) 내의 모든 점은 비선형 위상공간에서의 상관성에 따라 다음과 같이 상관적분으로 정의할 수 있다.

$$C_m(R) = (1/N^2) \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N H(R - |X_i - X_j|) \quad (10)$$

$$H(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

그리고 주어진 매립차원(m)에서 상관적분(C_m)은 R이 증가함에 따라 R^D의 비율로 증가한다는 성질을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_m = R^D \quad (11)$$

위 식은 식 (12)와 같은 대수방정식으로 바꿔 쓸 수 있으며, log(R)과 log(C_m)을 각각 횡축과 종축으로 하는 그래프의 기울기를 계산함으로써 상관차원(D)을 추정할 수 있다.

$$\log(C_m) = D \cdot \log(R) + \text{constant} \quad (12)$$

카오스시스템의 경우는 매립차원이 늘어날수록 상관차원은 특정값에 수렴하게 되며, 매립차원이 증가함에 따라 상관차원이 계속 증가한다면 확률적 과정, 즉 자유도가 무한대인 과정으로 정의할 수 있다.

4) 리아푸노프지수의 추정

리아푸노프지수는 위상공간에서 구의 용적(the volume of a sphere)이 시간에 따라 어떻게 변하는지를 측정함으로써 구할 수 있다.⁸⁾ 구의 용적에 대한 지수적 증가율이 리아푸노프지수의 척도이고, i 차원($P_i(t)$)에 대한 i 번째 리아푸노프지수(λ_i)의 등식은 다음과 같다.

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \left(\frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right) \quad (13)$$

동작 방정식(the equation of motion)이 알려져 있을 때, 리아푸노프지수는 위상공간에서 근사한 궤도로 이탈하는 것을 측정함으로써 계산할 수 있다. 지름이 r 인 구의 부피가 시간에 따라 팽창할 때, 리아푸노프지수의 완전한 스펙트럼은 다음과 같이 계산된다.

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r(0) \rightarrow 0} \sum [(1/t) \log_2 \{r_i(t) / r_i(0)\}] \quad (14)$$

이론적으로 노이즈가 없는 무한한 개수의 자료를 가지면 식 (13)과 식 (14)는 같아진다. 하지만 실제 세계는 우리에게 노이즈를 포함하는 유한한 자료를 제공하며, 현실적으로 동작 방정식이 알려져 있지 않기 때문에 리아푸노프지수의 모든 스펙트럼을 계산할 수 없다. 따라서 대안으로 Wolf 등(1985)이 개발한 실험자료를 이용한 최대 리아푸노프지수(L_1)를 계산하는 방법을 사용해야 한다. $L_1 > 0$ 은 초기조건에 민감한 의존성이 존재한다는 것을 의미하며, 이는 시스템에 카오스적 끌개가 존재한다는 것이다.

$$L_1 = (1/t) \sum_{j=1}^m \log_2 \left(\frac{L'(t_{j+1})}{L(t_j)} \right) \quad (15)$$

8) 양(+)의 리아푸노프지수는 펼침(stretching)을 측정하는데 이는 근접한 점들이 서로 얼마나 빨리 이탈(diverge)되는가를 의미하고, 음(-)의 리아푸노프지수는 접힘(folding), 즉 시스템이 교란 후에 얼마나 빨리 회복되는가를 측정한다.

Ⅲ. 비선형성검정

본 장에서는 종합주가지수 수익률자료에 비선형적 특성이 존재하는지를 분석하였다. 실증분석에 사용된 자료는 1980년 1월부터 2002년 5월까지 종합주가지수 일일 종가자료를 이용한 일별 수익률과 주별 수익률이며, 이때 수익률은 로그수익률이다.

1. 정규분포성검정결과

<표 1>은 종합주가지수 수익률의 기술통계량을 나타낸 것으로 일별 평균수익률은 0.0334%이고 주별 수익률은 0.1802%이며, 표준편차는 각각 1.5548%와 3.8354%로 나타나고 있다. 분포의 비대칭성을 보여주는 왜도(skewness)는 일별 수익률에서는 -0.1281이고 주별에서는 0.1301로 나타났다. 그리고 첨도(kurtosis)는 각각 8.2055와 6.0098로 나타나며, 3보다 상당히 높아서 leptokurtic한 특성을 보이고 있다.

Jarque-Bera통계량은 왜도와 첨도를 이용하여 시계열이 정규분포한지를 검정하는 통계량으로 일별 수익률과 주별 수익률 모두 정규분포성을 기각하고 있다. 그리고 시계열자료의 누적분포함수와 그 자료와 동일한 평균 및 표준편차를 갖는 정규분포의 누적분포함수와와의 차에 절대값의 최대치인 Kolmogorov-Smirnov *D*통계량 또한 일별 및 주별 수익률 모두 정규분포성을 기각하는 것으로 나타나고 있다.

<표 1> 종합주가지수 수익률의 기술통계량

구 분	일 별 수 익 률	주 별 수 익 률
관 측 치 수	6,380	1,160
평 균	0.000334	0.001802
중 위 수	0.000000	0.000131
표 준 편 차	0.015448	0.038354
왜 도	-0.128110	0.130102
첨 도	8.205474	6.009761
최 대 값	0.081613	0.197520
최 소 값	-0.128047	-0.174586
Jarque-Bera	7220.727* (0.0000)	441.1077* (0.0000)
K-S <i>D</i>	0.082409* (0.0000)	0.056396* (0.0012)

주) * 유의수준 1%에서 정규분포성의 귀무가설기각, () 유의확률 값.

주식 수익률의 분포형태는 투자자들이 정보에 대해서 반응한 결과를 나타내는 것으로 수익률의 생성과정에 대한 기본적인 사항을 제공한다. 전통적으로 주가의 연속적 변화, 즉 순간 수익률이 독립적이라면 일별 또는 주별 수익률 또한 확률변수의 성격을 띠게 되고 중심극한정리에 의해 수익률의 확률분포는 정규분포를 따른다고 주장한다. 그러나 종합주가지수 수익률이 정규분포하지 않고 leptokurtic한 비정규분포를 따르므로 거래정보 또는 그의 영향을 받는 수익률이 시계열적으로 독립적이지 않고 수익률간에 상관관계가 존재할 가능성이 있음을 유추해 볼 수 있다.

2. 자기상관분석결과

<표 2>는 종합주가지수 수익률의 원시계열과 절대값 및 제곱값에 대한 표본자기상관계수와 Ljung-Box Q통계량을 나타내고 있다. 선형 종속성을 파악하기 위해서 원시계열, $\{x_t\}$ 에 대한 자기상관분석을 실시한 결과, 유의수준 5%에서 일별 수익률의 경우는 시차 $k=1, 2, 5, 6$ 과 주별 수익률은 $k=3, 6$ 에서 자기상관이 존재하는 것으로 나타났다.⁹⁾ 하지만 일별 수익률의 1시차를 제외하고는 모든 경우에 자기상관계수가 0.1을 넘지 못하여 매우 약한 자기상관을 보이고 있다. 종합주가지수 수익률의 자기상관이 낮다는 것은 시계열 종속성이 작아서 IID가설에서 시계열적으로 독립적이라는 부분을 지지하는 증거로 받아들일 수도 있다.

하지만 자기상관함수는 두 변수간의 선형관계, 즉 1차 함수관계를 전제로 하여 상관을 검정하기 때문에 변수들간에 비선형적인 관계가 존재할 경우에 추정되는 상관계수는 의사상관계수(spurious correlation coefficient)가 될 수 있다. 통계적인 유의성에 문제가 있을 수 있으나 간단하게 사용될 수 있는 $\{|x_t|\}$ 와 $\{x_t^2\}$ 에 대해서 자기상관분석을 실시한 결과, 모든 시차에서 0과 유의적인 차이를 보이고 있다. 따라서 주식 수익률에 자기상관이 존재하지만 매우 낮기 때문에 WN(white noise)가설의 기각에 대해서는 유보하더라도 SWN(strict white noise)의 귀무가설은 기각되므로 랜덤워크가설을 기각할 수 있을 것으로 판단된다.¹⁰⁾

9) 표본자기상관계수의 표준오차는 $1/\sqrt{n}$, 즉 일별 수익률은 0.0125이고 주별 수익률은 0.0294이므로 유의수준 5%에서 귀무가설을 기각하기 위한 임계치의 절대값은 일별 자료에서는 0.0245이고 주별 자료는 0.0576이다.

10) 확률과정 $\{x_t\}$ 의 평균과 공분산함수는 $E(x_t) = \mu$ 와 $Cov(x_t, x_{t-k}) = E(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu) = \gamma_k$ 로 나타낼 수 있다. 우선 μ 와 γ_k 가 시간에 따라 변하지 않는 때, $\{x_t\}$ 를 2차 안정적(second-order stationary)이라고 하며, 모든 t 와 $k > 0$ 에 대해서 x_t 와 x_{t-k} 사이에 상관계수가 0인 경우를 무상관(uncorrelate)이라

<표 2> 원시계열의 자기상관계수

구분	시차	x_t		$ x_t $		x_t^2	
		$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}	$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}	$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}
일 별 수 익 률	1	0.113*	81.973(0.00)	0.281*	502.48(0.00)	0.222*	314.71(0.00)
	2	-0.039*	91.583(0.00)	0.310*	1114.1(0.00)	0.240*	681.68(0.00)
	3	0.003	91.636(0.00)	0.308*	1720.8(0.00)	0.223*	998.79(0.00)
	4	-0.001	91.637(0.00)	0.296*	2281.4(0.00)	0.225*	1321.9(0.00)
	5	-0.037*	100.29(0.00)	0.285*	2799.7(0.00)	0.216*	1620.9(0.00)
	6	-0.026*	104.74(0.00)	0.264*	3246.1(0.00)	0.179*	1825.1(0.00)
	7	-0.013	105.79(0.00)	0.254*	3656.7(0.00)	0.182*	2037.9(0.00)
	8	0.006	106.00(0.00)	0.261*	4090.6(0.00)	0.182*	2249.2(0.00)
	9	0.021	110.44(0.00)	0.267*	4546.0(0.00)	0.190*	2480.0(0.00)
	10	0.010	111.04(0.00)	0.227*	4874.4(0.00)	0.165*	2653.4(0.00)
20	-0.003	158.27(0.00)	0.200*	7888.3(0.00)	0.134*	4153.3(0.00)	
30	-0.014	169.66(0.00)	0.225*	10873.0(0.00)	0.198*	5899.1(0.00)	
주 별 수 익 률	1	-0.019	0.4424(0.52)	0.262*	79.676(0.00)	0.247*	70.907(0.00)
	2	0.038	2.1314(0.34)	0.180*	117.25(0.00)	0.139*	93.416(0.00)
	3	0.082*	9.8947(0.02)	0.240*	184.57(0.00)	0.209*	144.12(0.00)
	4	0.028	10.804(0.03)	0.191*	227.32(0.00)	0.159*	173.60(0.00)
	5	0.052	13.968(0.02)	0.214*	280.71(0.00)	0.188*	214.95(0.00)
	6	-0.061*	18.331(0.01)	0.117*	317.40(0.00)	0.139*	237.40(0.00)
	7	0.045	20.704(0.00)	0.205*	366.31(0.00)	0.157*	266.13(0.00)
	8	0.046	23.169(0.00)	0.202*	413.99(0.00)	0.213*	318.99(0.00)
	9	-0.055	26.776(0.00)	0.169*	447.26(0.00)	0.104*	331.73(0.00)
	10	0.024	27.434(0.00)	0.166*	479.66(0.00)	0.131*	351.96(0.00)
20	0.035	40.330(0.01)	0.160*	806.06(0.00)	0.150*	511.27(0.00)	
30	-0.041	61.891(0.00)	0.167*	1088.0(0.00)	0.176*	693.11(0.00)	

주) * 유의수준 5%에서 무상관 ($\hat{\rho}_k=0$)의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

본 논문의 1차적인 목적은 주식 수익률에 비선형 종속성이 존재하는지를 파악하는 것이다. 따라서 AR(p)모형을 이용하여 원시계열에서 선형 종속성을 제거한 다음 자기상관 분석을 다시 실시하였다.¹¹⁾ AR(6)잔차에 대한 자기상관분석의 결과는 <표 3>에 나타나 있으며, 일별 자료와 주별 자료에서 모두 $\{\epsilon_t\}$ 의 자기상관계수나 Q_{LB} 가 모든 시차에서 0과 유의적인 차이가 없음을 보이고 있어서 선형 종속성이 완전히 제거된 것으로 판단할 수 있다. 하지만 $\{\epsilon_t\}$ 의 변환, $\{|\epsilon_t|\}$ 와 $\{\epsilon_t^2\}$ 은 여전히 높은 자기상관을 보이고 있으므로 주식 수익률에 비선형 종속성이 존재한다는 하나의 증거로 볼 수 있다.

고 한다. 그리고 시계열 $\{x_t\}$ 의 변환, 예를 들면 $\{|x_t|\}$ 과 $\{x_t^2\}$ 등을 통해서도 상관관계가 없을 때를 통계적으로 독립적(statistically independent)이라고 한다. WN과정은 $\{x_t\}$ 가 안정적이고 무상관이라는 것을 의미하며, $\{x_t\}$ 가 WN과정이고 통계적으로 독립인 경우를 SWN과정이라고 한다. 자본시장이론에서 랜덤워크는 $\{x_t\}$ 가 SWN이라는 것을 의미하므로 WN과정으로만 해석하여 선형 독립성만을 검증하는데는 문제가 있을 수 있다.

11) 이를 위해 아카이케 정보기준(Akaike Information Criterion, AIC)을 최소로 하는 p차 자기회귀모형을 추정된 결과, 일별 및 주별 수익률에서 모두 AR(6)모형이 최적인 것으로 나타났다. 이에 대해서는 <부록>의 <표 A>를 참조할 것.

<표 3> AR(6)잔차의 자기상관계수

구분	시차	ε_t		$ \varepsilon_t $		ε_t^2	
		$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}	$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}	$\hat{\rho}_k$	Q_{LB}
일 별 수 익 률	1	0.000	0.0007(0.98)	0.278*	4924.7(0.00)	0.224*	319.60(0.00)
	2	0.000	0.0018(0.99)	0.317*	1134.1(0.00)	0.248*	710.64(0.00)
	3	0.001	0.0045(1.00)	0.303*	1721.7(0.00)	0.209*	989.14(0.00)
	4	0.001	0.0182(1.00)	0.298*	2286.8(0.00)	0.228*	1321.4(0.00)
	5	0.000	0.0182(1.00)	0.281*	2792.4(0.00)	0.210*	1602.6(0.00)
	6	0.002	0.0437(1.00)	0.266*	3243.1(0.00)	0.172*	1791.4(0.00)
	7	-0.010	0.6987(0.99)	0.255*	3658.7(0.00)	0.180*	1999.1(0.00)
	8	0.003	0.7625(0.99)	0.262*	4096.4(0.00)	0.180*	2204.9(0.00)
	9	0.020	5.2656(0.81)	0.261*	4531.0(0.00)	0.188*	2430.8(0.00)
	10	0.007	5.5782(0.85)	0.224*	4851.6(0.00)	0.158*	2590.7(0.00)
20	0.000	20.488(0.37)	0.204*	7889.5(0.00)	0.142*	4079.4(0.00)	
30	-0.017	31.373(0.35)	0.225*	10873.0(0.00)	0.191*	5734.3(0.00)	
주 별 수 익 률	1	0.002	0.0071(0.93)	0.268*	83.362(0.00)	0.268*	83.171(0.00)
	2	0.001	0.0095(1.00)	0.159*	112.47(0.00)	0.126*	101.53(0.00)
	3	-0.007	0.0605(0.99)	0.236*	177.26(0.00)	0.207*	151.11(0.00)
	4	-0.001	0.0608(1.00)	0.188*	218.18(0.00)	0.164*	182.29(0.00)
	5	-0.005	0.0864(1.00)	0.225*	276.83(0.00)	0.187*	222.81(0.00)
	6	0.001	0.0883(1.00)	0.188*	317.76(0.00)	0.146*	247.51(0.00)
	7	0.037	1.6753(0.98)	0.214*	370.86(0.00)	0.180*	285.15(0.00)
	8	0.042	3.7659(0.88)	0.199*	416.91(0.00)	0.207*	335.03(0.00)
	9	-0.048	6.4201(0.70)	0.168*	449.93(0.00)	0.102*	347.26(0.00)
	10	0.013	6.6185(0.76)	0.171*	484.03(0.00)	0.136*	368.94(0.00)
20	0.034	17.775(0.60)	0.150*	816.30(0.00)	0.143*	547.68(0.00)	
30	0.031	36.530(0.20)	0.168*	1083.1(0.00)	0.164*	716.54(0.00)	

주) * 유의수준 5%에서 무상관 ($\hat{\rho}_k=0$)의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

3. BDS검정결과

BDS검정법은 시계열이 IID한지를 검정하는 방법이다. 하지만 BDS검정은 IID라는 귀무가설에 대해서 구체적으로 정의되지 않은 대립가설을 검정하기 때문에 귀무가설을 기각하는 경우, 선형 및 비선형 종속성이 모두 그 원인이 될 수 있으므로 여러 가지 필터(filter)를 이용하여 그 잔차에 대해서 검정하는 방법이 필요하다.

1) 비선형 종속성검정

주식 수익률에 비선형 종속성이 존재하는지를 검정하기 위한 방법으로 원시계열과 선형성을 제거한 잔차에 대해서 BDS검정을 실시하였다. 분석에서 매립차원(m)은 2~10으로 정하고, 기준거리(ε)는 0.5σ , 1.0σ , 1.5σ 를 사용하였다.¹²⁾

12) 이때 ε 은 척도모수이므로 선정에 있어서 주의를 기울여야 한다. ε 을 크게 설정하면 시계열자료를 너무 많이 포함하여 비선형성을 포착하지 못하고, ε 이 작은 경우에는 포함되는 관측치의 수가 작기 때문에 분석의 신뢰성이 떨어지게 된다.

<표 4> 원시계열의 BDS통계량

구분	m	ϵ		
		0.5 σ	1.0 σ	1.5 σ
일별 수익률	2	0.017395(0.000)*	0.030493(0.000)*	0.026028(0.000)*
	3	0.021011(0.000)*	0.058372(0.000)*	0.060583(0.000)*
	4	0.018183(0.000)*	0.076548(0.000)*	0.094131(0.000)*
	5	0.013528(0.000)*	0.083985(0.000)*	0.120359(0.000)*
	6	0.009419(0.000)*	0.084359(0.000)*	0.140711(0.000)*
	7	0.006407(0.000)*	0.080380(0.000)*	0.154633(0.000)*
	8	0.004382(0.000)*	0.074107(0.000)*	0.162998(0.000)*
	9	0.003017(0.000)*	0.066859(0.000)*	0.167229(0.000)*
	10	0.002100(0.000)*	0.059518(0.000)*	0.168118(0.000)*
	주별 수익률	2	0.010825(0.000)*	0.023095(0.000)*
3		0.010221(0.000)*	0.038281(0.000)*	0.044830(0.000)*
4		0.007394(0.000)*	0.046477(0.000)*	0.066583(0.000)*
5		0.004559(0.000)*	0.047319(0.000)*	0.082260(0.000)*
6		0.002554(0.000)*	0.043909(0.000)*	0.094225(0.000)*
7		0.001418(0.000)*	0.038123(0.000)*	0.100079(0.000)*
8		0.000809(0.000)*	0.032378(0.000)*	0.103010(0.000)*
9		0.000441(0.000)*	0.027052(0.000)*	0.103374(0.000)*
10		0.000237(0.000)*	0.022409(0.000)*	0.101576(0.000)*

주) * 유의수준 1%에서 IID의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

<표 5> AR(p)와 ARIMA(p, d, q)잔차의 BDS통계량($\epsilon=1.0\sigma$)¹³⁾

매립 차원	일별 수익률		주별 수익률	
	AR(6)잔차	ARIMA(1, 1, 1)잔차	AR(6)잔차	IMA(1, 1)잔차
2	0.029684(0.000)*	0.030005(0.000)*	0.023252(0.000)*	0.022412(0.000)*
3	0.057428(0.000)*	0.057942(0.000)*	0.036969(0.000)*	0.037493(0.000)*
4	0.075403(0.000)*	0.076181(0.000)*	0.043564(0.000)*	0.045840(0.000)*
5	0.082808(0.000)*	0.083772(0.000)*	0.043045(0.000)*	0.046673(0.000)*
6	0.083193(0.000)*	0.084216(0.000)*	0.039582(0.000)*	0.043292(0.000)*
7	0.079348(0.000)*	0.080377(0.000)*	0.034341(0.000)*	0.037616(0.000)*
8	0.073162(0.000)*	0.074193(0.000)*	0.029154(0.000)*	0.031963(0.000)*
9	0.066044(0.000)*	0.067020(0.000)*	0.024295(0.000)*	0.026718(0.000)*
10	0.058740(0.000)*	0.059666(0.000)*	0.020154(0.000)*	0.022212(0.000)*

주) * 유의수준 1%에서 IID의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

<표 4>는 원시계열에 대한 BDS검정결과를 나타내는 것으로 일별 수익률과 주별 수익률 모두 시계열의 분포가 IID하다는 귀무가설을 기각하고 있다. 하지만 BDS검정법은 선형 종속성에 대해서도 높은 검정력을 보이므로 선형필터를 사용하여 시계열의 선형구조를 제거한 다음 추가검정을 실시하였다. 자기상관분석에서 사용하였던 AR(6)와 ARIMA(p, d, q)모형을 선형필터로 사용하여 잔차에 대해서 검정해 본 결과,¹⁴⁾ <표 5>에서 볼 수 있는 바와 같이 일별 자료와 주별 자료에서 모두 시계열의 분포가 IID하다는 귀무가설을 기각하고 있다.

13) ϵ 값이 변화에 따른 BDS통계량의 큰 변동이 없으므로 이하에서는 $\epsilon=1.0\sigma$ 에 대해서만 수록하였다.
 14) 일별 수익률은 ARIMA(1, 1, 1), 주별 수익률은 IMA(1, 1)모형이 수정 R^2 가 가장 높게 나타나고, 변수 추정 또한 통계적으로 유의한 결과를 보이고 있다. <부록>의 <표 B-1>과 <표 B-2>를 참조할 것.

2) 비선형 확률적 특성검정

주식 수익률의 생성과정이 IID하지 않다라는 결과는 효율적 시장론이나 선형 가격결정모형에 의문을 제기하는 것이며, 이러한 원인은 크게 비선형 확률적 과정과 비선형 결정론적 과정, 두 가지로 생각해 볼 수 있다. 비선형 확률모형들은 함수 내에 시변수(time variable)를 포함함으로써 비선형 종속성을 내포하고 있는데, 대표적으로 ARCH 계열의 모형을 들 수 있다.

본 절에서는 조건부 분산모형에 의해서 비선형 종속성이 설명될 수 있는지를 다음과 같은 순서로 검정하였다. 먼저 일별 수익률은 AR(6)와 ARIMA(1, 1, 1)모형, 주별 수익률에서는 AR(6)와 IMA(1, 1)모형을 선형필터로 사용하여 잔차시계열 $\{r_t\}$ 를 구한 다음 AIC에 의해 적절한 GARCH(p, q)모형과 TGARCH(p, q)모형을 추정한다.¹⁵⁾ 그리고 표준화잔차 $(z_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t})$ 에 대해서 BDS검정을 실시한다.

<표 6>은 GARCH(1, 1)과 TGARCH(1, 1)모형을 적용한 BDS검정결과를 보여주는 것으로, 선형모형만을 적용했을 때와는 다르게 낮은 매립차원 $m=2, 3$ 정도에서는 부분적으로 유의수준 5%에서 IID의 귀무가설을 채택하는 것으로 나타나고 있다. 이는 ARCH류의 비선형 확률모형을 통해서 주식 수익률의 비선형적 구조를 일부 설명할 수 있는 것으로 받아들일 수도 있다. 하지만 GARCH와 TGARCH모형을 적용한 후에도 대다수의 매립차원에서 IID의 귀무가설을 기각하는 것으로 나타나고 있으므로 비선형 종속성을 설명하기 위해서 ARCH류의 모형과는 다른 형태의 비선형모형의 도입을 고려할 필요가 있음을 시사하는 것이다.

장경천·김현석(2002)의 연구에서 RESET검정과 ARCH-LM검정을 실시한 결과, 확률과정의 평균과 분산에 비선형성이 존재한다고 밝히고 있다. ARCH류의 모형 중에서 GARCH(p, q)-M모형은 시간에 따라 변동하는 조건부 분산을 허용할 뿐만 아니라, 조건부 평균에 조건부 분산 또는 표준편차를 포함하여 평균과 분산에 모두 비선형성이 나타나는 모형이다.

그러나 GARCH(1, 1)-M모형의 표준화잔차를 이용하여 BDS검정을 실시한 결과, <표 7>에서 보는 바와 같이 GARCH나 TGARCH모형을 적용했을 때와 크게 다르지 않은 결과를 보이고 있다.

15) GARCH(p, q)와 TGARCH(p, q)모형을 추정한 결과, 일별 및 주별 수익률 모두 GARCH(1, 1)과 TGARCH(1, 1)모형이 적합하며, 변수에 대한 추정결과도 통계적으로 유의한 것으로 나타나고 있다. 이에 대해서는 <부록>의 <표 C-1>과 <표 C-2>를 참조할 것.

<표 6> GARCH(1, 1)과 TGARCH(1, 1)모형의 BDS통계량($\epsilon=1.0\sigma$)

구분	매립 차원	일 별 수 익 른		주 별 수 익 른	
		AR(6)잔차	ARIMA(1, 1, 1)잔차	AR(6)잔차	IMA(1, 1)잔차
G A R C H	2	-0.000874(0.184)	-0.000834(0.207)	0.002348(0.077)	0.001980(0.136)
	3	0.000179(0.770)	7.99E-05(0.898)	0.001658(0.107)	0.001615(0.181)
	4	0.001138(0.008)*	0.001036(0.019)**	0.001645(0.046)**	0.001600(0.049)**
	5	0.001119(0.000)*	0.001040(0.000)*	0.001003(0.041)**	0.001093(0.026)**
	6	0.000827(0.000)*	0.000772(0.000)*	0.000606(0.025)**	0.000641(0.018)**
	7	0.000535(0.000)*	0.000503(0.000)*	0.000349(0.014)**	0.000342(0.017)**
	8	0.000311(0.000)*	0.000293(0.000)*	0.000207(0.000)*	0.000195(0.001)*
	9	0.000169(0.000)*	0.000163(0.000)*	0.000112(0.000)*	9.28E-05(0.002)*
	10	8.89E-05(0.000)*	8.53E-05(0.000)*	7.28E-05(0.000)*	4.34E-05(0.012)*
	T G A R C H	2	-0.000817(0.212)	-0.000834(0.207)	0.002830(0.031)**
3		0.000275(0.651)	0.000102(0.895)	0.002312(0.052)	0.002415(0.043)**
4		0.001237(0.004)*	0.001074(0.018)**	0.002106(0.009)*	0.002169(0.007)*
5		0.001201(0.000)*	0.001092(0.000)*	0.001336(0.005)*	0.001513(0.001)*
6		0.000879(0.000)*	0.000811(0.000)*	0.000812(0.002)*	0.000932(0.001)*
7		0.000574(0.000)*	0.000532(0.000)*	0.000482(0.000)*	0.000559(0.000)*
8		0.000339(0.000)*	0.000311(0.000)*	0.000297(0.000)*	0.000333(0.000)*
9		0.000185(0.000)*	0.000175(0.000)*	0.000148(0.000)*	0.000182(0.000)*
10		9.83E-05(0.000)*	8.62E-05(0.000)*	7.98E-05(0.000)*	8.70E-05(0.000)*

주) * 유의수준 1%, ** 5%에서 IID의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

<표 7> GARCH(1, 1)-M모형의 BDS통계량($\epsilon=1.0\sigma$)

매립 차원	일 별 수 익 른		주 별 수 익 른	
	AR(6)잔차	ARIMA(1, 1, 1)잔차	AR(6)잔차	IMA(1, 1)잔차
2	-0.000905(0.169)	-0.000842(0.207)	0.002517(0.057)	0.002325(0.078)
3	0.000152(0.803)	8.23E-05(0.895)	0.001734(0.149)	0.001937(0.106)
4	0.001123(0.009)*	0.001038(0.018)**	0.001728(0.034)**	0.001860(0.023)**
5	0.001110(0.000)*	0.001042(0.000)*	0.001108(0.023)**	0.001249(0.011)**
6	0.000823(0.000)*	0.000775(0.000)*	0.000667(0.013)**	0.000744(0.006)*
7	0.000534(0.000)*	0.000505(0.000)*	0.000383(0.006)*	0.000421(0.002)*
8	0.000313(0.000)*	0.000294(0.000)*	0.000242(0.000)*	0.000243(0.000)*
9	0.000169(0.000)*	0.000164(0.000)*	0.000142(0.000)*	0.000129(0.000)*
10	8.87E-05(0.000)*	8.62E-05(0.000)*	9.33E-05(0.000)*	5.82E-05(0.000)*

주) * 유의수준 1%, ** 5%에서 IID의 귀무가설 기각, () 유의확률 값.

본 장에서는 종합주가지수 수익률은 정규분포하지 않고 leptokurtic하며, 비선형 종속성이 존재함을 살펴보았다. 그리고 ARCH류의 비선형 확률모형들을 적용해 본 결과, 주식 수익률의 비선형적 구조를 완전히 설명하지 못하는 것으로 나타나며, 장경천·김현석(2002)의 연구에서 확률과정의 평균과 분산에 비선형성이 존재한다고 밝히고 있다. 이는 주식 수익률의 생성과정을 설명하기 위해서 ARCH류의 모형과는 다른 형태의 비선형모형의 적용에 대해 고려할 필요가 있음을 시사하는 것이다. 따라서 다음 장에서는 종합주가지수 수익률이 비선형 결정론적인 카오스과정을 따르는지에 대해서 분석을 실시하였다.

IV. 카오스적 특성검정

카오스과정은 매우 복잡하고 불규칙하며 불안정하게 움직이는 것처럼 보이지만 사실은 시스템 내에 숨은 질서가 존재하는 비선형 결정론적 과정으로, 앞에서 카오스는 장기기억을 가지는 피드백 시스템이고 자기 유사성을 갖는 프랙탈구조이며 초기조건에 민감한 의존성을 보인다고 설명하였다. 그리고 카오스는 ‘국지적 폭발성 및 전체적 제한성(local explosiveness and global boundedness)’으로 특징지어지며, 특히 시계열의 경우에 카오스는 제한된 범위 내에서 값을 취하고 안정적인 시계열(bounded and stationary time series)에 대해서 적용되는 개념이다.

<표 8> 종합주가지수 수익률의 단위근검정결과

구 분	일 별 수 익 른			주 별 수 익 른		
	ADF	PP	임계치*	ADF	PP	임계치*
모형 I	-31.5069	-70.8878	-2.5561	-11.7673	-34.6816	-2.5675
모형 II	-31.5570	-70.0907	-3.4345	-11.8535	-34.7325	-3.9711
모형 III	-31.5690	-70.9087	-3.9651	-11.8764	-34.7377	-3.9710

주) * 유의수준 1%에서의 임계치.

<표 8>은 시계열의 안정성(stationarity)에 대해서 Augmented Dickey-Fuller(ADF)와 Phillips-Perron(PP) 단위근검정(unit root test)을 실시한 결과를 나타내는 것으로 모든 경우에서 유의수준 1%에서 단위근을 갖는다는 귀무가설을 기각함으로써 안정적인 시계열임을 보여주고 있다.¹⁶⁾ 따라서 종합주가지수 수익률은 카오스적 특성을 가지기 위한 필요조건을 충족하고 있으므로 이하에서는 카오스검정을 실시하였다.

1. R/S분석결과

자본시장에서 투자자들의 특성에 따라 정보에 대해 균일하지 않은 반응은 편의된 랜덤워크를 야기하게 된다. Hurst지수(H)는 0과 1사이의 값을 가지며, H가 0.5이면 장기기억효과(long-term memory effect)가 없는 순수한 랜덤워크를 따른다. 그러나 H가 0.5보다 큰 경우에는 관측치들은 독립적이지 않고 장기기억을 가지게 되며, 장기기억효

16) 모형 I, II, III은 각각 무상수항, 상수항 포함, 상수항 및 시간추세항을 포함하는 모형을 나타낸다. 그리고 ADF검정에서 lagged difference는 6으로 선정하였고, PP검정에서 lag truncation parameter는 Newey-West(1987)의 권고에 따라 $n^{1/4}$ 보다 큰 정수 값인 10과 6으로 설정하였다.

과는 시계열자료간의 상관성이 존재함을 의미하는 것으로 Mandelbrot(1972)는 상관성의 정도를 상관성척도($C = 2^{2(H-0.5)} - 1$)로 정의하였다.¹⁷⁾ 그리고 류성희·김상락(1997)은 시계열자료가 유한한 경우에 E(H)는 0.5보다 큰 값을 가지게 되므로 수정상관성척도($C^* = 2^{2(H-E(H))} - 1$)로 측정할 것을 권고하고 있다.¹⁸⁾

[그림 1]과 [그림 2]는 R/S그래프로 (A)는 log(n)과 log(R/S)를 나타내는 그래프이고, (B)는 R/S그래프에서 기울기의 전환점을 보다 정확하게 포착하기 위한 V-통계량($V_n = (R/S)_n / \sqrt{n}$)을 나타낸 그래프이다.¹⁹⁾ 그리고 <표 9>는 각각의 자료들에 대한 R/S분석결과를 나타내고 있다.

<표 9> 종합주가지수 수익률의 R/S분석결과

구 분		Hurst지수(H)	상관성척도	
			C	C*
일 별 자 료	원시계열	0.687(0.016)	0.296	0.201
	E(R/S)	0.555(0.005)	0.079	-
	AR(6)잔차	0.677(0.011)	0.278	0.184
	Scrambling	0.517(0.015)	0.024	-0.051
주 별 자 료	원시계열	0.704(0.012)	0.327	0.191
	E(R/S)	0.578(0.006)	0.114	-
	AR(6)잔차	0.685(0.017)	0.292	0.160
	Scrambling	0.520(0.019)	0.028	-0.077

주) () 표준오차.

17) 상관성척도(C)는 자기상관함수(ACF)가 아니라 일반적인 상관성의 척도로 H = 0.5는 완벽한 랜덤워크를 의미하며, 이때 C는 0이 된다. $0 \leq H < 0.5$ 일 때는 시스템이 랜덤워크보다 더 반전이 잦은 반지속적인 시계열(anti-persistent series)이고, 음(-)의 상관성을 가지게 된다. 그리고 $0.5 < H \leq 1$ 인 경우는 지속적인 시계열(persistent series)을 의미하며, 지속성의 정도는 H가 1에 가까워질수록 증가하고 C는 양(+)의 값을 가지게 된다.

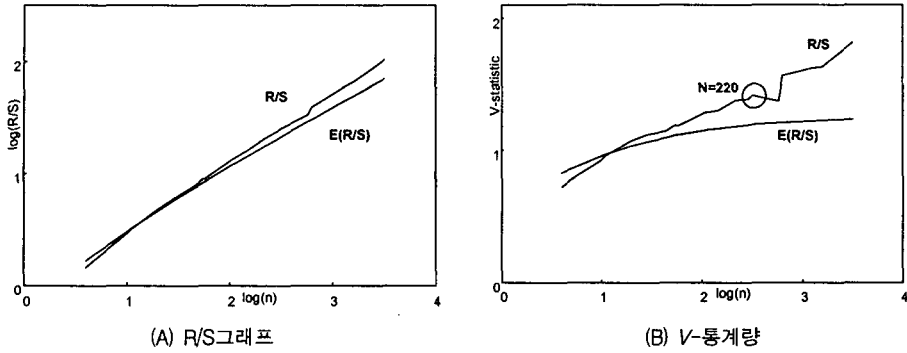
18) 관측치의 수(n)가 작은 경우에 Anis & Lloyd(1976)에 의해 제시된 $(R/S)_n$ 의 기대값, $E(R/S)_n$ 을 구하는 방정식에 편의가 존재함을 발견하고 Peters(1994)는 아래와 같은 수정방정식을 제시하였다.

$$E(R/S)_n = ((n-0.5)/n)(n\pi/2)^{-0.5} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r}$$

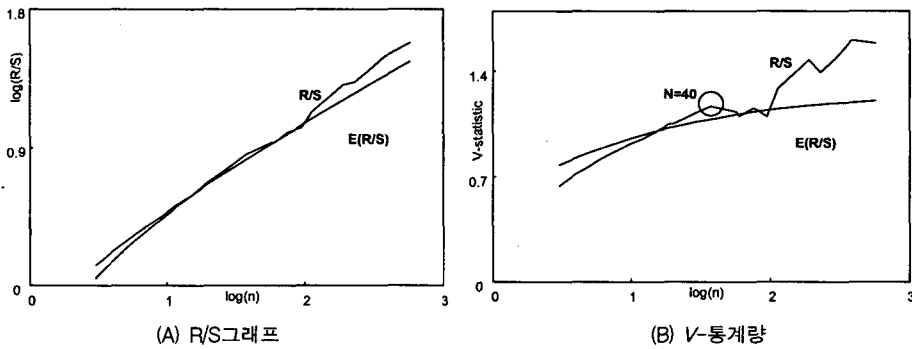
이때 시계열의 관측치 수가 증가함에 따라 E(H)는 0.5에 근접하게 되므로 관측치의 수가 무한히 커지면 C*는 C와 같아지게 된다.

19) 확률과정이 독립적이라면 V_n 과 log(n)의 그래프는 편평하게 된다. 반면 확률과정의 지속성이 강하다면 ($H > 0.5$) 그래프의 기울기는 우상향하게 되고, 반대로 회귀성이 강할 때는 ($H < 0.5$) 우하향하는 기울기를 가지게 된다.

[그림 1] 일별 수익률의 R/S그래프



[그림 2] 주별 수익률의 R/S그래프



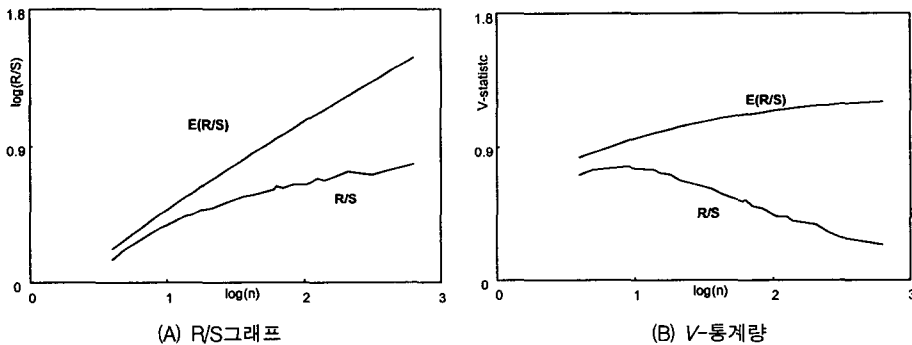
원시계열의 Hurst지수는 일별 수익률과 주별 수익률에서 각각 0.687과 0.704로 추정되며, E(H)인 0.555와 0.578보다 큰 값을 가지는 것으로 나타났다. 그리고 V-통계량을 나타내는 그래프 또한 우상향하고 있으므로 종합주가지수 수익률은 지속성이 강한 시계열임을 알 수 있다. 이때 일별 수익률에서 Hurst지수가 다소 낮게 추정되는 이유는 일별 수익률에 노이즈가 포함될 가능성이 주별 수익률보다 높기 때문으로 해석할 수 있다. 종합주가지수의 변동주기를 파악하기 위해서 [그림 (B)]의 V-통계량 그래프를 보면 약 220일과 40주 정도의 주기를 가지고 있는 것으로 판단된다.²⁰⁾ 상관성척도(C)는 일별 수익률에서 0.296과 주별 수익률은 0.327로 나타나며, 0.5대신에 E(H)를 이용하는 수정상관성척도(C*) 또한 0.201과 0.191로 나타나고 있으므로 수익률들 사이에 양(+)의 상관성이 존재함을 알 수 있다.²¹⁾

20) R/S분석에서의 주기는 비주기적 순환(non-periodic cycle)을 하는 시스템의 평균적인 순환길이를 나타내는 것으로 기술적 분석에서 관심을 갖는 가격변화의 주기가 아니라 통계적인 주기를 의미한다. 그리고 우리나라는 1998년까지 1주일에 6일 거래를 실시하였으므로 공휴일과 1998년 이후 시행한 5일 거래제도를 고려하면 220거래일과 40주는 거의 일치하는 결과이다.

그리고 선형 종속성을 최소화하기 위해서 AR(6)잔차를 이용한 분석에서 Hurst지수는 0.677과 0.685로 나타나서 원시계열과 큰 차이를 보이고 있지 않다. 복잡하고 무질서해 보이는 시스템이 카오스과정을 따르기 위해서는 숨은 질서가 존재해야 한다. Peters(1991)가 제시한 Scrambling방법을 이용하여 원시계열에 내재된 질서를 파괴한 후 R/S분석을 실시한 결과, Hurst지수가 각각 0.517과 0.520으로 나타나서 E(H)인 0.555와 0.578보다 낮으며, 0.5에 근접하고 있어서 카오스과정을 따르고 있다는 또 다른 증거로 받아들일 수 있다.

Fractal분포는 경제학에서 Pareto-Lévy, stable-Paretian분포와 같은 의미로 사용된다. EMH에서는 본질적으로 α 가 항상 2가 되어야 하고, 이때 분산은 유한하고 안정적이게 된다. 그러나 $0 < \alpha \leq 1$ 인 경우에는 안정적인 평균값이 존재하지 않는 반면, $1 < \alpha < 2$ 일 때에는 평균은 안정적이지만 분산은 정의되지 않거나 무한분산이 된다.²²⁾ Mandelbrot(1972)의 연구에 따르면 α 는 Hurst지수의 역수($\alpha = 1/H$)이다. 앞에서 구한 Hurst지수가 0.5보다 크므로 α 는 $1 < \alpha < 2$ 범위 내에 있게 되고, 주식 수익률의 확률분포는 프랙탈분포 또는 파레시안분포가 된다. 이러한 경우에 CAPM에서의 베타를 이용한 위험측정은 잘못된 결과를 가져올 수 있다. 왜냐하면 베타에 의한 위험평가는 효율적 시장하에서 유한분산을 가정하여 산출된 결과인데 반하여 프랙탈분포에서는 분산은 정의되지 않거나 무한하기 때문이다.

[그림 3] 변동성의 R/S그래프



- 21) 양(+)의 상관성이 존재한다는 것은 오늘 발생한 사건이 내일의 가격결정에도 영향을 미치며, 단순히 정보의 효과가 급속하게 사라지는 단기의존관계가 아니라 장기적으로 영향이 지속되는 것을 의미한다. 이러한 효과는 투자자들의 편의(bias) 또는 시장분위기(market sentiment)에 의한 것으로 볼 수 있으며, 효율적 시장가설을 부정하는 결과이다.
- 22) α 는 확률분포의 첨도와 꼬리부분의 두터운 정도를 측정하는 모수이다. 이에 대해서는 장경천·김현석(2002), pp.120-121을 참조할 것.

<표 10> 변동성의 R/S분석결과

구 분	Hurst지수(H)	상관성 척도	
		C	C*
5일간 분산	0.375(0.020)	-0.159	-0.239
E(R/S)	0.572(0.005)	0.105	-
Scrambling	0.528(0.011)	0.039	-0.059

주) () 표준오차.

이러한 설명이 보다 더 설득력을 얻기 위해서는 변동성 자체는 안정적 평균을 갖지 않는 반지속적인 시계열이어야 한다. 일별 수익률의 5일간 분산에 대한 시계열자료를 이용하여 R/S분석을 실시한 결과, [그림 3]과 <표 10>에서 볼 수 있는 바와 같이 Hurst지수는 0.5와 E(H)보다 낮은 0.375로 나타나므로 음(-)의 상관성을 가지며 반지속적이라는 것을 보여주고 있다. 또한 분산의 시계열을 Scrambling한 후에 실시한 R/S 분석에서는 Hurst지수가 0.528로 높아져서 무작위한 시계열에 가까워지는 것으로 나타나고 있다. 따라서 R/S분석의 결과는 leptokurtic한 주식 수익률의 분포를 설명하는 견해들 중에서 Mandelbrot(1964)의 주장을 지지하는 것으로 비선형 확률모형 보다는 비선형 결정론적인 접근방법이 보다 적합함을 보여주고 있다.

2. 상관차원분석결과

상관차원(D)은 프랙탈차원의 근사값으로 주식 수익률이 자기 유사성의 특성을 갖는 프랙탈구조인지를 판별할 수 있는 기준이 된다. 상관차원의 계산은 Grassberger & Procaccia(1983)의 GP도표를 이용하는 방법을 사용하였으며, 실증분석에서 매립차원(m)은 2, 4, 6, 8, 10, 12 및 20으로 설정하였고, 기준거리(R)는 시계열의 최대값과 최소값의 차이인 범위(range)의 10%부터 시작하였다.²³⁾ 다음은 시계열자료를 m-history의 m차원 집합으로 재구성²⁴⁾하여 상관적분을 계산하고 GP도표에서 $\log(C_m)$ 과 $\log(R)$ 사이의 기울기를 구한다. 이때 매립차원이 높아짐에 따라 일정하게 나타나는 기울기 D가 상관차원이 된다.²⁵⁾

23) 매립차원을 20까지만 설정한 이유는 매립차원을 너무 높게 설정할 경우에는 자료의 크기가 줄어들어 추정량에 편향(bias)이 발생할 수 있기 때문이다. 기준거리를 정하는 또 다른 방법으로 0.5σ 이상의 값을 선정하는 방법이 있으나 분석결과에 큰 차이를 보이지 않는다.

24) m-history : $X_m^n = (X_{t-m+1}, \dots, X_t)$

25) 실증분석에서 상관차원이 10이상으로 나타나는 경우에는 주식 수익률의 생성과정이 근사적으로 랜덤하다고 할 수 있으므로 확률모형으로 설명하는 것이 바람직하다.

<표 11> 종합주가지수 수익률의 상관차원분석결과

구분	$D \backslash m$	2	4	6	8	10	12	20
일별 자료	원시계열	0.537	1.211	1.891	2.539	3.078	3.377	3.869
	AR(6)잔차	0.536	1.204	1.880	2.501	3.061	3.368	3.852
주별 자료	원시계열	0.554	1.290	2.057	2.747	3.214	3.424	3.886
	AR(6)잔차	0.522	1.223	1.963	2.649	3.124	3.345	3.856

<표 11>은 상관차원분석의 결과를 보여주는 것으로 일별 및 주별 수익률 모두 매립차원 10이상에서 상관차원이 3과 4사이에 안정적으로 수렴하고 있으며, 매립차원을 20까지 증가시켜도 상관차원은 크게 변하지 않음을 보여주고 있다. 만일 주식 수익률의 생성과정이 카오스과정을 따른다면 선형성을 제거하더라도 원시계열과 동일한 상관차원을 가져야 한다.²⁶⁾ 이에 대해서는 AR(6)잔차를 이용하여 분석한 결과, 원시계열의 상관차원과 거의 유사하게 나타나고 있다. 이러한 결과는 우리나라 주식시장이 상관차원 4의 카오스적 특성을 가지고 있으며, 주식의 가격결정에 영향을 미치는 주요변수가 4개라는 것을 의미한다.²⁷⁾

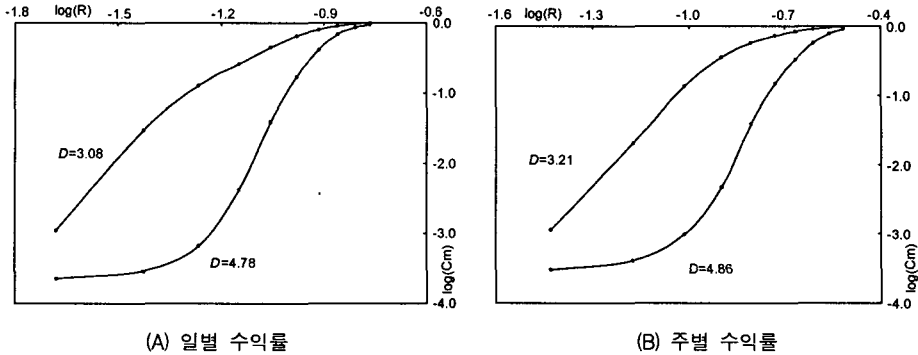
다음은 Scheinkman & LeBaron(1989)이 제시한 Shuffling방법을 이용하여 추가분석을 실시하였다. 원시계열이 카오스적 특성을 가지고 있다면 Shuffling방법에 의해서 재구성된 자료는 내재된 질서가 파괴되어 원시계열보다 무작위해질 것이므로 상관차원이 높아지게 되는 반면, 카오스적 특성이 존재하지 않는다면 카오스와 관련한 특성이 파괴되지 않아서 재구성된 자료의 상관차원이 변하지 않을 것이다.

[그림 4]는 매립차원 10에서 일별 수익률과 주별 수익률의 원시계열과 Shuffling자료에 대한 상관적분을 보여주는 것으로 Shuffling자료의 상관차원이 원시계열의 상관차원보다 높게 나타나는 것을 볼 수 있다. 따라서 상관차원분석의 결과를 종합해 볼 때, 주식 수익률에는 비선형 결정론적인 시스템의 특징인 카오스적 특성이 존재한다고 판단할 수 있다.

26) 이는 카오스시스템은 선형변환을 하더라도 그 속성이 변하지 않는 성질을 이용한 잔차검정(residual test)으로 초기조건에 민감한 의존성을 측정하는 리아푸노프검정에서도 이용된다. 자세한 내용은 Creedy & Martin(1994), pp.126을 참조할 것.

27) 프랙탈차원은 끝개에 관한 중요한 정보를 제공한다. 즉, 프랙탈차원은 분석대상 시스템의 복잡성(complexity)에 의존하므로 프랙탈차원 바로 위의 정수(next higher integer)는 그 시스템의 움직임의 모형을 나타내는데 필요한 최소한의 동태적 변수의 수를 나타낸다. 따라서 프랙탈차원의 근사값인 상관차원을 통해서 시스템의 복잡성과 모형수립에 필요한 변수의 개수를 파악할 수 있다.

[그림 4] Shuffling자료의 상관적분 ($m = 10$)



3. 리아푸노프지수의 추정결과

초기조건에 민감한 의존성²⁸⁾은 카오스시스템이 가지는 중요한 특징 중의 하나로 리아푸노프지수를 추정함으로써 검정할 수 있다. 양(+)²⁹⁾의 리아푸노프지수는 상태공간에서 비선형계가 발산하고 있음을 의미하며, 경험된 예측능력의 손실을 측정하는 수단으로도 이용된다. 한편 음(-)의 리아푸노프지수는 시스템에서 점들이 서로 접근하는 수렴 정도를 측정하는데 사용되며, 점끌개는 모두 음(-)의 리아푸노프지수로 구성될 때 나타난다.²⁹⁾

분석대상 시스템에 대한 동작 방정식을 알 수 없기 때문에 실험자료를 이용한 최대 리아푸노프지수(L_1)를 계산하는 방법을 도입해야 하며, L_1 이 양(+)³⁰⁾의 값을 갖는다는

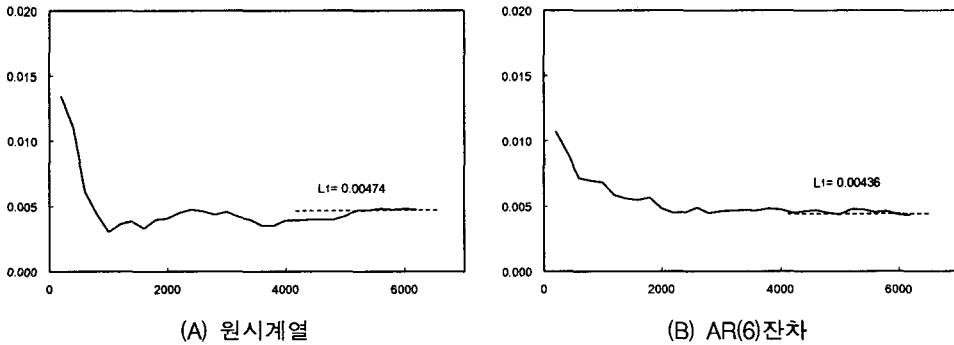
28) 일반적으로 결정론적 시스템에서는 초기조건을 안다면 미래의 결과를 정확하게 예측할 수 있다. 하지만 초기조건을 정확하게 측정하기는 불가능하며, 카오스시스템에서는 아무리 작은 오차라 하더라도 편차증폭 또는 긍정 피드백(deviation-amplifying or positive feedback)효과로 인해서 시간의 흐름에 따라 전혀 다른 결과를 초래한다. 예를 들어 로지스틱 맵 [$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$]에서 초기값을 0.1과 0.1000001로 설정하여 시계열의 행태를 비교해 보면 $t=30$ 에서 X 값은 각각 0.9122와 0.0583으로 크게 달라진다. 이러한 현상을 초기조건에 민감한 의존성 또는 나비효과라고 하며, 이러한 특성으로 인해서 카오스는 결정론적인 시스템임에도 불구하고 먼 미래상태는 예측할 수 없게 된다.

29) 끌개는 동력계를 위상공간에 나타냈을 때 동력계의 해가 지나가는 궤적을 의미하며, 기본적으로 세 가지 유형으로 나눌 수 있다. 가장 단순한 점 끌개(point attractor)는 큰 진동 후에 진폭이 시간에 따라 줄어들어 결국 안정된 균형점으로 수렴하는 형태를 보이며, 시계열상에서 규칙적인 진동을 반복하는 유한주기 끌개(limit cycle attractor)는 닫힌 원 형태의 위상도를 보인다. 경제학에서 균형을 정적인 개념으로 파악하는 것과 비교하면, 점 끌개는 단순화된 가정이 부여된 선형모형에서 최적해로 볼 수 있으며, 균형점 주위에서 주기적으로 변동하는 행태는 유한주기 끌개라 할 수 있다. 그리고 카오스시스템에서만 나타나는 카오스적 끌개(chaotic attractor) 또는 이상한 끌개(strange attractor)는 위상공간에서 하나의 균형점에 수렴하거나 폐곡선을 구성하지 않고 원형을 이루면서 반복되지 않는 다양한 궤도를 만든데 제한된 범위 내에서 비주기적 순환을 하기 때문에 동태적 균형을 의미한다.

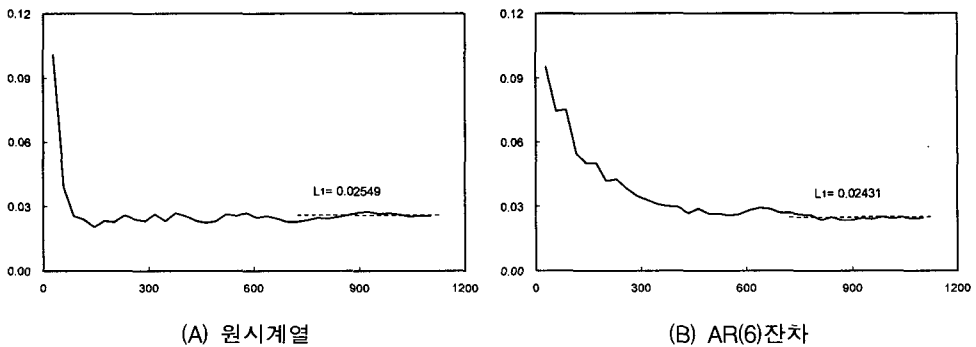
것은 분석대상 시스템에 초기조건의 민감한 의존성과 카오스적 끌개가 존재한다는 것을 의미하게 된다. 그리고 실제로 분석에 적용하게 될 자료는 노이즈가 포함된 한정된 수의 시계열자료이므로 Wolf 등(1985)이 제시한 실험자료를 다루는 경험법칙을 적용하면 다음과 같다.

우선 매립차원(m)은 기본 끌개의 위상공간보다 커야 하므로 상관차원분석에서 구한 상관차원 4보다 높은 값들을 적용하였다. 그리고 위상공간의 재구성에 필요한 시차(t)는 R/S분석에서 평균 궤도기간이 약 40주와 220일이라는 것을 알고 있으므로 $m \cdot t = Q$ 에 의해서 구할 수 있다. 다음은 근접성 평가를 위한 최대거리는 시계열자료의 범위의 10%, 최소거리는 최대거리의 10%로 설정하였으며, 전개기간은 접힘이 포함되지 않고 펼침이 포함될 수 있는 충분한 기간을 선택하였다.³⁰⁾

[그림 5] 일별 수익률의 리아푸노프지수



[그림 6] 주별 수익률의 리아푸노프지수



30) 이에 대해서는 Wolf, Swift, Swinney & Vastano(1985), pp.307-308을 참조할 것.

만일 최대 리아푸노프지수(L_1)가 안정적으로 수렴하지 않는다면, 모수들에 대한 선택에 문제가 있거나 분석자료가 충분한 주기를 가지고 있지 않기 때문이다. 이러한 문제가 없을 경우에도 L_1 이 안정적으로 수렴하지 않는다면 시스템이 비선형이 아니라는 결론을 내릴 수 있다. [그림 5]는 종합주가지수 일별 수익률의 최대 리아푸노프지수(L_1)에 대한 검정결과를 나타내는 것으로 원시계열과 AR(6)잔차에서 각각 0.00474bit/day와 0.00436bit/day로 거의 유사한 양(+)의 값에 안정적으로 수렴하고 있으므로 초기조건에 민감한 의존성을 가지고 있는 것으로 판단된다.

리아푸노프지수는 초기조건에 민감한 의존성에 대한 검정뿐만 아니라 예측능력의 상실기간을 측정하는 수단으로도 사용될 수 있다.³¹⁾ 원시계열에서는 하루에 약 0.00474bit의 비율로 주식 수익률의 예측능력을 상실하고 있으며 1/0.00474, 즉 211일 후에는 모든 예측효과가 사라지게 된다. 그리고 선형 종속성을 제거한 AR(6)잔차의 경우에는 1/0.00436, 229일 후에는 예측효과가 없어지는 것으로 나타나고 있다. 이는 일별 수익률에 대한 R/S분석에서 평균 주기가 220일이라는 것과 거의 일치하는 결과이다.

[그림 6]은 종합주가지수 주별 수익률의 최대 리아푸노프지수(L_1)에 대한 검정결과를 나타내는 것으로 원시계열과 AR(6)잔차에서 각각 일정한 양(+)의 값, 0.02549bit/week와 0.02431bit/week로 수렴하고 있으므로 카오스적 특성이 존재한다고 판단할 수 있다. 그리고 원시계열은 1/0.02549 또는 39.2주, AR(6)잔차의 경우에는 1/0.02431, 즉 41.1주 후에는 모든 예측효과가 사라지는 것으로 나타나고 있다. 이 또한 R/S분석에서 주별 수익률의 평균 주기가 40주라는 것과 거의 일치하고 있다.

본 연구에서 종합주가지수 수익률에 대한 카오스검정의 결과를 정리하면 다음과 같다. 우선 주식 수익률은 장기기억을 가지는 지속성이 강한 시계열로 편의된 랜덤워크를 따르며, 프랙탈분포하는 것으로 나타났다. 또한 프랙탈차원의 근사값인 상관차원(D)은 매립차원 10이상에서 3과 4사이에 안정적으로 수렴하고 있다. 그리고 초기조건에 민감한 의존성을 판별하는 리아푸노프지수검정에서 L_1 이 안정적인 양(+)의 값에 수렴하며, 예측능력의 상실기간은 R/S분석에서의 평균 주기인 약 40주 또는 220일과 거의 일치하고 있다. 이러한 결과들은 카오스시스템의 특성과 부합하는 것으로 주식 수익률의 생성과정은 카오스과정을 따르는 것으로 판단할 수 있다.

31) 리아푸노프지수는 Shannon & Weaver(1963)의 정보이론(information theory)에 기초하여 시스템의 불확실성을 bit단위로 측정된 엔트로피(entropy)로 파악하고 있다. 따라서 L_1 이 0.01이라면 매기간 0.01bit씩 예측력이 상실되고 있음을 의미한다. 즉, 현재 정보에 의한 효과를 1bit의 정확도로 측정했을 때, 1/ L_1 기간 후에는 모든 정보효과가 사라지게 된다는 것이다.

V. 요약 및 결론

본 논문은 주식 수익률의 생성과정에 비선형적 특성이 존재하는지를 검정하기 위해 1980년 1월부터 2002년 5월까지 종합주가지수 일별 수익률과 주별 수익률을 이용하여 실증분석을 실시하였다. 이때 수익률은 로그수익률이며, 분석내용은 크게 비선형 종속성에 대한 검정과 비선형 확률적 특성검정 그리고 비선형 결정론적인 카오스검정으로 구분할 수 있다.

비선형적 특성에 대한 분석에서 주식 수익률은 leptokurtic한 비정규분포를 따르며, 원시계열과 AR(p), ARIMA(p, d, q)모형의 잔차를 이용한 자기상관분석과 BDS검정에서 수익률의 생성과정은 IID하지 않고 비선형 종속성이 존재하는 것으로 나타났다. 비선형적 상관관계의 존재는 급격한 주가의 변동과 불안정한 확률분포를 의미하는 것으로 외생적인 구조변화 또는 투자자들의 투자행위에 따른 내생적인 요인에서 그 원인을 찾을 수 있다. 하지만 주별 및 일별 수익률에서도 IID를 기각하고 있으므로 주식시장의 구조변화가 그렇게 빈번하게 발생한다고는 볼 수 없기 때문에 내생적 요인에 기인한다고 할 수 있다. 내생적 요인에 의한 비선형성은 크게 비선형 확률적 과정과 비선형 결정론적 과정으로 구분할 수 있다.

그러나 원시계열에서 선형성을 제거한 다음에 GARCH(1, 1), TGARCH(1, 1) 그리고 GARCH(1, 1)-M모형을 적용하여 구한 표준화잔차에 대해서 BDS검정을 실시한 결과, 대부분의 매립차원에서 IID의 귀무가설을 기각하고 있다. 따라서 ARCH류의 비선형 확률모형으로는 주식 수익률의 비선형적 구조를 완전히 설명하지는 못하는 것으로 판단되며, 이는 주식 수익률의 생성과정을 설명하기 위해서 ARCH류의 모형과는 다른 형태의 비선형모형의 도입에 대해 고려할 필요가 있음을 시사하는 것이다.

카오스는 무작위하게 움직이는 것처럼 보이지만 사실은 숨은 질서가 존재하는 비선형 결정론적인 과정이다. 카오스시스템은 과거의 사건이 현재에 영향을 미치는 피드백 시스템이고 자기 유사성을 갖는 프랙탈구조이며, 초기조건에 민감한 의존성을 가지고 있다. 단위근검정에서 종합주가지수 수익률은 카오스적 특성을 가지기 위한 필요조건인 안정적인 시계열임을 보여주고 있다. 그리고 카오스검정의 결과를 정리하면, 우선 원시계열과 AR(6)잔차, 5일간 분산시계열을 이용한 R/S분석에서 주식 수익률은 장기 기억을 가지는 지속성이 강한 시계열로 편된 랜덤워크를 따르고 프랙탈분포하는 것으로 나타났다. 또한 상관차원분석과 리아푸노프지수 추정결과, 프랙탈차원의 근사값인 상관차원(D)이 3과 4사이에 안정적으로 수렴하며, 최대 리아푸노프지수(L₁)가 양(+)의

값을 가지므로 카오스적 끌개와 초기조건에 민감한 의존성이 존재하는 것으로 나타난다. 이러한 결과들은 카오스시스템의 특성과 부합하는 것으로 주식 수익률의 생성과정이 비선형 결정론적인 카오스과정을 따르는 것으로 판단할 수 있다.

주식 수익률이 장기기억과정을 보이는 편의된 랜덤워크를 따르므로 효율적 시장가설을 기각할 수 있으며, 투자자들의 의사결정과정에서 나타나는 질적인 측면에서의 주식 시장에 대한 이해가 중요하다는 것을 암시한다. 또한 주식 수익률의 분포가 Mandelbrot (1964)가 주장하는 분산이 무한하거나 정의되지 않는 프랙탈분포를 따르는 것으로 나타나므로 기존의 위험측정 수단인 분산이나 베타에 문제가 있음을 유추할 수 있다. 상관차원분석의 결과는 주식의 가격결정에 영향을 미치는 주요변수가 4개라는 것을 의미하므로 과거 수익률의 시차변수와 3개의 기본적 요인을 결합하여 시장에 대한 모형수립이 가능할 것으로 생각된다. 그리고 초기조건에 민감한 의존성이 존재하기 때문에 체계적인 장기예측은 불가능하지만 비선형성에 근거한 거래규칙을 찾아낼 수 있다면 단기적인 예측은 가능할 것으로 판단된다.

본 연구는 실증분석에서 약 23년간의 장기시계열을 사용하고 있으며, 그동안 경제가 급변하는 과정에서 주식시장의 구조변화가 발생한 것은 부인할 수 없는 사실이다. 그러나 이러한 구조변화와 카오스적 특성의 존재와의 관계에 대한 연구가 이루어지지 못하여 한계점으로 남아있으며, 향후 구조변화와 카오스에 관한 심도 있는 연구가 있어야 할 것으로 생각된다. 다만 카오스의 주요한 특성인 프랙탈구조는 통계적으로 단절성(intermittency)을 내포하고 있으며, 이는 구조변화와 장기기억의 연관성 측면에서 보면 장기기억특성이 사라지는 시점에서 구조변화가 발생할 수 있음을 제기하는 것이다. 이와 관련하여 Gourioux & Jasiak(2001)은 빈번하지 않은 구조변화가 자기상관함수에서 장기기억효과를 발생시킬 수 있음을 보여주고 있다.

주식시장이 카오스적 특성을 보인다는 연구결과들을 바탕으로 이를 모형화하기 위한 다양한 시도들이 이루어지고 있으며, 아직 정형화되지는 않았지만 대표적인 연구방향을 살펴보면 다음과 같다. 우선 주식 수익률에 카오스적 특성이 존재한다면 효율적 시장가설(EMH)을 기각하게 되므로 프랙탈구조와 관련된 응집시장가설(CMH)과 프랙탈 시장가설(FMH) 등 EMH를 대체할 수 있는 연구들이 이루어지고 있다. 그리고 장기기억을 가지는 지속성이 강한 시계열은 분수브라운과정(FBM)을 따르게 되는데, 이를 모형화하기 위한 ARFIMA모형의 적용에 관한 연구들은 상당한 진척을 보이고 있다. 또한 다중프랙탈모형(MMAR)은 변동성의 장기기억특성을 모형화하기 위한 것으로 ARCH모형에 기반을 두면서 이러한 특성을 나타내기 위한 FIGARCH모형의 적용에

관한 연구들도 활발하게 이루어지고 있다.

주식시장에서 카오스적 끌개에 대한 해석은 감정(sentiment) 또는 기술적 요인들(technical factors)에 의해 펼침이 발생하고 기본적 가치(fundamental value)에 의해 접힘이 발생하여 가격이 합리적 범위로 되돌아온다는 것이다. 따라서 카오스적 끌개를 조건부 평균으로 보고 조건부 평균의 변화를 탐지하는데 적합한 비모수적 추정법인 국지적 가중회귀법(LWR) 등을 이용하여 모형화하려는 노력들이 있으며, 카오스는 단기적 가격변동에 영향을 미치는 기술적 요인(K -map)과 전반적인 추세를 결정하는 기본적 요인(Z -map)을 모두 반영하고 있다는데 착안하여 비선형적 체계하에서 기본적 분석과 기술적 분석을 통합하려는 연구들이 진행되고 있다.

본 연구는 주식 수익률의 생성과정이 비선형 결정론적인 카오스적 특성을 가지고 있음을 제시하였다. 주식 수익률의 생성과정이 카오스과정을 따른다는 것은 기존 효율적 시장가설이나 선형 가격결정모형을 토대로 한 연구결과에 근본적인 오류가 있을 가능성을 시사한다. 따라서 이러한 연구결과를 바탕으로 보다 다양하고 심도 있는 카오스검정이 필요하며, 카오스이론과 자본시장이론의 접목에 관한 연구가 활발하게 진행되어야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- 김규영, “주식가격의 장기적 종속성에 관한 연구”, 재무관리연구, 제13권 제1호, 1996, 101-114.
- 김영규, 배재봉, “Chaos모형을 이용한 한국 주식시장의 비선형 동태적 특성에 관한 연구”, 재무관리연구, 제11권 제1호, 1994, 73-96.
- 류성희, 김상락, “한국주가지수 수익률의 변동특성에 관한 연구 - R/S분석을 중심으로”, 재무관리연구, 제14권 제3호, 1997, 183-201.
- 백응기, “업종별 주가지수의 카오스 검정 및 비선형예측”, 재무관리연구, 제14권 제1호, 1997, 171-205.
- 이일균, “카오스 현상과 자본시장의 가격형성 메카니즘”, 증권학회지, 제23집, 1998, 1-59.
- 장경천, 김현석, “주식 수익률의 카오스적 특성에 관한 실증연구”, 증권학회지, 제30집, 2002, 99-130.
- Brock, W. A., Dechert, W. D. and Scheinkman, J. A., “A Test for Independence Based on the Correlation Dimension,” unpublished paper, *University of Wisconsin, Madison*, 1987.
- Brock, W. A., Hsieh, D. A. and LeBaron, B., “*Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*,” Cambridge, MA: The MIT Press, 1994.
- Brock, W. A., Dechert, W. D., Scheinkman, J. A. and LeBaron, B., “A Test for Independence Based on the Correlation Dimension,” *Econometric Reviews*, 15(3), (1996), 197-235.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C., “*The Econometrics of Financial Markets*,” Princeton University Press, 1997.
- Cootner, P., ed., “*The Random Character of Stock Market Prices*,” Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1964.
- Creedy, J. and Martin, V. L., “*Chaos and Non-linear Models in Economics - Theory and Applications*,” Edward Elgar Publishing Ltd., 1994.
- Engle, R. F., “*ARCH - Selected Readings*,” Oxford University Press, 1995.
- Gourieroux, C. and Jasiak, J., “Memory and Infrequent Breaks,” *Economics Letters*,

- 70, (2001), 29-41.
- Grassberger, P. and Procaccia, I., "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica*, 9D, (1983), 189-208.
- Hsieh, D. A., "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance*, 46(5), (1991), 1839-1877.
- Hurst, H. E., "Long Term Storage Capacity of Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, (1951), 770-799.
- Larrain, M., and Pagano, M., "Forecasts from a Nonlinear T-Bill Rate Model," *Financial Analysts Journal*, (November/December 1993), 83-88.
- Lo, A. W., "Long Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, 59, (1991), 1279-1313.
- Mandelbrot, B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, in P. Cootner, ed., *The Random Character of Stock Prices*. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1964.
- Mandelbrot, B., "Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles : From the Covariance to R/S Analysis," *Annals of Economic and Social Measurement*, (1972), 259-290.
- Peters, E. E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- Peters, E. E., *Fractal Market Analysis - Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- Scheinkman, J. A. and LeBron, B., "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business*, 62, (1989), 311-337.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A., "Determining Lyapunov Exponents From a Time Series," *Physica*, 16D, (1985), 285-317.

<부록> AR · ARIMA · GARCH모형의 추정결과

<표 A> AR(p)모형의 AIC값

모형	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)	AR(5)	AR(6)	AR(7)
일별수익률	-5.51500	-5.51762	-5.51770	-5.51730	-5.51814	-5.51823*	-5.51795
주별수익률	-3.68213	-3.68100	-3.68599	-3.68428	-3.68394	-3.68614*	-3.68495

<표 B-1> ARIMA(p, d, q)모형의 수정 R²

ARIMA(p, d, q)	1 0 1	1 0 0	0 0 1	1 1 1	1 1 0	0 1 1
일별수익률	0.0150	0.0125	0.0138	0.4428*	0.1717	0.4358
주별수익률	0.0028	0.0020	0.0019	0.5077	0.2788	0.5082*

<표 B-2> ARIMA(p, d, q)모형의 변수추정결과

통계량	일별자료 ARIMA(1, 1, 1)		주별자료 IMA(1, 1)	
	추정치	t 값	추정치	t 값
ϕ_1	0.1115	8.9623	-	-
θ_1	-0.9975	-2456.1	-0.9964	-518.78
DW 통계량	1.983		2.039	
로그우도합수	17587.1		2134.49	

<표 C-1> GARCH모형의 AIC값

모형	일별수익률		주별수익률	
	AR(6)	ARIMA(1, 1, 1)	AR(6)	IMA(1, 1)
GARCH(1,1)	-5.940006*	-5.937738*	-3.933233*	-3.935417*
GARCH(1,2)	-5.939692	-5.937425	-3.931309	-3.932912
GARCH(2,1)	-5.939691	-5.937426	-3.924495	-3.929091
TGARCH(1,1)	-5.942039*	-5.939905*	-3.937764*	-3.934649*
TGARCH(1,2)	-5.941740	-5.939605	-3.932665	-3.934008
TGARCH(2,1)	-5.941732	-5.939603	-3.932595	-3.931937

<표 C-2> GARCH모형의 변수추정결과

통계량	일별자료				주별자료			
	AR(6)잔차		ARIMA(1, 1, 1)잔차		AR(6)잔차		IMA(1, 1)잔차	
	GARCH	TGARCH	GARCH	TGARCH	GARCH	TGARCH	GARCH	TGARCH
α_0	4.85E-6 (25.098)	4.90E-6 (22.784)	4.87E-6 (25.351)	4.92E-6 (22.918)	1.94E-5 (3.4684)	1.64E-5 (3.1848)	1.78E-5 (3.7871)	1.58E-5 (3.6999)
α_1	0.1653 (21.259)	0.1372 (16.716)	0.1664 (21.801)	0.1365 (16.963)	0.0957 (7.2599)	0.0626 (4.4067)	0.0917 (7.3892)	0.0610 (4.4281)
γ	-	0.0528 (4.8823)	-	0.0562 (5.0663)	-	0.0402 (2.6458)	-	0.0407 (2.7963)
β_1	0.8824 (119.86)	0.0528 (4.8823)	0.8218 (123.03)	0.8233 (120.97)	0.8958 (63.285)	0.9105 (69.653)	0.9009 (69.856)	0.9122 (75.731)
DW 통계량	2.0005	2.0004	1.9883	1.9882	1.9926	1.9927	2.0393	2.0393
로그우도합수	18933.8	18941.3	18938.5	18946.4	2267.43	2269.681	2279.9	2282.56

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 21, Number 1, Jun. 2004

A Study on the Nonlinear Deterministic Characteristics of Stock Returns

Kyung-Chun Chang* · Hyun-Seok Kim**

<abstract>

In this study we perform empirical tests using KOSPI return to investigate the existence of nonlinear characteristics in the generating process of stock returns. There are three categories in empirical tests; the test of nonlinear dependence, nonlinear stochastic process and nonlinear deterministic chaos.

According to the analysis of nonlinearity, stock returns are not normally distributed but leptokurtic, and appear to have nonlinear dependence. And it's decided that the nonlinear structure of stock returns can not be completely explained using nonlinear stochastic models of ARCH-type.

Nonlinear deterministic chaos system is the feedback system, which the past incidents influence the present, and it is the fractal structure with self-similarity and has the sensitive dependence on initial conditions. To summarize the results of chaos analysis for KOSPI return, it is the persistent time series, which is not IID and has long memory, takes biased random walk, and is estimated to be fractal distribution. Also correlation dimension, as the approximation of fractal dimension, converged stably within 3 and 4, and maximum Lyapunov exponent has positive value. This suggests that chaotic attractor and the sensitive dependence on initial conditions exist in stock returns. These results fit into the characteristics of chaos system. Therefore it's decided that the generating process of stock returns has nonlinear deterministic structure and follow chaotic process

Keywords : Nonlinearity, Chaos, Long Memory, Fractal, Sensitive Dependence on Initial Conditions

* School of Business, Chung-Ang University

** Department of Business Administration, Namseoul University