

## 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 연구

조상봉\* · 김진광\* · 유병국\*\*

(2002년 11월 29일 접수, 2003년 7월 11일 심사완료)

### A Study for Steadily Growing Interface Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials

Sang-Bong Cho, Jin-Kwang Kim and Byung-Kuk Yoo

**Key Words:** Anisotropic Dissimilar Materials(이방성 이종재료), Steadily Growing Interface Crack (등속진전 접합계면균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Energy Release Rate(에너지 해방률).

#### Abstract

The displacement vector field can be represented in terms of a scalar potential  $\phi$  and a vector potential  $\psi$ . The scalar potential  $\phi$  is related to dilatational waves and the vector potential  $\psi$  is related to rotational waves. Using these two complex displacement potentials, the stress and displacement fields for steadily growing interface cracks in dissimilar materials are obtained. The energy release rate for steadily growing interface cracks in dissimilar materials are also obtained. And with photoelastic isochromatic patterns simulated by computer graphics, the stress intensity factors are discussed.

#### 1. 서론

이종접합재료의 파괴원인에는 여러 가지가 있을 수 있으나 가장 큰 원인중의 하나는 이종재 접합계면에서 발생하는 균열로 인한 것이다. 이러한 점을 고려하면 이종재 접합계면에 대한 파괴역학적 강도평가법의 확립은 중요한 연구과제의 대상이다.

이와 같은 이종재료간 접합구조물의 정적파괴 문제에 대해서는 Rice와 Sih,<sup>(1)</sup> England<sup>(2)</sup> 등이 등방성재료의 접합계면 균열에 대한 연구를 한 바 있고, Suo<sup>(3)</sup>는 이방성 이종재료 내의 접합계면 균열에 대한 연구를 한 바 있다.

동적파괴문제는 정적파괴문제와는 달리 문제 해석의 복잡성 때문에 이론적 연구가 부족하다. 균열이 가속 진전하는 문제를 연구한 예는 더욱 부족하며, 등속 진전하는 경우에는 Deng<sup>(4)</sup>이 등방성 이종재료의 접합계면 균열에 대하여 윌리엄(Williams) 형의 고유치 전개법으로 연구한 바 있고, 이방성 이종재 내의 등속 진전 접합계면 균열에 대해 Aminpour와 Holsapple<sup>(5)</sup>는 응력함수법을, Deng<sup>(6)</sup>은 스트로(Stroh) 공식을 적용하여 연구한 바 있다. Lee<sup>(7)</sup>는 직교이방성 이종재료의 접합계면에서 등속으로 진전하는 균열에 대해 복소응력함수를 이용하여 연구하였다.

본 연구에서는 이방성 이종재 등속 진전 접합계면 균열에 대하여 변위포텐셜함수를 이용하여 변위장 및 응력장을 유도하고, 동적응력강도계수(dynamic stress intensity factor) 및 에너지 해방률(energy release rate)을 구하고자 한다. 또한, 최대전단응력과 관련된 광탄성 무늬를 컴퓨터 그래픽하여 응력강도계수에 관하여 논하고자 한다.

\* 책임저자, 회원, 경남대학교 기계자동화공학부

E-mail : sbcho@kyungnam.ac.kr

TEL : (055)249-2620 FAX : (055)249-2617

\* 경남대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 경남대학교 대학원 기계설계학과

2. 기초방정식

등방성 및 이방성 재료의 탄성문제에서 운동방정식(equation of motion)은 다음 식과 같다.<sup>(8)</sup>

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도이고  $b_i$ 는 중력과 같은 단위체적당 체적력(body force)이다.

2차원 문제의 구성방정식(constitutive equation)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서  $C_{ij}$ 는 강성도(stiffness)이다.

미소 변형인 경우에 변형률과 변위의 관계식은 다음과 같다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

헬름홀츠(Helmholtz)의 정리에 의하면 변위  $u_i$ 는 두 종류의 변위 포텐셜함수  $\phi$ 와  $\psi_k$ 를 이용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

여기서  $\phi$ 와  $\psi_k$ 는 각각 팽창파(dilatation wave)와 회전파(rotation wave)를 나타내는 스칼라 포텐셜과 벡터 포텐셜이다.

2차원 탄성문제에 대한 체적력이 없는 경우에 식 (4)의 변위와 식 (3)의 변형률과 변위의 관계식 및 식 (2)의 구성방정식을 식 (1)의 운동방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 두 개의 편미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} l_1 \phi + s_1 \psi_z &= 0 \\ l_2 \phi + s_2 \psi_z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $l_j$ 와  $s_j$  ( $j=1,2$ )는 미분연산자로 다음과

같다.

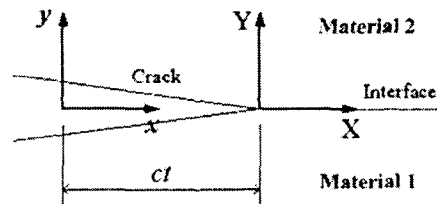
$$\begin{aligned} l_1 &= C_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3C_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\ &\quad + C_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \rho \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \\ s_1 &= -C_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{11} - C_{12} - C_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad + (2C_{16} - C_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \rho \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} \\ l_2 &= C_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad + 3C_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \rho \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} \\ s_2 &= -C_{66} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{16} - 2C_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad + (C_{12} + C_{66} - C_{22}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \rho \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \end{aligned}$$

3. 등속 진전하는 이방성 이중재 접합계면 균열에 대한 복소변위포텐셜함수

Fig. 1에서와 같이 균열선단이 고정좌표계  $(x, y)$ 에서  $x$ 축선 상을 따라 등속도  $c$ 로 진전할 때 이동하는 균열선단의 좌표계  $(X, Y)$ 의 성분  $X$ 와  $Y$ 를 고정좌표계의 성분  $x, y$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$X = x - ct, \quad Y = y \quad (6)$$

팽창변위포텐셜  $\phi$ 와 회전변위포텐셜  $\psi_z$ 를 복소변수  $z$ 을 사용하여 다음과 같이 가정한다.



$x-y$  : Fixed reference coordinate system  
 $X-Y$  : Moving reference coordinate system

Fig. 1 Coordinate systems for steadily growing interface cracks in dissimilar materials

$$\begin{aligned} \phi(z) &= Az^{\lambda+1} + Bz^{\bar{\lambda}+1} \\ \psi(z) &= az^{\lambda+1} + bz^{\bar{\lambda}+1} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서  $z = X + \mu Y$ 이고,  $\mu, A, B, a, b$ 는 복소수이다. 식 (7)의 가정한 해를 식 (5)의 이방성 재료에 대한 등속균열진전의 지배미분방정식에 대입하여 정리하면  $\mu$ 에 대한 다음의 두 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L_1 \phi'' + S_1 \psi_z'' &= 0 \\ L_2 \phi'' + S_2 \psi_z'' &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\phi'' = \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3}, \psi_z'' = \frac{\partial^3 \psi_z}{\partial z^3}$  이고,

$$\begin{aligned} L_1 &= C_{35} \mu^3 + (C_{12} + 2C_{66}) \mu^2 + 3C_{15} \mu + (C_{11} - \rho c^2) \\ S_1 &= C_{66} \mu^3 + (2C_{16} - C_{35}) \mu^2 + (C_{11} - C_{12} - C_{66} - \rho c^2) \mu - C_{16} \\ L_2 &= C_{22} \mu^3 + 3C_{35} \mu^2 + (C_{12} + 2C_{66} - \rho c^2) \mu + C_{15} \\ S_2 &= C_{25} \mu^3 + (C_{12} + C_{66} - C_{22}) \mu^2 + (C_{16} - 2C_{35}) \mu - C_{66} + \rho c^2 \end{aligned}$$

이다. 식 (8)의 연립방정식을 행렬로 표현하면

$$\begin{bmatrix} L_1 & S_1 \\ L_2 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(z)'' \\ \psi_z(z)'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

이다. 이 연립방정식이 유용한 해를 갖기 위한 조건으로부터  $\mu$ 에 대한 특성방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\mu^2 + 1)(m_4 \mu^4 + m_3 \mu^3 + m_2 \mu^2 + m_1 \mu + m_0) = 0 \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_4 &= C_{35}^2 - C_{22} C_{66} \\ m_3 &= 2(C_{12} C_{25} - C_{16} C_{22}) \\ m_2 &= C_{12}(C_{12} + 2C_{66}) - C_{11} C_{22} - 2C_{16} C_{25} + \rho c^2 (C_{22} + C_{66}) \\ m_1 &= 2(C_{12} C_{15} - C_{11} C_{25} + \rho c^2 (C_{16} + C_{35})) \\ m_0 &= C_{16}^2 + (C_{11} - \rho c^2)(\rho c^2 - C_{66}) \end{aligned}$$

이다. 그리고 등방성 및 직교이방성 재료일 경우  $\mu$ 에 대한 특성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$(\mu^2 + 1)(m_4 \mu^4 + m_2 \mu^2 + m_0) = 0 \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)의 특성방정식의 특성근 중에서  $\mu = \pm i$ 는 균열의 진전속도  $c$ 와 재료의 속성에 무관하고 동적하중에 대한 변위를 일으킬 수 없는 근이다. 따라서 식 (10)과 식 (11)의 특성방정식의 특성근은 복소수로서  $\mu = \pm i$ 를 제외한 다음과 같은 서로 다른 4가지의 근을 가질 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & \mu_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, \\ \mu_3 &= \overline{\mu_1}, & \mu_4 &= \overline{\mu_2} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\alpha_j$ 와  $\beta_j$ 는 실수이다.  $\mu_3$ 과  $\mu_4$ 는  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 에 대한 각각의 복소공액근이다.

또한 식 (8)에서 복소변위포텐셜함수  $\phi(z)$ 와  $\psi_z(z)$ 는 서로 독립적인 관계가 아니고 종속적이며 그 관계식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^3 \psi_z}{\partial z^3} = -\omega \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (13)$$

여기서

$$\omega = \frac{L_1}{S_1} = \frac{L_2}{S_2}$$

이다. 식 (13)을 복소변수  $z$ 에 관하여 세 번 적분하면

$$\psi_z(z) = -\omega \phi(z) + \frac{D_1}{2} z^2 + D_2 z + D_3 \quad (14)$$

이고,  $D_1, D_2, D_3$ 는 상수이고 이들 항은 강체 변위를 표현한다. 이후 본 논문에서는 강체변위는 없는 것으로 간주한다. 따라서 팽창변위포텐셜함수와 회전변위포텐셜함수는 각각 다음과 같다.

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n A_i z_i^{\lambda+1} + \sum_{i=1}^n B_i z_i^{\bar{\lambda}+1} \quad (15)$$

$$\phi_z(z) = - \left\{ \sum_{i=1}^n A_i \omega_i z_i^{\lambda+1} + \sum_{i=1}^n B_i \omega_i z_i^{\bar{\lambda}+1} \right\}$$

응력이 반드시 실수이기 위한 조건으로부터 식 (15)의 변위함수  $\phi(z)$ 와  $\phi_z(z)$ 는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 2Re[A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1} + A_2 z_2^{\lambda+1} + B_2 z_2^{\bar{\lambda}+1}] \\ \phi_z(z) &= -2Re[\omega_1 \{A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1}\} \\ &\quad + \omega_2 \{A_2 z_2^{\lambda+1} + B_2 z_2^{\bar{\lambda}+1}\}] \end{aligned} \quad (16)$$

#### 4. 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열의 응력장과 변위장

식 (16)의 변위함수를 식 (4)에 대입하면 직교좌표계에 대한 변위를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{ix} &= 2Re[(1 - \omega_{j1} \mu_{j1}) \phi_{j1}' + (1 - \omega_{j2} \mu_{j2}) \phi_{j2}'] \\ u_{iy} &= 2Re[(\mu_{j1} + \omega_{j1}) \phi_{j1}' + (\mu_{j2} + \omega_{j2}) \phi_{j2}'] \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi_{j1} &= A_{j1} z_{j1}^{\lambda+1} + B_{j1} z_{j1}^{\bar{\lambda}+1} \\ \phi_{j2} &= A_{j2} z_{j2}^{\lambda+1} + B_{j2} z_{j2}^{\bar{\lambda}+1} \end{aligned}, \quad (j=1, 2) \quad (18)$$

이다. 식 (17)을 식 (3)에 대입하여 직교좌표계에 대한 변형률  $\epsilon_{xx}$ 와  $\epsilon_{yy}$  및  $\gamma_{xy}$ 를 구하고 이들 변형률을 식 (2)의 구성방정식에 대입하면 직교좌표계에 대한 응력을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2Re[p_{j1} \phi_{j1}'' + p_{j2} \phi_{j2}''] \\ \sigma_{yy} &= 2Re[q_{j1} \phi_{j1}'' + q_{j2} \phi_{j2}''] \\ \tau_{xy} &= 2Re[h_{j1} \phi_{j1}'' + h_{j2} \phi_{j2}''] \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$p_{j1} = (C_{j12} - C_{j16} \omega_{j1}) \mu_{j1}^2 + (-C_{j11} \omega_{j1} + C_{j12} \omega_{j1} + 2C_{j16}) \mu_{j1} + (C_{j11} + C_{j16} \omega_{j1})$$

$$q_{j1} = (C_{j22} - C_{j26} \omega_{j1}) \mu_{j1}^2 + (-C_{j21} \omega_{j1} + C_{j22} \omega_{j1} + 2C_{j26}) \mu_{j1} + (C_{j21} + C_{j26} \omega_{j1})$$

$$h_{j1} = (C_{j32} - C_{j36} \omega_{j1}) \mu_{j1}^2 + (-C_{j31} \omega_{j1} + C_{j32} \omega_{j1} + 2C_{j36}) \mu_{j1} + (C_{j31} + C_{j36} \omega_{j1})$$

이고, 변위장과 응력장에서 아래첨자  $j$ 는 재료  $j$ 를 나타내고, 위첨자 '와 ''는 각각 1차 미분과 2차 미분을 의미한다.

접합계면 균열에서 표면력이 영(0)인 경계조건과 응력과 변위의 연속조건을 이용하여 다음의 식들을 얻을 수 있다.

첫째,  $\theta = \pm \pi$ 에서 표면력(traction)이 영(0)인 조건(traction free condition)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = -e^{-i2\pi\lambda} [\overline{V_1}]^{-1} [V_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} = -e^{i2\pi\lambda} [\overline{V_2}]^{-1} [V_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서

$$[V_j] = \begin{bmatrix} q_{j1} & q_{j2} \\ h_{j1} & h_{j2} \end{bmatrix}, \quad (j=1, 2)$$

이다.

둘째,  $\theta = 0$  지점에서 응력과 변위의 연속조건으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[V_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [\overline{V_1}] \begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = [V_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [\overline{V_2}] \begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$[U_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [\overline{U_1}] \begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = [U_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [\overline{U_2}] \begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서

$$[U_j] = \begin{bmatrix} 1 - \omega_{\bar{n}} \mu_{\bar{n}} & 1 - \omega_{\bar{R}} \mu_{\bar{R}} \\ \mu_{\bar{n}} + \omega_{\bar{n}} & \mu_{\bar{R}} + \omega_{\bar{R}} \end{bmatrix}, \quad (j=1,2)$$

이다.

식 (20)~(22)를 정리하여 식 (23)에 대입하면 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)][V_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

여기서

$$[D(\lambda)] = \begin{bmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (25)$$

이고,

$$D_{11}(\lambda) = (G_1 - \bar{G}_2) - (\bar{G}_1 - G_2)e^{-i2\pi\lambda}$$

$$D_{12}(\lambda) = (H_1 - \bar{H}_2) - (\bar{H}_1 - H_2)e^{-i2\pi\lambda}$$

$$D_{21}(\lambda) = (I_1 - \bar{I}_2) - (\bar{I}_1 - I_2)e^{-i2\pi\lambda}$$

$$D_{22}(\lambda) = (J_1 - \bar{J}_2) - (\bar{J}_1 - J_2)e^{-i2\pi\lambda}$$

또한

$$G_j = \frac{h_{\bar{R}}(1 - \omega_{\bar{n}} \mu_{\bar{n}}) - h_{\bar{n}}(1 - \omega_{\bar{R}} \mu_{\bar{R}})}{q_{\bar{n}} h_{\bar{R}} - q_{\bar{R}} h_{\bar{n}}}$$

$$H_j = \frac{q_{\bar{n}}(1 - \omega_{\bar{R}} \mu_{\bar{R}}) - q_{\bar{R}}(1 - \omega_{\bar{n}} \mu_{\bar{n}})}{q_{\bar{n}} h_{\bar{R}} - q_{\bar{R}} h_{\bar{n}}}$$

$$I_j = \frac{h_{\bar{R}}(\mu_{\bar{n}} + \omega_{\bar{n}}) - h_{\bar{n}}(\mu_{\bar{R}} + \omega_{\bar{R}})}{q_{\bar{n}} h_{\bar{R}} - q_{\bar{R}} h_{\bar{n}}}$$

$$J_j = \frac{q_{\bar{n}}(\mu_{\bar{R}} + \omega_{\bar{R}}) - q_{\bar{R}}(\mu_{\bar{n}} + \omega_{\bar{n}})}{q_{\bar{n}} h_{\bar{R}} - q_{\bar{R}} h_{\bar{n}}}, \quad (j=1,2)$$

이다. 이방성 이중재료간 접합계면 균열에서 등속도로 진전하는 균열문제에서 식 (24)가 비 자명해(non-trivial solution)를 가질 조건은 식 (25)의 행렬식이 영(0)인 경우이며 이 행렬식을 전개하면 다음과 같이 된다.

$$P(e^{-i2\pi\lambda})^2 + Q(e^{-i2\pi\lambda}) + R = 0 \quad (26)$$

여기서

$$P = -(\bar{H}_1 - H_2)(\bar{I}_1 - I_2) + (\bar{G}_1 - G_2)(\bar{J}_1 - J_2)$$

$$Q = -(\bar{H}_1 - H_2)(\bar{I}_2 - I_1) + (H_1 - \bar{H}_2)(\bar{I}_1 - I_2) + (\bar{G}_1 - G_2)(\bar{J}_2 - J_1) + (G_2 - G_1)(\bar{J}_1 - J_2)$$

$$R = -(\bar{H}_2 - H_1)(\bar{I}_2 - I_1) + (\bar{G}_2 - G_1)(\bar{J}_2 - J_1)$$

이고, 식 (26)에서 고유치  $\lambda$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = (n - \frac{1}{2}) \pm i\epsilon \quad (\text{단, } n=1,2,3,\dots,\infty) \quad (27)$$

여기서

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{Q}{2P} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{Q}{2P} \right)^2 - \left( \frac{R}{P} \right)} \right] \quad (28)$$

이고, 식 (28)을 소위 Dunders 파라미터  $\beta^*$ 로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \frac{1 - \beta^*}{1 + \beta^*} \right] \quad (29)$$

여기서

$$\beta^* = - \frac{Q + P \sqrt{\left( \frac{Q}{P} \right)^2 - 4 \frac{R}{P} - 2}}{Q + P \sqrt{\left( \frac{Q}{P} \right)^2 - 4 \frac{R}{P} + 2}} \quad (30)$$

이다. 식 (27)로부터 등속 진전하는 이방성 이중재 접합계면에서 등속도  $c$ 로 진전하는 균열에 대한 복소수 고유치를 얻을 수 있다. 특히  $n$ 이 1인 경우, 즉  $0.5 + i\epsilon$  일 때 접합계면 균열선단에서의 응력은 무한대로 발산시키는 특이성을 나타낸다. 이와 같이 균열선단에서의 응력을 무한대로 발산시키는 응력특이성을 가진 복소수 고유치  $0.5 + i\epsilon$  에 대한 고유벡터를 임의의 복소수 계수  $\xi$ 의 항으로 표현하기 위하여 식 (24)에 식 (27)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\epsilon) & D_{12}(\epsilon) \\ D_{21}(\epsilon) & D_{22}(\epsilon) \end{bmatrix} [V_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

여기서

$$\begin{aligned} D_{11}(\epsilon) &= (G_1 - \overline{G_2}) + (\overline{G_1} - G_2)e^{2\pi\epsilon} \\ D_{12}(\epsilon) &= (H_1 - \overline{H_2}) + (\overline{H_1} - H_2)e^{2\pi\epsilon} \\ D_{21}(\epsilon) &= (I_1 - \overline{I_2}) + (\overline{I_1} - I_2)e^{2\pi\epsilon} \\ D_{22}(\epsilon) &= (J_1 - \overline{J_2}) + (\overline{J_1} - J_2)e^{2\pi\epsilon} \end{aligned}$$

이고, 이 연립방정식은 다음과 같은 하나의 방정식으로 표현할 수 있다.

$$q_{11} A_{11} + q_{12} A_{12} + \eta(h_{11} A_{11} + h_{12} A_{12}) = 0 \quad (32)$$

여기서

$$\eta = \eta_I + i\eta_{II} = \frac{D_{12}(\epsilon)}{D_{11}(\epsilon)} = \frac{D_{22}(\epsilon)}{D_{21}(\epsilon)} \quad (33)$$

이다. 등방성 및 직교이방성 이종재료일 경우  $\eta$ 는 허수  $i\eta_{II}$ 만으로 표현되고 이방성 이종재료나 이방성재료와 직교이방성재료가 서로 접합된 이종재료일 경우에는 실수부와 허수부를 가진 복소수  $\eta_I + i\eta_{II}$ 로 표현된다.

식 (32)에서 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$A_{12} = -\frac{q_{11} + \eta h_{11}}{q_{12} + \eta h_{12}} A_{11} \quad (34)$$

고유벡터를 복소수 계수  $\zeta$ 의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_{1l} \\ A_{2l} \\ B_{1l} \\ B_{2l} \end{Bmatrix} = \zeta \begin{Bmatrix} e^{(-1)^l \pi\epsilon} \frac{q_{2l} + h_{2l} \eta}{D_l} \\ -e^{(-1)^l \pi\epsilon} \frac{q_{1l} + h_{1l} \eta}{D_l} \\ e^{(-1)^{l+1} \pi\epsilon} \frac{q_{2l} + h_{2l} \eta}{D_l} \\ -e^{(-1)^{l+1} \pi\epsilon} \frac{q_{1l} + h_{1l} \eta}{D_l} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

여기서

$$\zeta = \zeta_I + i\zeta_{II} = \frac{D_1}{e^{-\pi\epsilon}(q_{12} + h_{12}\eta)} A_{11} \quad (36)$$

이고,  $D_l = q_{1l} h_{2l} - q_{2l} h_{1l}$  이다.

### 5. 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열의 응력강도계수 및 에너지 해방률

식 (27)에서  $n=1$ 일 때의 고유치  $0.5+i\epsilon$  과 식 (35)의 고유벡터를 식 (17)과 (19)에 대입하여 정리하면 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 변위장과 응력장을 얻을 수 있다. 이러한 변위장과 응력장을 면내문제에서 정의된 응력강도계수  $K_1, K_2$ 를 이용하여 균열선단에서 전방으로  $X$ 축 상의 거리  $r$ 만큼 떨어진 곳의 응력과 후방으로  $X$ 축 상의 거리  $r$ 만큼 떨어진 곳의 상대변위를 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_{yy} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ (K_2 \eta_I + K_1 \eta_{II}) \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + (K_1 \eta_I - K_2 \eta_{II}) \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \quad (37)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_2 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_1 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{2\sqrt{r}}{(1+4\epsilon^2)\cosh[\pi\epsilon]\sqrt{2\pi}} \\ &\left[ (x_{11} + x_{21}) \left\{ K_2 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_1 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2\epsilon \left\{ K_1 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] - K_2 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \right] \\ &\quad - (x_{12} + x_{22}) \left\{ -K_1 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_2 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \\ &\quad \left. + 2\epsilon \left\{ K_2 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_1 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \delta_y &= \frac{2\sqrt{r}(x_{11} + x_{21})}{(1+4\epsilon^2)\cosh[\pi\epsilon]\sqrt{2\pi\eta_{II}}} \\ &\left[ -K_1 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_2 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right. \\ &\quad \left. - 2\epsilon \left\{ K_2 \cos[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] + K_1 \sin[\epsilon \ln(\frac{r}{l})] \right\} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

여기서  $l$ 은 임의의 길이이나 보통 균열길이  $2a$ 로 잡는다. 그리고  $K_1$ 과  $K_2$ 는 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수

로 다음과 같다.

$$K_1 = 4\sqrt{2\pi} \cosh[\pi\epsilon] \times \left[ \left\{ 2\epsilon \cos[\epsilon \ln(l)] + \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2\right) \sin[\epsilon \ln(l)] \right\} \zeta_I + \left\{ \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2\right) \cos[\epsilon \ln(l)] - 2\epsilon \sin[\epsilon \ln(l)] \right\} \zeta_{II} \right] \quad (41)$$

$$K_2 = 4\sqrt{2\pi} \cosh[\pi\epsilon] \times \left[ \left\{ -\left(\frac{3}{4} - \epsilon^2\right) \cos[\epsilon \ln(l)] + 2\epsilon \sin[\epsilon \ln(l)] \right\} \zeta_I + \left\{ 2\epsilon \cos[\epsilon \ln(l)] + \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2\right) \sin[\epsilon \ln(l)] \right\} \zeta_{II} \right] \quad (42)$$

여기서

$$\chi_{j1} + i\chi_{j2} = \frac{i}{2} \left( \frac{q_j + h_j \eta}{D_j} - \frac{\bar{q}_j + \bar{h}_j \eta}{D_j} \right) \quad (43)$$

이고, 식 (43)에서  $q_j$ 와  $h_j$ 는 다음과 같다.

$$q_j = (q_{j1} - q_{j2}) + (q_{j2} \mu_{j1} w_{j1} - q_{j1} \mu_{j2} w_{j2})$$

$$h_j = (h_{j1} - h_{j2}) + (h_{j2} \mu_{j1} w_{j1} - h_{j1} \mu_{j2} w_{j2})$$

선형과피역학에서 중요한 인자로 사용되는 응력강도계수와 대응관계가 있는 에너지 해방률  $G$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} (\sigma_{yy}(X)\delta_y(\Delta a - X) + \tau_{xy}(X)\delta_x(\Delta a - X))dX \quad (44)$$

식 (44)에서 균열이 진전하기 전의 응력성분과 균열이  $\Delta a$ 만큼 진전한 상태에서의 상대변위를 표현하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{\eta_{II}} \sigma_{1yy} + i\tau_{1xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi X}} \left\{ (K_1 + iK_2) \left(1 - i\frac{\eta_I}{2\eta_{II}}\right) \times \left(\frac{X}{l}\right)^{i\epsilon} + i\frac{\eta_I}{2\eta_{II}} (K_1 - iK_2) \left(\frac{X}{l}\right)^{-i\epsilon} \right\} \quad (45)$$

$$-\eta_{II} \delta_y + i\delta_x = \frac{2\sqrt{(\Delta a - X)}}{(1 + 4\epsilon^2) \cosh[\pi\epsilon] \sqrt{2\pi}} \times \left[ \left\{ (\chi_{11} + \chi_{21}) + i\left(\frac{\chi_{12} + \chi_{22}}{2}\right) \right\} (K_1 + iK_2) \right]$$

$$\times (1 - i2\epsilon) \left(\frac{\Delta a - X}{l}\right)^{i\epsilon} + i\left(\frac{\chi_{12} + \chi_{22}}{2}\right) \times (K_1 - iK_2) (1 + i2\epsilon) \left(\frac{\Delta a - X}{l}\right)^{-i\epsilon} \quad (46)$$

식 (45)와 식 (46)을 이용하여 식 (44)에 정의된 등속도로 진전하는 이방성 이중재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 구하면 다음과 같이 된다.

$$G = \frac{K_i^2 H}{4 \cosh^2[\pi\epsilon]} \quad (47)$$

여기서  $H = \chi_{11} + \chi_{21}$ 이고  $K_i = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ 이다. 이 결과는 기존의 정적문제에 관한 에너지 해방률식<sup>(9)</sup>과 그 형태가 동일하며 균열진전속도  $c$ 가 영(0)이 되면 정적문제가 된다.

### 6. 광탄성 등색선 무늬의 컴퓨터 그래픽

이중재 접합계면 균열의 끝 부근에 대한 최대 전단응력 상태를 나타내는 방법으로 컴퓨터 그래픽으로 광탄성 무늬를 시뮬레이션하는 것이다.<sup>(10)</sup> 이방성 재료에 대한 광탄성 무늬를 정확히 그리는 것이 좋으나 본 연구에서는 등방성 재료에 대한 광탄성 법칙을 이방성 재료에 그대로 적용하여 광탄성 무늬를 그리도록 하였다. 이와 같은 이유는 최대 전단응력의 분포 경향만을 보는데는 문제가 없을 것으로 보았고, 또한 등방성 이중재 접합계면 균열의 결과<sup>(10)</sup>와 비교할 수 있기 때문이다.

상용 수치해석 프로그램인 매스매티카(matematica)를 이용하여 응력강도계수에 관계가 있는 복소수계수  $\zeta$ 와 균열 진전속도  $c$ 를 임의로 가정하여 광탄성 등색선 무늬(photoelastic isochromatic patterns)를 컴퓨터 그래픽한다.

광탄성 공식은 다음과 같다.

$$\tau_{jmax} = N_j / (2 \alpha_j t_j), \quad (j=1,2) \quad (48)$$

여기서  $N_j$ 은 무늬차수,  $\alpha_j$ 는 재료의 감도,  $t_j$ 는 시편두께이다. 재료의 성질이 서로 다른 이중재료의 기계적 성질은 Table 1과 같고, 접합계면의

Table 1 Material properties

	Material 1	Material 2
$E_{11}$	$6.0 \times 10^3$ MPa	$0.6 \times 10^3$ MPa
$E_{12}$	$2.5 \times 10^3$ MPa	$0.25 \times 10^3$ MPa
$G_{12}$	$1.0 \times 10^3$ MPa	$0.1 \times 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0.29	0.29
$\rho$	$5.0 \times 10^{-6}$ kg/mm <sup>3</sup>	$3.0 \times 10^{-6}$ kg/mm <sup>3</sup>
$\phi$	45 °	30 °
$\alpha$	0.09 mm/N	0.095 mm/N
$t$	3 mm	3 mm

Table 2 Values of  $c$  and  $\zeta_I, \zeta_{II}$

	a	b	c	d	e	f
$c$ (m/sec)	0.1	15	0.1	15	0.1	10
$\zeta_I$	200	200	0	0	150	150
$\zeta_{II}$	0	0	200	200	150	150

아래쪽을 재료1, 위쪽을 재료2로 선정하였으며, 여기서  $\phi$ 는 이방성 재료의 주축 회전각 (fiber angle)이다. 또한 사용한 복소수계수  $\zeta$ 와 균열 전속도  $c$ 는 Table 2와 같다.

Fig. 2의 (a)와 (b)에서 보면  $\zeta_{II}=0$  이고  $\zeta_I$ 이 어떤 값을 가질 때의 광탄성 무늬인데 모드II (sliding mode)에 가까운 형태이다. Fig. 2의 (c)와 (d)는  $\zeta_I=0$  이고  $\zeta_{II}$ 가 어떤 값을 가질 때의 광탄성 무늬인데 모드 I(opening mode)에 가까운 형태이다. 물론, 이종재 접합계면 균열은 혼합 모드 (mixed mode)이지만,  $\zeta_I$ 은 모드II에,  $\zeta_{II}$ 는 모드 I에 각각 지배적인 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 이 결과는 등방성 이종재 접합계면 균열의 결과<sup>(9)</sup>와 같은 경향이다. Fig. 2의 (e)와 (f)는  $\zeta_I$ 과  $\zeta_{II}$ 가 동시에 어떤 값을 가질 때이며 혼합 모드의 형태를 나타내고 있다. 그리고, Fig. 2의 (b), (d)와 (f)를 보면 등속 균열 전진속도가 빨라짐에 따라서 무늬가 모두 커지는 것을 알 수가 있다.

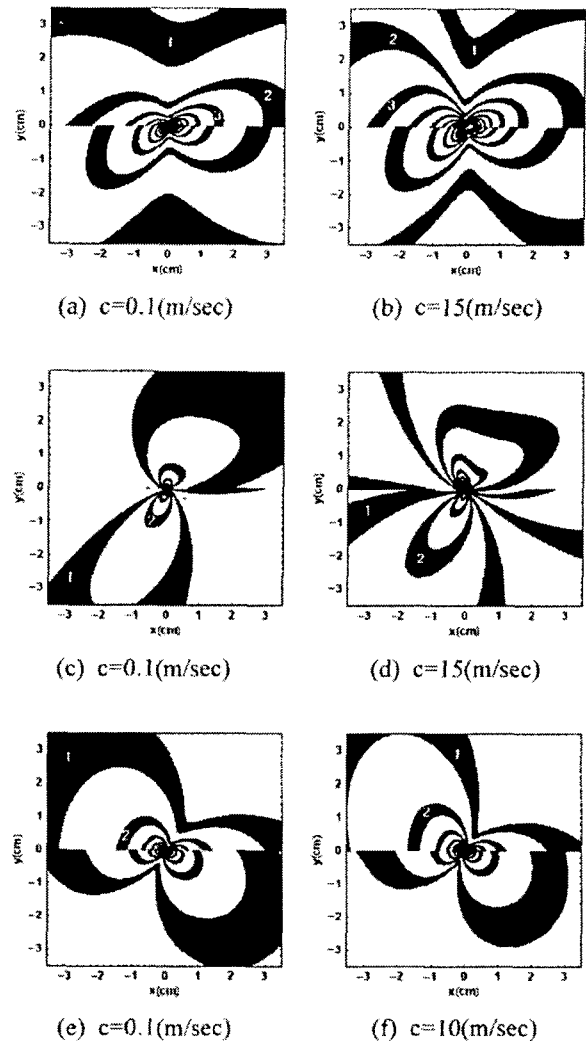


Fig. 2 Photoelastic isochromatic patterns by computer graphics

### 7. 결론

변위포텐셜함수를 이용하여 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 연구를 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 균열의 응력장 및 변위장을 유도하였고, 동적응력강도계수와 에너지 해방률을 구하였다.
- (2) 등속 진전하는 이방성 이종재 접합계면 균열에 대해 얻은 결과는 등속 진전하는 등방성 이종재, 직교이방성 이종재, 등방성/이방성 이종재 문제 등에 적용이 가능하다.



(3) 광탄성 무늬를 시뮬레이션하여  $\xi_I$  이 모드 II 에,  $\xi_{II}$  는 모드 I 에 각각 지배적인 영향을 미치고 있음을 알았다.

### 후 기

본 연구는 2001년도 경남대학교 교내학술연구 조성비 지원에 의해 수행된 것이며 지원에 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Sih, G. C. and Rice, J. R., 1964, "The Bending of Plate of Dissimilar Materials with Crack," *J. Appl. Mech.* Vol. 86, pp. 477~482.
- (2) England, A. H., 1965, "A Crack between Dissimilar Media," *J. Appl. Mech.* Vol. 32, pp. 400~402.
- (3) Suo Z., 1989, "Singularity, Interface and Crack in Dissimilar Anisotropic Media," *Harvard University Report Mech-137*.
- (4) Deng, X., 1992, "Complete Complex Series Expansions of Near-tip Fields for Steadily Growing Interface Crack in Dissimilar Isotropic materials," *Engineering Fracture Mech.* Vol. 42, pp. 237~242.
- (5) Aminpour, M. A. and Holsapple, K. A., 1990, "Near-field Solutions for Propagating Cracks at the Interface of Dissimilar Anisotropic Elastic Materials," *Engineering Fracture Mech.* Vol. 36, pp. 93~103.
- (6) Deng, X., 1993, "General Crack-tip Fields for Stationary and Steadily Growing Interface Cracks in Anisotropic Bimaterials," *J. Appl. Mech.* Vol. 60, pp. 183~189.
- (7) Lee, K. H., 2000, "Stress and Displacement Fields for Propagating the Crack along the Interface of Dissimilar Orthotropic Materials Under Dynamic Mode I and II Load," *J. Appl. Mech.* Vol. 67, pp. 223~228.
- (8) Bedford, A. and Drumheller, D. S., 1994, *Elastic Wave Propagation*, Wiley.
- (9) Kim, J.K. and Cho, S.B., 2001, "A Study on Energy Release Rate for Interface Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials," *Transaction of KSME(A)*, Vol. 25, No. 11, pp. 1835~1843.
- (10) Cho, S.B. and Yoon, S.K., 1992, "A Study on the Determination and Characteristics of Stress Intensity Factors and Stress Singularities for V-notched Cracks in Dissimilar Materials," *Transaction of KSME*, Vol. 16, No. 10, pp. 1890~1899.