자름규칙(cut)-제거 연역의 증명 길이에 대하여

김범인

【요약문】 본 논문은 겐첸의 정식열(sequent) 계산에서 자름규칙(cut)을 제거한 경우 증명의 길이는 어떻게 달라지는가를 다루고 있다. 특히, 본 논문은 명제 논리에 있어서 공리를 원자 정식으로만 삼는 체계의 경우, 증명의 길이는 변화가 없음을 증명하는 것을 목적으로 한다.

【주요어】 증명 이론, 증명 길이의 한계

1.들어가며

겐첸(Gentzen)의 정식열(sequent)계산에서 자름규칙(cut)이 반드시 사용되어야만 하는가란 의문이 바로 겐첸의 자름규칙-제거 정리로 이끌었을 것이다. 그 정리에 의하여, 자름규칙을 사용하지 않고서도 자름 규칙을 사용하여 이끌어낸 결론과 같은 결론을 이끌어 낼 수 있음이 증명되었다. 하지만, 이 정리로 인하여 자름규칙 자체가 무용하다고까지 주장할 수는 없을 것이다. 왜냐하면, 자름규칙이 반드시 필요한 것은 아니지만, 자름규칙이 사용되면 증명의 길이를 상당히 줄일 수 있다고 여겨지기 때문이다. 이에 의해 제기된 질문은 바로 자름규칙을 사용하지 않은 증명은 사용한 증명의 경우와 비교할 때 증명의 길이가 얼마나 길어지는가에 대한 문제이다. 트로엘스트라(Troelstra)[2000]는 초지수승(hyperexponential)의 정도로 증명의 길이가 엄청나게 증가함을 보여준다. 물론 명제 논리의 경우는 이보다 조금 짧은 지수승 정도의 길이로 길어진다고 대답된다. 본 논문은 명제 논리의 경우에 있어서 체계 G(본문 참조)를 사용하였을 때, 자름규칙을 사용한 증명과 사용하지 않은 증명간에는 길이의 차이가 없음을 보일 것이다. 이는 명제 논리의 경우 증명의 간편성, 즉 증명 길이를 줄이기 위하여 자름규칙을 사용할 필요도 없음을 보여준다. 이는 정식열로 된 명제 논리에서 일반적으로 채

용되는 체계에서도 상당한 정도로 길이가 줄어들 수 있음을 강하게 암시한다.

2. 체계 G

기본적으로 각각의 정식열은 $\Gamma => \Delta$의 형태이다. 여기서 사용되는 Γ, Δ는 반복집합(multiset)을 나타낸다. 즉, {A, B}와 {B, A}는 같은 집합이지만, {A, B, B}와 {A, B}는 같은 집합이 아니다.

체계 G의 공리와 규칙은 다음으로 구성된다.

공리1 $\vdash_1 P, \Gamma => \Delta, P$ 공리2 $\vdash_1 \perp, \Gamma => \Delta$

단, 공리에 등장하는 모든 정식은 원자 정식이다.

L∧ $\dfrac{\vdash_n A, B, \Gamma => \Delta}{\vdash_{n+1} A \wedge B, \Gamma => \Delta}$ R∧

$\dfrac{\vdash_n \Gamma => \Delta, A \quad \vdash_m \Gamma => \Delta, B}{\vdash_{\max(n,m)+1} \Gamma => \Delta, A \wedge B}$

L∨ $\dfrac{\vdash_n A, \Gamma => \Delta \quad \vdash_m B, \Gamma => \Delta}{\vdash_{\max(n,m)+1} A \vee B, \Gamma => \Delta}$ L∨ $\dfrac{\vdash_n \Gamma => \Delta, A, B}{\vdash_{n+1} \Gamma => \Delta, A \vee B}$

L→ $\dfrac{\vdash_n \Gamma => \Delta, A \quad \vdash_m B, \Gamma => \Delta}{\vdash_{\max(n,m)+1} A \to B, \Gamma => \Delta}$ R→

$\dfrac{\vdash_n A, \Gamma => \Delta, B}{\vdash_{n+1} \Gamma => \Delta, A \to B}$

이 체계가 일상적인 정식열 계산과 가지는 가장 큰차이점은 공리에 등장하는 정식들은 모두 원자정식이라는 제한이다. 이것이 우리가 증명하고자 하는 바의 가장 핵심적인 역할을 담당한다고 할 수 있다. 또한, 보통의 정식열 계산에서는 증명의 길이에 대한 언급이 없지만 여기서는 그 길이에 대한 분명한 언급을 표시하였다. 아래첨자로 표시되는 n,m이 바로 증명의 길이라

생각하면 된다. $\vdash_n \Gamma => \Delta$는 $\Gamma => \Delta$이라는 정식열이 n번째 길이 이내에 증명된다고 해석할 수 있을 것이다. 이를 위하여, 명시적으로 $\dfrac{\vdash_n \Gamma => \Delta}{\vdash_{n+k} \Gamma => \Delta}$ 를 추가적인 규칙으로 놓아도 상관없을 것이다.

우리가 여기서 고려하는 자름규칙은 다음의 형태이다.

$$\text{자름규칙} \quad \frac{\vdash_n \Gamma => \Delta, D \quad \vdash_m D, \Gamma => \Delta}{\vdash_{\max(n+m)+1} \Gamma => \Delta}$$

3. 자름규칙의 제거

이를 위하여는 먼저, 다음의 보조정리를 증명해야 한다.

보조정리3.1(역추론(inversion) 정리) G에서는 다음이 성립한다.

(i) $\vdash_{n+1} A \wedge B, \Gamma => \Delta$이면, $\vdash_n A, B, \Gamma => \Delta$

(ii) $\vdash_{n+1} \Gamma => \Delta, A \vee B$이면, $\vdash_n \Gamma => \Delta, A, B$

(iii) $\vdash_{n+1} A_0 \vee A_1, \Gamma => \Delta$이면, $\vdash_n A_i, \Gamma => \Delta$

(iv) $\vdash_{n+1} \Gamma => \Delta, A_0 \wedge A_1$이면, $\vdash_n \Gamma => \Delta, A_i$

(v) $\vdash_{n+1} \Gamma => \Delta, A \rightarrow B$이면, $\vdash_n A, \Gamma => \Delta, B$

(vi) $\vdash_{n+1} A \rightarrow B, \Gamma => \Delta$이면, $\vdash_n \Gamma => \Delta, A$와 $\vdash_n B, \Gamma => \Delta$

증명.

n에 대한 귀납을 통하여 증명하자.

n=1인 경우, 원자정식들로부터 공리가 시작해야 하기 때문에, 규칙에 의해 주어진 정리들은 성립한다.

귀납 가정을 이용하여 나머지 경우를 살펴보자.

(i)의 경우

$\vdash_{n+1} A \wedge B, \Gamma => \Delta$에서 A∧B가 주요(principal) 정식이라면, 규칙에 의해 $\vdash_{n} A, B, \Gamma => \Delta$가 성립한다.

A∧B가 주요정식이 아니라고 하자.

그러면, $\vdash_{n} A \wedge B, \Gamma' => \Delta'$과 $\vdash_{n} A \wedge B, \Gamma'' => \Delta''$인 정식열이 존재한다.

귀납 가정에 의해, $\vdash_{n-1} A, B, \Gamma' => \Delta'$과 $\vdash_{n} A, B, \Gamma'' => \Delta''$가 성립한다.

따라서, $\vdash_{n} A, B, \Gamma => \Delta$이다.

(ii)-(vi)도 같은 방식으로 하여주면 된다.

이제 위의 보조정리 3.1을 기초로 다음의 주요 정리를 증명하자.

이를 위하여 정식 D의 복합도를 다음과 같이 회귀적으로 정의하자.

정의3.1(정식 D의 복합도.기호로 C(D))

(i)원자 정식 D의 경우, C(D)=1이다.

(ii)C(A∨B)=C(A)+C(B)+1

(iii)C(A∧B)=C(A)+C(B)+1

(iv)C(A→B)=C(A)+C(B)+1

보조정리3.2

Γ, Δ는 원자 정식으로만 구성된 집합을 의미하고 Γ_k, Δ_k는 임의의 정식들의 집합이라고 하자. 임의의 n,m에 대하여, $\vdash_{n} \Gamma, \Gamma_1 => \Delta, \Delta_1, D$와 $\vdash_{m} D, \Gamma, \Gamma_1 => \Delta, \Delta_1$이면 $\vdash_{\max(n,m)} \Gamma, \Gamma_1 => \Delta, \Delta_1$이라고 할때, 다음이 성립한다.

(i) $\vdash_{i} \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0, D$이고 $\vdash_{j} D, \Gamma => \Delta$이면, $\vdash_{i} \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$

(ii) $\vdash_{i} D, \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$이고 $\vdash_{j} \Gamma => \Delta, D$이면, $\vdash_{i} \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$

증명.

이는 $\Gamma_0 \cup \Delta_0$에서의 최대 복합도와 최대 복합도를 가진 정식의 개수에 대한 귀납을 통하여 증명하자.

1) $\Gamma_0 \cup \Delta_0$의 최대 복합도가 1인 경우

이 경우는 $\Gamma_0 \cup \Delta_0$의 모든 정식이 원자정식인 경우이다.

따라서, (i)의 경우는 $\vdash_j D, \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$가 성립한다.

(ii)의 경우는 $\vdash_j \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0, D$가 성립한다.

따라서, 전제에 의해 $\vdash_{\max(i,j)} \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$가 성립한다.

그런데, $\Gamma, \Delta, \Gamma_0, \Delta_0$는 모두 원자정식으로만 구성되어 있다.

따라서, 어떠한 규칙도 적용되지 않았다는 의미이므로, $\vdash_1 \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$이 성립한다.

그러므로, $\vdash_i \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$가 성립한다.

2)귀납가정을 전제한 경우

(i)과 (ii)는 마찬가지이므로 (i)에 대해서만 보여주겠다.

$\Gamma_0 \cup \Delta_0$의 최대 복합도를 갖는 식 중 하나를 선택하여, 그에 대하여 규칙 R에 대한 역추론 정리를 적용하자.

그러면 다음의 꼴이 될 것이다.

$\vdash_{i-1} \Gamma, \Gamma_1 => \Delta, \Delta_1, D$와 $\vdash_{i-1} \Gamma, \Gamma_2 => \Delta, \Delta_2, D$

여기서 귀납 가정을 적용하면, $\vdash_{i-1} \Gamma, \Gamma_1 => \Delta, \Delta_1$와 $\vdash_{i-1} \Gamma, \Gamma_2 => \Delta, \Delta_2$

다시 규칙 R을 적용하면, $\vdash_i \Gamma, \Gamma_0 => \Delta, \Delta_0$

정리3.3(길이 보존 자름규칙 제거 정리)

이전 연역에 자름규칙이 사용되지 않았고, $\vdash_n \Gamma => \Delta, D$와 $\vdash_m D, \Gamma => \Delta$가 성립하면, $\vdash_{\max(n,m)} \Gamma => \Delta$가 성립한다.

증명.

$\Gamma \cup \Delta$의 최대 복합도와 그 복합도를 가지는 정식의 개수에 대한 귀납을 사용하자.

1) $\Gamma \cup \Delta$의 최대 복합도가 1인 경우

i)C(D)=1인 경우

Γ, Δ, D는 모두 원자 정식으로 되어 있으므로 $\vdash_n \Gamma => \Delta, D$는 공리이다.

자연히 $\vdash_n D, \Gamma => \Delta$도 공리이다.

만약, D가 $\vdash_n \Gamma => \Delta, D$에서 주요정식이라면, Γ에도 D가 들어있다.

따라서, $\vdash_n D, \Gamma => \Delta$가 공리일 때, $\vdash_n \Gamma => \Delta$도 공리가 된다.

만약, D가 $\vdash_n \Gamma => \Delta, D$에서 주요정식이 아니라면, D는 생략해도 상관이 없다.

즉, $\vdash_n \Gamma => \Delta$는 공리가 된다.

ii)C(D)>1인 경우

C(D)에 대한 귀납을 사용하자.

ㄱ) $D \equiv D_0 \wedge D_1$인 경우

$\vdash_n \Gamma => \Delta, D_0 \wedge D_1$와 $\vdash_m D_0 \wedge D_1, \Gamma => \Delta$

여기에 역추론 정리를 이용하면, 다음을 얻는다.

$\vdash_{n-1} \Gamma => \Delta, D_0$, $\vdash_{n-1} \Gamma => \Delta, D_1$, $\vdash_{m-1} D_0, D_1, \Gamma => \Delta$

$\vdash_{n-1} \Gamma => \Delta, D_0$와 $\vdash_{m-1} D_0, D_1, \Gamma => \Delta$에 대하여, 귀납 가정과 보조정리 3.2를 적용하면

$\vdash_{m-1} D_1, \Gamma => \Delta$을 얻는다.

이것을 $\vdash_{n-1} \Gamma => \Delta, D_1$과 결합시키고 다시 귀납 가정을 적용하면,

$\vdash_{\max(n-1, m-1)} \Gamma => \Delta$를 얻는다.

그러므로, $\vdash_{\max(n,m)}\Gamma => \Delta$이 성립한다.

ㄴ) $D \equiv D_0 \vee D_1$인 경우

$\vdash_n \Gamma => \Delta, D_0 \vee D_1$와 $\vdash_m D_0 \vee D_1, \Gamma => \Delta$

여기에 역추론 정리를 이용하면, 다음을 얻는다.

$\vdash_{n-1}\Gamma => \Delta, D_0, D_1$, $\vdash_{m-1}D_0, \Gamma => \Delta$, $\vdash_{m-1}D_1, \Gamma => \Delta$

$\vdash_{n-1}\Gamma => \Delta, D_0, D_1$과 $\vdash_{m-1}D_0, \Gamma => \Delta$에 대하여, 귀납 가정과 보조정리 3.2를 적용하면,

$\vdash_{n-1}\Gamma => \Delta, D_1$을 얻는다.

이것을 $\vdash_{m-1}D_1, \Gamma => \Delta$과 결합시키고 다시 귀납 가정을 적용하면,

$\vdash_{\max(n-1,m-1)}\Gamma => \Delta$를 얻는다.

그러므로, $\vdash_{\max(n,m)}\Gamma => \Delta$이 성립한다.

ㄷ) $D \equiv D_0 \to D_1$인 경우

$\vdash_n \Gamma => \Delta, D_0 \to D_1$과 $\vdash_m D_0 \to D_1, \Gamma => \Delta$

여기에 역추론 정리를 이용하면, 다음을 얻는다.

$\vdash_{n-1}D_0, \Gamma => \Delta, D_1$, $\vdash_{m-1}\Gamma => \Delta, D_0$, $\vdash_{m-1}D_1, \Gamma => \Delta$

$\vdash_{n-1}D_0, \Gamma => \Delta, D_1$과 $\vdash_{m-1}\Gamma => \Delta, D_0$에 대하여, 귀납 가정과 보조정리 3.2를 적용하면,

$\vdash_{n-1}\Gamma => \Delta, D_1$을 얻는다.

이것을 $\vdash_{m-1}D_1, \Gamma => \Delta$과 결합시키고 다시 귀납 가정을 적용하면,

$\vdash_{\max(n-1,m-1)}\Gamma => \Delta$를 얻는다.

그러므로, $\vdash_{\max(n,m)}\Gamma => \Delta$이 성립한다.

2) $\Gamma \cup \Delta$의 최대 복합도가 1보다 큰 경우

최대 복합도를 가진 정식에 역추론 정리를 적용한다.

그러면 다음을 얻을 수 있을 것이다.

$\vdash_{n-1}\Gamma_0 => \Delta_0, D$, $\vdash_{n-1}\Gamma_1 => \Delta_1, D$, $\vdash_{m-1}D, \Gamma_0 => \Delta_0$, $\vdash_{m-1}D, \Gamma_1 => \Delta_1$

$\vdash_{n-1}\Gamma_0 => \Delta_0, D$과 $\vdash_{m-1}D, \Gamma_0 => \Delta_0$에 귀납가정을 적용하면, $\vdash_{\max(n-1, m-1)}\Gamma_0 => \Delta_0$

$\vdash_{n-1}\Gamma_1 => \Delta_1, D$과 $\vdash_{m-1}D, \Gamma_1 => \Delta_1$에 귀납 가정을 적용하면, $\vdash_{\max(n-1, m-1)}\Gamma_1 => \Delta_1$

여기에 역추론시킨 규칙을 다시 적용하면, $\vdash_{\max(n, m)}\Gamma => \Delta$가 성립한다.

따름정리3.4

G+자름규칙에서 $\vdash_n\Gamma => \Delta$라면, G에서 $\vdash_n\Gamma => \Delta$가 성립한다.

4. 나가며

위의 증명을 일반적인 술어 논리나 직관주의 체계로 확장가능하지는 않을 것이다. 왜냐하면, 술어 논리의 경우 오레프코프(Orevkov)〔1979〕가 이미 그 길이가 초지수승(hyperexponential)보다 작아질 수는 없음을 증명하였다. 직관주의의 경우, 공리들이 모두 원자정식으로 되어 있다는 조건은 조금은 과중하게 여겨진다. 왜냐하면, 그렇게 제한을 가하면, $A \rightarrow B, C => C$를 증명할 수가 없다.

위의 결과는 또한 공리를 원자정식으로 삼지 않는다는 점을 제외하고는 체계 G와 동일한 체계 G2에 대하여도 시사점을 던져준다. G2+자름규칙에서 $\vdash_n\Gamma => \Delta$가 성립한다고 하자. 이 연역에서 나타나는 공리에 해당하는 정식열들의 집합을 Σ라고 놓자. 각각의 정식열들의 형성 나무의 길이를

L(A)라고 하고 정식들의 집합 Σ에 대하여, L(Σ)를 Σ에 나타는 정식 A에 대한 L(A)의 최대값이라고 놓자. 그러면, G2에서 $\vdash_{n+L(\Sigma)}\Gamma => \Delta$가 성립할 것이다. 이것은 이전에 지수승 정도의 값이라 예측되던 것보다 훨씬 작다.

참고문헌

V. P. Orevkov 〔1979〕 Lower bounds for the lengthening of proofs after cut-elimination(Russian), *Complexity of Proofs and Their Transformations in Axiomatic Theories*〔1993〕, AMS

A. S. Troelstra and H.Schwichtenberg 〔2000〕 *Basic Proof Theory*(2nd), Cambridge Univesity Press.