PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
19: 11 ~ 16, 2004

밀집성 주위 MINKOWSKI 자기권의 '제트 방정식'
THE 'JET EQUATION' IN A MINKOWSKI MAGNETOSPHERE AROUND THE COMPACT OBJECTS

박석재
한국천문연구원

SEOK JAE PARK
Korea Astronomy Observatory
E-mail: sjpark@kao.re.kr
(Received December 6, 2004; Accepted December 19, 2004)

ABSTRACT

In this review article the famous 'jet equation' in a Minkowski magnetosphere around the compact objects will be fully derived for the pedagogical purposes.

Keywords: black hole physics — MHD — galaxies : jets

1. 서론

우리는 Park(2000, 이하 논문 I)에서 Goldreich & Julian (1969, 이하 GJ)이 발표된 1969년부터 최근에 이르기까지, 30여 년 동안 발전된 중성자성과 블랙홀 자기권 모델에 대하여 자세히 알아보았다. 그 내용 중에서도 특히 비상대론적인 '제트 방정식'이 Park(2002, 이하 논문 II)에서 더욱 자세히 다루어졌는데 그 이유는 이것이 제트를 분출하는 밀집성 자기권을 가장 잘 기술하는, 천체물리학적으로 너무도 중요한 방정식이기 때문이다.

비상대론적 제트 방정식은 Okamoto(1975)에 의해 천체물리학계에 처음으로 소개된 후 미국, 일본, 영국 등에서 집중적으로 연구되었는데 특히 미국의 Cornell 대학, 일본의 Nagoya 대학, 영국의 Cambridge 대학 등에서 많은 결과들을 얻었다. 특히 Cornell 대학은 이 방정식 하나로 많은 대학원생들이 박사 학위를 받았을 정도였다. 이렇게 중요한 방정식이기 때문에 그것을 처음부터 끝까지 유도해보는 것은 교육적으로도 매우 중요한 일이 되고 있다. 논문 II는 우리 학생들의 용이한 학습을 위해 비상대론적 제트 방정식을 자세히 유도하는 내용을 담고 있다.

이 논문에서는 논문 II로부터 한 단계 더 나아가 상대론적인 경우, 그것도 가장 기초적인 Minkowski 시공간에서의 제트 방정식을 유도하고자 한다. 비상대론적인 모델로부터 바로 일반상대론적인 Schwarzschild 또는 Kerr 시공간으로 넘어가지 않고 Minkowski 시공간을 다루는 이유는, 실제로 역사적으로도 그렇게 모델이 발전되었기도 했지만, 교육적 목적에 있다. 이 논문에서는, 논문 I이나 논문 II와 달리, 3+1차원 시공간적 접근을 배제하고 원래 방식대로 4차원 시공간적 접근을 보여줌으로써 훨씬 더 큰 교육적 효과를 추구하도록 하겠다. 물론 물리학은 동일한 것이지만 실제로 3+1차원 시공간적으로 유도된 결과가 4차원 시공간적으로 유도된 결과와 같다는 것을 보여주는 것은 전혀 쉬운 일이 아니다.

논문 I, 논문 II에서와 마찬가지로, 시공간 좌표를 (t,r), 공간의 원통 좌표계를 (R,φ,z), 구 좌표계를 (r,θ,φ)라 할 때 시간에 따라 변하지 않고 z−축에 대하여 대칭을 유지시키기 위하여 모든 식에서

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

을 가정하겠다.

밀집자성의 '북극' 위에서 대칭축인 z−축 한 점으로부터 거리가 R만큼 떨어진 임의의 원을 생각하자. 그 원으로 둘러싸인 표면을 A라 하고(평면일 필요는 없음) 면적 미분소를 dS, 그 표면을 지나는 자기 플럭스 Ψ를

$$\Psi = \int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}2)$$

와 같이 정의하자. 자기권 모델은 결국 이러한 Ψ에 대한 Grad-Shafranov 방정식을 푸는 것으로 귀착된다. 플라스마의 흐름을 포함하게 되면 그 Grad-Shafranov 방정식은 곧 우리가 구하는 제트 방정식이 되는 것이다.

먼저 II장에서는 논문 II에서 유도한 비상대론적 제트

방정식을 살펴보도록 하겠다. III장에서는 Minkowski 자기권에서 보존되는 물리량들에 대해 알아보도록 하겠다. 그리고 마지막으로 IV장에서는 Minkowski 자기권의 제트 방정식을 유도해보도록 한다.

이 논문에서 그리스 문자는 4차원 첨자이고 3차원 벡터는 굵은 활자로, 4차원 벡터는 화살표 활자로, 텐서는 굵은 화살표 활자로 표기하도록 한다.

2. 비상대론적 시공간의 제트 방정식

서론에서 밝힌 바와 같이 이 절에서는 논문 II에서 유도된 비상대론적 제트 방정식에 대하여 정리해 보기로 한다. 더욱 자세한 유도는 논문 II를 참조하기 바란다.

우리가 생각하는 자기권 모델은 highly-conducting 플라스마로 가득 채워져 있어 전기장 $\boldsymbol{E}$, 자기장 $\boldsymbol{B}$, 자기력선의 속도 v, 광속도 c 사이에는

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}v\times\boldsymbol{B}=0 \tag{2-1}$$

과 degenerate 조건

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2-2}$$

이 만족된다고 가정한다. 여기서 force-free 상태 같이 더욱 강한 가정은 걸리고 있지 않음에 유의하자.

식 (1-1)에 의하여 우리 모델에서는 Maxwell 방정식이

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e \tag{2-3a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2-3b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{2-3c}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}j \tag{2-3d}$$

와 같은 꼴로 주어진다. 여기서 ρ_e는 전하 밀도, j는 전류 밀도다.

플라스마는 당연히 식 (1-1)을 만족하는 자기유체역학 연속 방정식

$$\nabla\cdot(\rho v)=0 \tag{2-4}$$

과 Euler 방정식

$$\rho(v\cdot\nabla)v=\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}j\times\boldsymbol{B}-\nabla P \tag{2-5}$$

에 의하여 기술된다. 식 (2-4), (2-5)에서 ρ는 플라스마의 밀도, v는 플라스마의 속도, P는 압력이고 중력은 무시하고 있음에 유의하자.

입자들은 toroidal 방향으로 $v^{\mathrm{T}}=R\Omega$로 회전한다고 생각하고 여기에 poloidal 방향의 속도를 더해 전체 속도 v를

$$v\equiv v^{\mathrm{T}}+v^{\mathrm{P}} \tag{2-6}$$

와 같이 나타내자. 그러면 식 (2-1), (2-3c)는 v^{P}가 임의의 스칼라 κ를 이용하여

$$v^{\mathrm{P}}\equiv\kappa\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{2-7}$$

로 표현될 수 있게 해준다. 또한 식 (2-7)을 이용하면 식 (2-1), (2-3c)로부터

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}\cdot\nabla\left(\Omega-\frac{\kappa B^{\mathrm{T}}}{R}\right)=0 \tag{2-8}$$

을 얻는다. 즉 이 경우 Ω^{F}는

$$\Omega^{\mathrm{F}}=\Omega-\frac{\kappa B^{\mathrm{T}}}{R} \tag{2-9}$$

가 되어야 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 되고

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}\cdot\nabla\Omega^{\mathrm{F}}=0, \tag{2-10}$$

즉 Ferraro iso-rotation을 얻게 된다. 물론 Ω^{F} 값은 한 자기력선을 따라 당연히 일정한 값을 갖는다.

식 (2-9)가 성립하는 경우 플라스마 속도의 toroidal 성분은

$$v^{\mathrm{T}}=R\Omega=R\Omega^{\mathrm{F}}+\kappa B^{\mathrm{T}} \tag{2-11}$$

로 주어진다. 식 (2-7), (2-11)을 결합하면

$$v=\kappa\boldsymbol{B}+R\Omega^{\mathrm{F}}1_{\varphi} \tag{2-12}$$

과 같이 나타낼 수 있게 된다.

식 (2-9)를 이용하면 연속 방정식 (2-4)으로부터

$$\nabla\cdot(\rho v)=\nabla\cdot(\rho\kappa\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}\cdot\nabla(\rho\kappa)=0 \tag{2-13}$$

이 되므로

$$\eta\equiv\rho\kappa \tag{2-14}$$

로 주어지는 양 또한 한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다.

Euler 방정식 (2-5)의 toroidal 성분으로부터

$$L\equiv R^2\Omega-\frac{RB^{\mathrm{T}}}{4\pi\eta} \tag{2-15}$$

값 역시 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 L은 단위 질량 당 각운동량이라는 사실을 쉽게 알 수 있다.

Euler 방정식 (2-5)의 poloidal 성분으로부터

$$E\equiv\frac{v^2}{2}-\frac{\Omega^{\mathrm{F}}RB^{\mathrm{T}}}{4\pi\eta}=\frac{v^2}{2}+\frac{I\Omega^{\mathrm{F}}}{2\pi c\eta} \tag{2-16}$$

값 또한 자기력선을 따라서 일정한 값을 갖게 된다. 여기서 E는 단위 질량 당 에너지라는 사실도 쉽게 알 수 있다.

지금까지 정의된 Ω^{F}, η, L, E 등이 자기력선을 따라서 보존되는 양들이라는 사실은 Chandrasekhar (1956)에 의하여 최초로 소개되었고 Mestel(1961)에 의하여 분명히 자리잡게 되었다. 즉 Ω^{F}, η, L, E는 integration of motion으로서 $\Omega^{\mathrm{F}}=\Omega^{\mathrm{F}}(\Psi)$, $\eta=\eta(\Psi)$, $L=L(\Psi)$, $E=E(\Psi)$를 만족하는 것이다. 실제로는 entropy도 자기력선을 따라 보존되지만 여기서는 무시하기로 한다.

제트 방정식은 식 (2-5)를 변형한 식

$$\nabla\frac{v^2}{2}=v\times(\nabla\times v)-\frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E} \tag{2-17}$$

에서 구할 수 있다.

자기력선에 수직인 단위 벡터

$$1_\perp \equiv 1^{\mathrm{P}} \times 1_\phi = -\frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|} = -\frac{\nabla \Psi}{2\pi R B^{\mathrm{P}}} \tag{2-18}$$

를 생각하면

$$(1_\perp \cdot \nabla) f = -\frac{1}{|\nabla \Psi|} \nabla \Psi \cdot \nabla f \equiv \nabla_\perp f \tag{2-19}$$

가 된다. 식 (2-17)의 양변에 $1_\perp$과 내적을 취하면 좌변은

$$\nabla_\perp \frac{v^2}{2} = \nabla_\perp \left(E + \frac{\Omega^{\mathrm{F}} R B^{\mathrm{T}}}{4\pi\eta} \right) \tag{2-20}$$

가 된다.

식 (2-17)의 우변은

$$1_\perp \cdot \boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \frac{4\pi}{c} j^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{P}}$$

$$1_\perp \cdot \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})^{\mathrm{P}} = \frac{B^{\mathrm{T}}}{R} \nabla_\perp (R B^{\mathrm{T}})$$

$$\begin{aligned} & 1_\perp \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{P}} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{(B^{\mathrm{P}})^2}{2} \nabla_\perp \kappa^2 + \frac{4\pi\kappa^2}{c} j^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{P}} \end{aligned}$$

$$1_\perp \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})^{\mathrm{P}} = \frac{v^{\mathrm{T}}}{R} \nabla_\perp (R v^{\mathrm{T}})$$

$$\frac{\rho_e}{\rho} 1_\perp \cdot \boldsymbol{E} = \frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c} \frac{\rho_e}{\rho} B^{\mathrm{P}}$$

임을 고려하면

$$\begin{aligned} & 1_\perp \cdot \left\{ \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) - \frac{1}{4\pi\rho} \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \frac{\rho_e}{\rho} \boldsymbol{E} \right\} \\ &= \frac{(B^{\mathrm{P}})^2}{2} \nabla_\perp \kappa^2 + \frac{v^{\mathrm{T}}}{R} \nabla_\perp (R v^{\mathrm{T}}) \\ & \quad - \frac{B^{\mathrm{T}}}{4\pi\rho R} \nabla_\perp (R B^{\mathrm{T}}) \\ & \quad - 1 - \frac{M_{\mathrm{A}}^2}{c\rho} j^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{P}} + \frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c\rho} B^{\mathrm{P}} \rho_e \end{aligned} \tag{2-21}$$

가 된다.

따라서 식 (2-20)와 식 (2-21)를 등치하면

$$\begin{aligned} & \nabla_\perp \left(E + \frac{\Omega^{\mathrm{F}} R B^{\mathrm{T}}}{4\pi\eta} \right) - \frac{v^{\mathrm{T}}}{R} \nabla_\perp (R v^{\mathrm{T}}) \\ & + \frac{B^{\mathrm{T}}}{4\pi\rho R} \nabla_\perp (R B^{\mathrm{T}}) - \frac{(B^{\mathrm{P}})^2}{2} \nabla_\perp \kappa^2 \\ & + 1 - \frac{M_{\mathrm{A}}^2}{c\rho} j^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{P}} - \frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c\rho} B^{\mathrm{P}} \rho_e = 0 \end{aligned} \tag{2-22}$$

이 된다. 식 (2-22) 앞의 세 항은 식 (2-15)에서 얻은 결과

$$\begin{aligned} R B^{\mathrm{T}} &= -4\pi\eta (L - R^2 \Omega) \\ &= -4\pi\eta (L - R v^{\mathrm{T}}) \end{aligned} \tag{2-23}$$

를 대입하고 정돈하면 식 (2-22)의 앞 세 항은

$$\begin{aligned} & \nabla_\perp \left(E + \frac{\Omega^{\mathrm{F}} R B^{\mathrm{T}}}{4\pi\eta} \right) - \frac{v^{\mathrm{T}}}{R} \nabla_\perp (R v^{\mathrm{T}}) \\ & + \frac{B^{\mathrm{T}}}{4\pi\rho R} \nabla_\perp (R B^{\mathrm{T}}) \\ &= \nabla_\perp E - \nabla_\perp (\Omega^{\mathrm{F}} L) + R v^{\mathrm{T}} \nabla_\perp \Omega^{\mathrm{F}} \\ & \quad - \frac{B^{\mathrm{T}}}{\rho R} \nabla_\perp (\eta L) + \frac{v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}}{\rho} \nabla_\perp \eta \end{aligned}$$

가 되어 식 (2-22)는 결국

$$\begin{aligned} & \nabla_\perp E - \nabla_\perp (\Omega^{\mathrm{F}} L) + R v^{\mathrm{T}} \nabla_\perp \Omega^{\mathrm{F}} \\ & - \frac{B^{\mathrm{T}}}{\rho R} \nabla_\perp (\eta L) + \frac{v^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}}{\rho} \nabla_\perp \eta \\ & - \frac{(B^{\mathrm{P}})^2}{2} \nabla_\perp \kappa^2 + 1 - \frac{M_{\mathrm{A}}^2}{c\rho} j^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{P}} \end{aligned} \tag{2-24}$$

이 된다. 여기서

$$M_{\mathrm{A}}^2 \equiv \frac{4\pi\eta^2}{\rho} = 4\pi\rho\kappa^2 \tag{2-25}$$

Alfvenic Mach number이다.

식 (2-24))가 바로 비상대론적 제트 방정식으로서 Okamoto(1975)에 의해 처음 제안되었고 최근까지 수많은 사람들에 의하여 여러 가지 방법으로 유도되고 수치해석적으로 풀렸다(e.g., see Heinemann & Olbert 1978; Blandford & Payne 1982; Lovelace et al. 1986; Mestel & Shibata 1994).

3. MINKOWSKI 자기권의 보존되는 물리량들

이 장에서만 모든 물리량이 $c = G \equiv 1$을 만족하도록 정의하기로 한다. 블랙홀 자기권을 상대론적으로 기술하는 데에 가장 기본이 되는 물리량은 물론 4차원 계량 텐서이다. 흔히 계량 텐서는

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2 g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + g_{AB} dx^A dx^B \tag{3-1}$$

같이 정의되는데, 문자들은 보통 상대론 교과서에서 정의되는 의미를 지닌다. 식 (3-1)의 A, B는 각각 poloidal 성분을 이루는 두 좌표 (r, θ) 중의 하나가 되어 $A, B = 1, 2$ 값을 갖게 된다. 이 논문에서 생각하는 stationary, axisymmetric 모델은 Killing 벡터 $\vec{k} = \partial_t$ 와 $\vec{m} = \partial_\varphi$ 의 존재를 보장해 주게 된다.

우리는 플라스마의 입자가 보존된다는 가정으로부터

$$(n' u^\mu)_{;\mu} = u^\mu n'_{,\mu} + n' u^\mu_{;\mu} = 0 \tag{3-2}$$

을 얻는다. 여기서 n'은 proper particle density이다.

MHD 플라스마의 유체역학적 에너지-운동량 텐서를

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{M}}^{\mu\nu} &= (\rho + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} \\ &\equiv \rho u^\mu u^\nu - P h^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3-3}$$

같이 보통 상대론 교과서에서처럼 정의하자. 여기서 $\vec{h}$는

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu \tag{3-4}$$

로 주어지는 projection tensor이다. 물론 식 (3-3)을 만족하는 플라스마는 vorticity 같은 부차적 성질을 전혀 갖지

않는 이상적인 것이다.

에너지와 운동량의 보존은 물론

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{M};\nu}=0 \tag{3-5}$$

로 표현된다. 식 (3-5)를 $\vec{u}$로 축약하면

$$u_\mu T^{\mu\nu}_{\mathrm{M};\nu}=0 \tag{3-6a}$$

또는

$$u^\mu \rho_{,\mu}+(\rho+P)u^\mu_{;\mu}=0 \tag{3-6b}$$

을 얻는다.

복사에 의한 플라스마 cooling을 무시하면 adiabatic 성질을 갖게 되어 total energy density는

$$\rho=n'm+\frac{1}{\Gamma-1}P \tag{3-7}$$

가 되고 specific enthalpy는

$$\mu=m+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{n'} \tag{3-8}$$

으로 각각 주어지게 된다. 따라서 에너지-운동량 보존항은 이 경우

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{M};\nu}=N^\nu(\mu u^\mu)_{;\nu}-g^{\mu\nu}P_{,\nu} \tag{3-9}$$

로 주어진다. 여기서, 그리고 지금부터,

$$N^\mu\equiv n'u^\mu \tag{3-10}$$

이다.

블랙홀 자기권이 4-벡터 포텐샬 $\vec{A}$와 전자기장 텐서 $\vec{F}$, 즉

$$F_{\mu\nu}\equiv A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu} \tag{3-11}$$

로 기술된다면 Maxwell 방정식은

$$F_{[\mu\nu\ ;\lambda]}=0 \tag{3-12a}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=-4\pi j^\mu \tag{3-12b}$$

로 주어지고 에너지-운동량 텐서와 보존항은

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{E}}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\lambda}F^\nu_\lambda+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\vec{F}^2\right) \tag{3-13}$$

과

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{E};\nu}=-F^{\mu\nu}j_\nu \tag{3-14}$$

로 각각 주어진다.

전자기장을 이해하기 위해 comoving field를 생각해보자. 우선 comoving 전자기장

$$E'_\mu=u^\nu F_{\mu\nu} \tag{3-15}$$

는 MHD 특성상 0이 된다. 하지만 comoving 자기장

$$B'_\mu=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\lambda\sigma}u^\nu F^{\lambda\sigma} \tag{3-16}$$

는

$$u^\mu B'_\mu=0 \tag{3-17}$$

을 만족하면서도 전기장과 달리 사라지지 않는다. 식 (3-16)에서 $\eta_{\mu\nu\lambda\sigma}=\sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$임에 유의하자. 여기서 lab 자기장은

$$B_\mu=\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\lambda\sigma}k^\nu F^{\lambda\sigma} \tag{3-18}$$

처럼 covariantly 정의된다.

식 (3-11), (3-15)에 의해

$$A_{t,r}u^r+A_{t,\theta}u^\theta=0 \tag{3-19a}$$

$$A_{t,r}u^t+A_{\varphi,r}u^\varphi+F_{r\theta}u^\theta=0 \tag{3-19b}$$

$$A_{t,\theta}u^t+A_{\varphi,\theta}u^\varphi-F_{r\theta}u^\theta=0 \tag{3-19c}$$

$$A_{\varphi,r}u^r+A_{\varphi,\theta}u^\theta=0 \tag{3-19d}$$

가 항상 성립하게 된다.

우리는 식 (3-19a)와 (3-19d)로부터 $\nabla A_t=-\Omega^{\mathrm{F}}\nabla A_\varphi$임을 알아 차원이 각속도인 Ω^{F}라는 물리량을

$$\Omega^{\mathrm{F}}\equiv-\frac{A_{t,r}}{A_{\varphi,r}}=-\frac{A_{t,\theta}}{A_{\varphi,\theta}} \tag{3-20a}$$

또는

$$\Omega^{\mathrm{F}}\equiv-\frac{F_{tr}}{F_{\varphi r}}=-\frac{F_{t\theta}}{F_{\varphi\theta}} \tag{3-20b}$$

와 같이 다시 정의할 수 있다. 식 (3-20a)를 항등식 $(A_{t,r})_{,\theta}=(A_{t,\theta})_{,r}$에 대입하면

$$\frac{\Omega^{\mathrm{F}}_{,r}}{\Omega^{\mathrm{F}}_{,\theta}}=\frac{A_{\varphi,r}}{A_{\varphi,\theta}} \tag{3-21}$$

를 얻는다. 자기력선을 따라서는 Ψ = 상수, 즉 A_ϕ = 상수이므로

$$0=dA_\varphi=A_{\varphi,r}dr+A_{\varphi,\theta}d\theta \tag{3-22}$$

라야 한다. 식 (3-22)를 식 (3-21)에 대입하면

$$\frac{\Omega^{\mathrm{F}}_{,r}}{\Omega^{\mathrm{F}}_{,\theta}}=-\frac{d\theta}{dr} \tag{3-23a}$$

또는

$$\Omega^{\mathrm{F}}_{,r}dr+\Omega^{\mathrm{F}}_{,\theta}d\theta=d\Omega^{\mathrm{F}}=0 \tag{3-23b}$$

가 되어 Ω^{F}는 자기력선을 따라 보존된다는 사실을 확인할 수 있다. 이로서 $\Omega^{\mathrm{F}}=\Omega^{\mathrm{F}}(\Psi)$임을 상대론적으로 증명한 셈이다. 식 (3-20a), (3-20b)는 상대론적 Ferarro isorotation을 기술하고 Ω^{F}는 자기력선의 각속도임을 깨닫게 된다(cf. 식 [2-10]).

또한 식 (3-19d)로부터 보존되는 양

$$\frac{u^r}{A_{\varphi,\theta}}=-\frac{u^\theta}{A_{\varphi,r}}\equiv\frac{\eta}{\sqrt{-g}\,n'} \tag{3-24}$$

로 놓고 식 (3-19b)에 대입하면 플라스마 각속도 Ω는

$$\begin{aligned}\Omega&=\frac{u^\varphi}{u^t}\\&=-\frac{A_{t,r}}{A_{\varphi,r}}+\frac{\eta F_{r\theta}}{\sqrt{-g}\,n'u^t}\\&=\Omega^{\mathrm{F}}+\frac{\eta F_{r\theta}}{\sqrt{-g}\,n'u^t}\end{aligned} \tag{3-25}$$

가 된다. 식 (3-24)과 (3-25)을 정돈하면

$$\sqrt{-g}\,n'u^r = -\eta F_{\theta\varphi} \quad (3\text{-}26a)$$

$$\sqrt{-g}\,n'u^\theta = -\eta F_{\varphi r} \quad (3\text{-}26b)$$

$$\sqrt{-g}\,n'u^t(\Omega - \Omega^{\mathrm{F}}) = -\eta F_{r\theta} \quad (3\text{-}26c)$$

를 만족한다.

식 (3-2)의 또 다른 표현

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,n'u^\mu)_{,\mu} = 0 \quad (3\text{-}27)$$

에 식 (3-26a)와 (3-26b)를 대입하면

$$(\eta A_{\varphi,\theta})_{,r} - (\eta A_{\varphi,r})_{,\theta} = 0 \quad (3\text{-}28a)$$

$$\frac{A_{\varphi,r}}{A_{\varphi,\theta}} = -\frac{d\theta}{dr} \quad (3\text{-}28b)$$

를 얻게 된다. 따라서

$$\begin{aligned} d\eta &= dr\left(\eta_{,r} - \eta_{,\theta}\frac{A_{\varphi,r}}{A_{\varphi,\theta}}\right) \quad (3\text{-}29)\\ &= \frac{dr}{A_{\varphi,\theta}}(\eta_{,r}A_{\varphi,\theta} - \eta_{,\theta}A_{\varphi,r})\\ &= \frac{dr}{A_{\varphi,\theta}}(\eta \mathrm{A}_{\varphi,\theta})_{,\mathrm{r}} - (\eta \mathrm{A}_{\varphi,\mathrm{r}})_{,\theta}\\ &= 0 \end{aligned}$$

이 되어 η는 자기력선을 따라 보존된다는 사실을 확인할 수 있다. 이로서 $\eta = \eta(\Psi)$임을 상대론적으로 증명한 셈이다. 주의할 점은, 지금부터 등장하는 η는 식 (2-14)에서와 달리 $\eta = \kappa n \neq \kappa\rho$ 라는 사실이다(참고로 $n'u^0$는 stationary observer가 관찰하는 입자의 number density임에 유념하자).

플라스마의 운동은 에너지-운동량 보존법칙

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{\mathrm{E};\nu} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{M};\nu} = 0 \quad (3\text{-}30)$$

을 만족하며 진행하게 된다. 식 (3-30)과 Killing 벡터 $\vec{m} = \partial_\varphi$ 을 이용하여 식

$$m_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3\text{-}31)$$

을 살펴보면 각운동량 $L = L(\Psi)$은

$$L = -\mu' u_\varphi + \frac{1}{4\pi\eta}u_t(1 - \Omega^{\mathrm{F}}l)B'_\varphi \quad (3\text{-}32)$$

로 주어진다(cf. [2-15]). 식 (3-32)에서

$$l \equiv -\frac{u_\varphi}{u_t} \quad (3\text{-}33)$$

임에 유의하자. 마찬가지로 식 (3-30)과 Killing 벡터 $\vec{k} = \partial_t$ 를 이용하여 식

$$k_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3\text{-}34)$$

을 살펴보면 에너지 $E = E(\Psi)$는

$$E = \mu' u_t + \frac{1}{4\pi\eta}u_t(1 - \Omega^{\mathrm{F}}l)B'_t \quad (3\text{-}35)$$

로 주어지는데(cf. 식 [2-16]). 여기서

$$\mu' = \mu + \frac{B'^2}{4\pi n'} \quad (3\text{-}36)$$

은 total enthalpy이다

식 (3-32)와 식 (3-35)를 유도하는 과정은 매우 복잡하지만 Bekenstein & Oron(1978)과 Camenzind(1986a, 1986b)에 자세히 정리되어 있으므로 여기서는 설명을 생략하기로 한다. 이상으로 우리는 Minkowski 자기권에서 integration of motion $\Omega^{\mathrm{F}} = \Omega^{\mathrm{F}}(\Psi)$, $\eta = \eta(\Psi)$, $L = L(\Psi)$, $E = E(\Psi)$를 모두 알아보았다. II장에서와 마찬가지로 실제로는 entropy도 자기력선을 따라 보존되지만 여기서는 무시하기로 한다. 식

$$\mu u_t(1 - \Omega^{\mathrm{F}}l) = E - \Omega^{\mathrm{F}}L \equiv e \quad (3\text{-}37)$$

로 정의되는 e 또한 $e = e(\Psi)$임은 물론이다.

4. 결론

3장에서 기술한 내용을 바탕으로 Minkowski 자기권에서 제트 방정식을 구하는 과정은 Camenzind(1987)에 가장 잘 기술되어 있다. 이를 요약하면 다음과 같다.

Minkowski 자기권에서 식 (3-36)은

$$n'(u\cdot\nabla)(\mu u) = \rho_e E + \frac{1}{c}j\times B - \nabla P, \quad (4\text{-}1)$$

로 주어진다. 그런데 Minkowski 자기권에서는

$$(u\cdot\nabla)u = \gamma(\nabla\gamma - \Omega\nabla j) - u^{\mathrm{P}}\times(\nabla\times u^{\mathrm{P}}) \quad (4\text{-}2)$$

가 만족되는데 여기서 $\gamma \equiv u_t$ 이고 $j \equiv \gamma l$ 이다. 따라서

$$1_\perp\cdot B^{\mathrm{P}}\times(\nabla\times B)^{\mathrm{T}} = \frac{4\pi}{c}j_\varphi B^{\mathrm{P}}$$

$$1_\perp\cdot B^{\mathrm{T}}\times(\nabla\times B)^{\mathrm{P}} = \frac{B_\varphi}{R}\nabla_\perp(RB_\varphi)$$

$$\begin{aligned}&1_\perp\cdot u^{\mathrm{P}}\times(\nabla\times u)^{\mathrm{T}}\\ &= \frac{\eta}{n'}(B^{\mathrm{P}})^2\nabla_\perp\left(\frac{\eta}{n'}\right) + \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\eta}{n'}\right)^2 j_\varphi B^{\mathrm{P}}\end{aligned}$$

$$1_\perp\cdot E = \frac{R\Omega^{\mathrm{F}}}{c}B^{\mathrm{P}}$$

임을 고려하면 제트 방정식은

$$\begin{aligned}&\frac{1 - M_A^2 - x^2}{\mu\gamma n' cR}j_\varphi B^{\mathrm{P}} \quad (4\text{-}3a)\\ &= \frac{1}{\mu}\partial_\Psi e + j\partial_\Psi\Omega^{\mathrm{F}} - \frac{\eta B_\varphi}{\mu\gamma n' R}\partial_\Psi L\\ &\quad - \frac{\eta B_\varphi^2}{4\pi\mu\gamma n'}\partial_\Psi\frac{1}{\eta} - \gamma(1 - \Omega l)\partial_\Psi(\ln\mu)\\ &\quad + \frac{1}{\rho + P}\partial_\Psi P - \frac{\eta}{\gamma n'}(B^{\mathrm{P}})^2\partial_\Psi\left(\frac{\eta}{n'}\right)\\ &\quad - \frac{1}{\mu\gamma n'}\frac{(\nabla\Psi\cdot\nabla)(R^2\Omega^{\mathrm{F}})}{4\pi c R^2 R_{\mathrm{L}}}\end{aligned}$$

이 되는데 여기서

$$\partial_\Psi \equiv \frac{1}{R^2(B^{\mathrm{P}})^2}\nabla\Psi\cdot\nabla \quad (4\text{-}3b)$$

이고

$$M_{\rm A} \equiv \frac{4\pi\mu\eta^2}{n'} \tag{4-3c}$$

는 다시 정의된 Alfvenic Mach number 이고(cf. [2-25])

$$R_{\rm L} \equiv \frac{c}{\Omega^{\rm F}} \tag{4-3d}$$

은 잘 알려진 light cylinder radius 이고

$$x \equiv \frac{R}{R_{\rm L}} \tag{4-3e}$$

이다. 식 (4-3a)가 바로 Minkowski 자기권에서의 제트 방정식, 즉 Grad-Shafranov이다. 식 (4-3a)의 비상대론적 한계는 바로 식 (2-24)가 되는 것이다.

이후 이 방정식은 Mobarry and Lovelace(1986) 등에 의해 Schwarzschild 블랙홀 주위의 제트 방정식으로 발전하게 된다. 그리고 Nitta, Takahashi, & Tomimatsu (1991)와 Beskin & Pariev(1993) 등에 의해 Kerr 블랙홀 주위의 제트 방정식으로 발전하게 되는 것이다.

참고문헌

Bekenstein, J. D. & Oron, E. 1978, Phys. Rev., D18, 1809
Beskin, V. S. & Pariev, V. I. 1993, Phys. Usp., 36, 529
Blandford, R. D., & Payne, D. G. 1982, MNRAS, 199, 883
Camenzind, M. 1986a, A&A, 156, 137
Camenzind, M. 1986b, A&A, 162, 32
Camenzind, M. 1987, A&A, 184, 341
Chandrasekhar, S. 1956, ApJ, 124, 232
Goldreich, P. & Julian, W. H. 1969, ApJ, 157, 869 (GJ)
Heinemann, M. & Olbert, S. 1978, J. Geophys. Res., 83, 2457
Lovelace, R. V. E., Mehanian, C., Mobarry, C. M., & Sulkanen, M. E. 1986, ApJS, 62, 1
Mestel, L. 1961, MNRAS, 122, 473
Mestel, L. & Shibata, S. 1994, MNRAS, 271, 621
Mobarry, C. M. & Lovelace, R. V. E. 1986, ApJ, 309, 455
Okamoto, I. 1975, MNRAS, 173, 357
Park, S. J. 2000, 천문학논총, 15, 1 (논문 I)
Park, S. J. 2002, 천문학논총 17, 1 (논문 II)