

2차원 단면해석을 위한 정적-외연적 강소성 유한요소법의 개발 및 적용

정동원* · 이승훈**

The Development of Static-explicit Rigid-plastic Finite Element Method and Application to 2-dimension Sectional Analysis

Dong-Won Jung*, Seung-Hun Lee**

ABSTRACT

In rigid-plastic finite element method, there is a heavy computation time and convergence problem. In this study, revised rigid-plastic finite element method will be introduced. This method is the way that restrict the convergence interval. In result, convergence problem and computation time due to large non-linearity in the existing numerical analysis method were no longer a critical problem. It is expected that various results from the numerical analysis will give very useful information for the design of tools in sheet metal forming process.

Key Words : Static-implicit Method(정적내연적 방법), Static-explicit Method(정적외연적 방법), Convergence(수렴성), Computation Time(계산시간), Sheet Metal Forming(금속박판성형)

1. 서 론

비선형 유한요소해석법은 타 방법에 비해서 적용범위가 넓고, 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 특징 때문에 대부분의 박판 성형공정 해석에 주로 사용되고 있다. 이러한 유한요소를 이용한 해석에도 수치적 기법에 따라 여러 가지로 구분되어 있는데, 크게 큰 시간간격을 가지며 각 단계마다 힘 평형을 맞추며 여러 번 축차(iteration)하여 수렴

해나가는 내연적 유한요소 해석법(implicit finite element method)과 작은 시간간격을 가지며 각 단계에서 동적 평형방정식을 만족시키는 해를 구하며 축차하지 않는 외연적 유한요소 해석법(explicit finite element method)으로 구분된다. 그중에서 정적내연적방법(static-implicit method)은 큰 시간간격을 가지고 각 단계마다 힘 평형을 맞추며 여러 번 축차를 통해 수렴시켜 나가는 방법으로서 수렴을 위한 계산시간이 길다는 단점과 기하학적 형상이 매우 복잡하거나 대용량의 문제에 대해서는 수렴성이 문제가 되어 정량적 해를 얻을 수 없다는 단점이 있지만 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 장

* 제주대학교 기계에너지생산공학부

** 제주대학교 대학원 기계공학과

점을 가지고 있다¹¹⁾

반면, 동적 외연적방법(dynamic-explicit method)은 수렴성이 문제가 되지 않아 복잡한 형상이나 대용량의 문제에도 적용하여 정량적인 해를 얻을 수 있다. 강소성 해석방법은 각 단계마다 변형량을 조절할 수 있어 계산시간을 줄일 수 있으므로 작은 시간간격을 가지고 각 단계에서 동적 평형방정식을 만족시키며 해를 구할 수 있다 이것은 원래 빠른 속도의 동적인 거동에 적합하기 때문에 비드 해석과 같은 복잡한 접촉현상을 포함하는 정적인 문제에 적용시킬 경우에는 해석결과에 심한 진동을 야기 시키게 된다. 따라서 해의 정확성을 보장받기 힘들고 신뢰성 있는 결과를 얻기 힘들다. 정적 내연적 방법 또한, 제품의 형상이 복잡해지면서 난이한 접촉을 보이거나 형상이 아주 복잡한 대용량의 문제에 있어서는 수렴이 이뤄지지 않고 정량적 해를 얻을 수 없는 단점을 보인다¹²⁾

이와 같은 수치해석 진행 과정 중 일어나는 문제점들을 보완하기 위해서 본 연구에서는 정적 외연적 유한요소방법(static-explicit FEM)이라는 새로운 수치적 기법을 도입하여 강소성 문제에 대한 공정해석에 처음으로 적용시켜 보았다 정적 외연적 방법은 내연적방법의 기본 구성방정식에 근거하지만, 그와 차이를 보이는 점은 동적 외연적방법과 마찬가지로 수렴검사가 이뤄지지 않는다는 것이다. 즉, 정적 외연적 방법은 현 단계에서 축차 없이 얻어진 해를 바로 다음 단계의 초기 추정값으로 적용하며, 해의 정확도를 높이기 위해서 시간간격의 크기를 매우 작게 정하는 특징을 가지고 있다 그리고 시간 간격의 크기는 시행착오 법에 의해 경험적으로 얻을 수 있다

외연적 유한요소해석에서 해의 정확도와 안정도에 가장 크게 영향을 미치는 것은 수렴간격이라 할 수 있다. 정확도를 높이기 위해서 수렴간격을 무한정 작게 줄일 수는 없기 때문에 그 크기를 결정할 수 있는 방법이 필요하다

본 연구는 정적 외연적 유한요소방법을 이용하여 강소성문제에 대해서 산업현장에서 빠르게 적용할 수 있도록 계산시간의 단축과 수렴성을 보완하는 방법을 제안하는 것이다 즉, 수렴을 위한 축

차를 제한하고 각 단계에서 변형량을 직계 조정하는 방법으로 계산시간의 단축과 수렴성 문제해결을 시도해 보았다

2. 본 론

2.1 정적 외연적 방법

평면변형도 강소성 유한요소법을 이용하여 박판성형을 해석할 때 기존에는 비선형 방정식을 뉴턴랩슨(Newton-Raphson)방법을 통해 Fig 1에서처럼 축차를 통해 원하는 해를 수렴시켜왔다

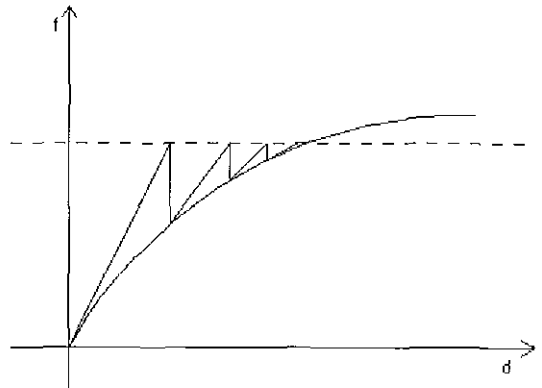


Fig. 1 Newton-Raphson method

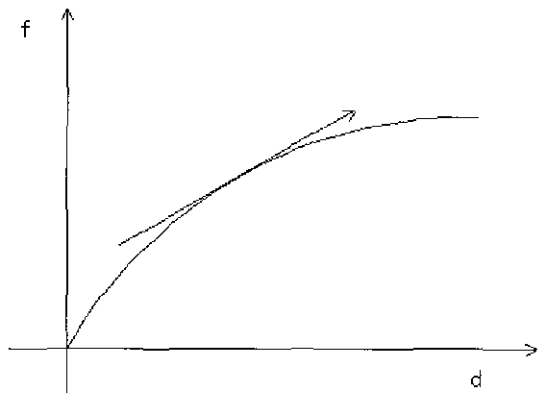


Fig. 2 Tangent vector

이 방법으로 해를 구할 때 해석하려는 형상이 복잡해질수록 계산시간이 길어지고 수렴성이 문제가 되어 정량적인 해를 구할 수 없다 Fig 2와 같이 축차 없이 처음 접하는 접선을 따라가면서 해를 구할 수 있도록 Fig 3과 같이 수렴구간을 미소하게 조정함으로써 정해를 근사적으로 추적하여 근사적인 해를 구함으로써 수렴성 문제해결을 시도했다^[3]

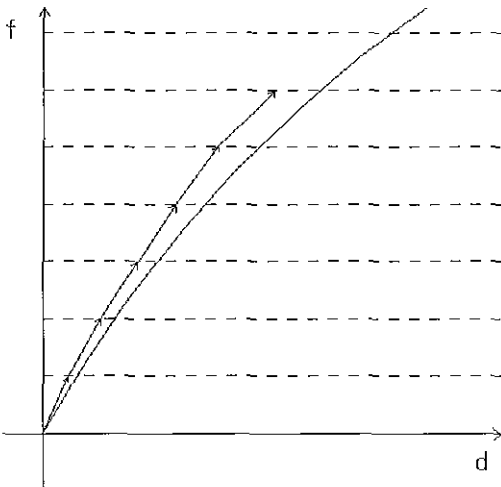


Fig. 3 Static-explicit method

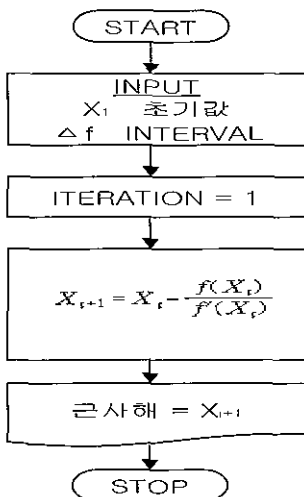


Fig. 4 Flow diagram

본 연구에서 축차에 의한 수렴과정 없이 해를 구하면 정확하지 않은 근사적인 해를 따라 가므로 해의 오차가 많이 발생 될 것으로 보이나 수렴구간(punch stroke)을 조정함으로써 어느 정도의 오차 범위를 줄일 수 있다.

Fig 4는 정적-외연적 방법의 맥락을 보여주는 개념도이다

2.2 평면 변형도 강소성 유한요소법

기하학적, 재료적 비선형성을 고려하여 박판 성형을 해석하는 것이 효과적이다 위와 같은 점을 고려하여 정완진^[4] 등은 Hill의 신 이방성이론^[5,6]을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 정완진 등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형 문제 경우에 한하여 적용하였다 강소성 유한요소법의 변분식은 다음과 같이 나타난다^[7]

$$\int_{A^o} \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) \tau^o dA^o - \int_S t \cdot \delta u dS^s = 0 \quad (1)$$

유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다

$$Q(\bar{U}) = P(\bar{U}) + F \quad (2)$$

여기서 $P(\bar{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고 F 는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식(1)의 첫째항에 해당하는 $Q(\bar{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\bar{U}) = \sum_e \int_{A^{e0}} \bar{\sigma}^e g^1 \frac{\partial(\Delta \bar{\epsilon}) \partial \phi}{\partial \phi \partial \epsilon_1} K_1 t^e dA^o \quad (3)$$

식(2)는 비선형 방정식이므로 식 (4)와 같이 선형화하여 뉴턴랩슨 방법으로 해를 구한다^[7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{U}^T} [Q(\bar{U}) - P(\bar{U})] \bar{U} = \bar{U}_{(i-1)} \cdot \Delta \bar{U}_{(i)} \\ = F - Q(\bar{U}_{(i-1)}) + P(\bar{U}_{(i-1)}) \end{aligned} \quad (4)$$

본 연구에서 특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발사하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada등^[8]이 사용한 방법을 채택하여 변형을 증분을 다음과 같이 수정하여 사용하였다

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\epsilon^2} \quad (5)$$

이때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{d\epsilon^2 + d\bar{\epsilon}_0^2}} d\bar{\epsilon} \quad (6)$$

2.3 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리 방법

요소단위로 박막요소에 대한 유한요소법의 접촉 문제를 고려하게 되면 요소내에서 수직응력을 구할 수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다

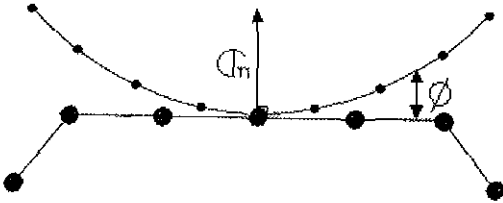


Fig. 5 Contact condition between two bodies

Fig 5와 같이 두 물체가 접촉할 때 접촉조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (7a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (7b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (7c)$$

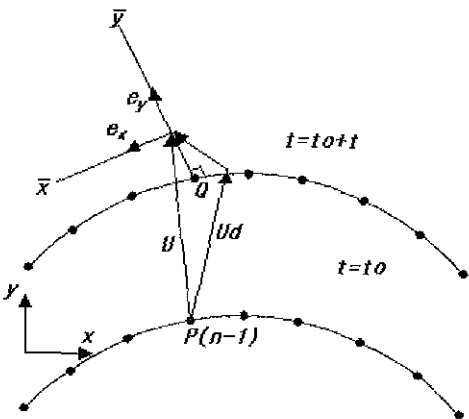


Fig. 6 Treatment of skew boundary condition

본 연구에서는 경사 좌표계를 사용하여 2차원형상의 금형에 의한 박판성형 해석 시 접촉조건을 만족시켰다 2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수로 나타낼 수 있다.

$$r(u) = X^S(u)e_x + Y^S(u)e_y \quad (8)$$

Fig. 6에서 접촉면상의 접촉점 P에 가장 가까운 점 Q는 P와 Q사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다^[7]

$$|QP|^2 = (X(P) - X^S(u))^2 + (Y(P) - Y^S(u))^2 \quad (9)$$

Fig 6과 같이 금형표면위의 점 Q에서의 금형바깥 방향의 수직벡터의 방향을 e_y , 절점 P의 편치에 대한 상대변위 U_r 이 e_y 에 수직인 성분벡터의 방향을 e_x 로 한다 e_y , e_x 는 다음과 같다

$$e_x = \frac{U_r - (U_r \cdot e_y)e_y}{|U_r - (U_r \cdot e_y)e_y|}$$

$$e_y = \frac{n(Q)}{|n(Q)|} \quad (10)$$

여기서 U_r 은 절점의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다 변환행렬 T는 다음과 같다^[7]

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (11)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(12)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식을 원래의 직교좌표계 (X, Y)로부터 경사좌표계 (\bar{X} , \bar{Y})로 변환한다

$$\bar{K} \Delta \bar{U} = \bar{R} \quad (13)$$

여기서, $\bar{K} = T^T K T$, $\bar{R} = T^T R$ 이다.

coulomb 마찰조건을 만족시키기 위해 미찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.^[7]

$$(F_S)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k U_x) \quad (14)$$

$$U_x = U_r - (U_r \cdot e_y)e_y \quad (15)$$

여기서 k는 큰 상수이다 식 (14)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환 후에 계산되었다 접촉조건 중에서 식(7c)을 만족하기 위해

서는 접촉 절점과 금형 사이에 작용하는 절점력이 압축력 이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥 방향의 수직력이 음이면 (접촉 → 비접촉) 상태전환을 하여 반복 계산한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.^[8]

$$P_y = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{yy}) - R_y \quad (16)$$

만일 P_y 가 음이면 (접촉 → 비접촉) 절점의 접촉 상태를 변경하고 변위벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다.

3. 해석 결과

3.1 성형공정 해석적용

본 논문에서 제시된 방법을 이용해 제시된 수식화를 통해 프로그램 된 평면변형 유한요소 프로그램을 이용해 트렁크리드 성형공정에 적용시켰다.

수렴구간(punch stroke)을 0.2mm로 고정시켜서 축차 없이 해를 구했다. Fig. 7은 트렁크 리드의 형태를 나타내고 있다.

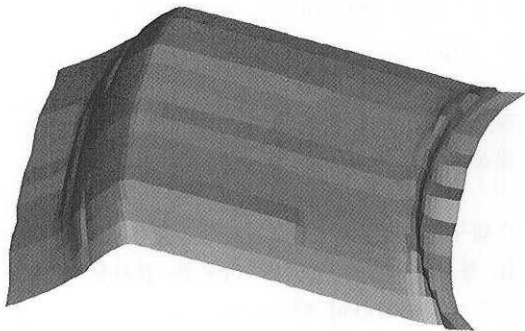
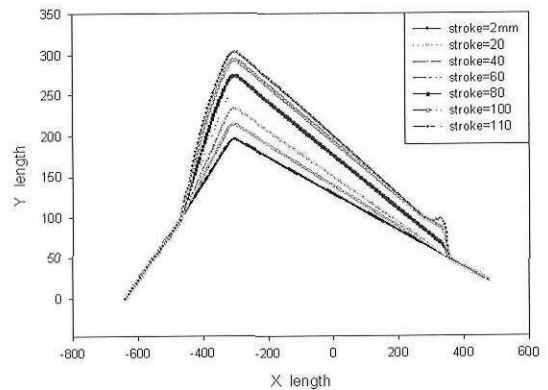


Fig. 7 Schematic view of Trunk-lid

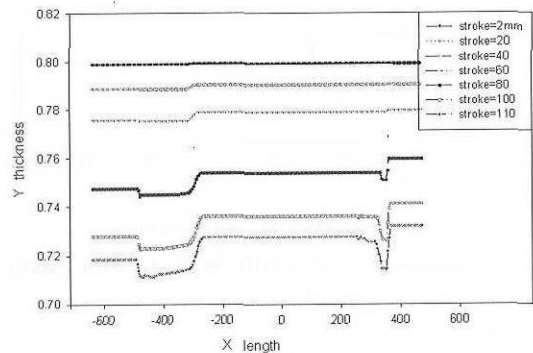
수식화 된 결과에 따라 평면 변형 유한요소 해석 프로그램을 작성하여 성형품의 각 단면들을 성형단계에 따라 2차원 해석하였다. 해석에 사용된 재료는 Table 1과 같다.

Table 1 Property of the material

응력-변형도 곡선	$\bar{\sigma} = 51.915 (\bar{\epsilon})^{0.25}$
수직 이방성 계수	R = 2.00
재료 두께	t = 0.8mm
Coulomb 마찰계수	$\mu = 0.2$
구속력 (Binding Force)	15kgf/mm(오른쪽) 15kgf/mm(왼쪽)
Maximum allowable punch stroke	110mm



(a) shape curve

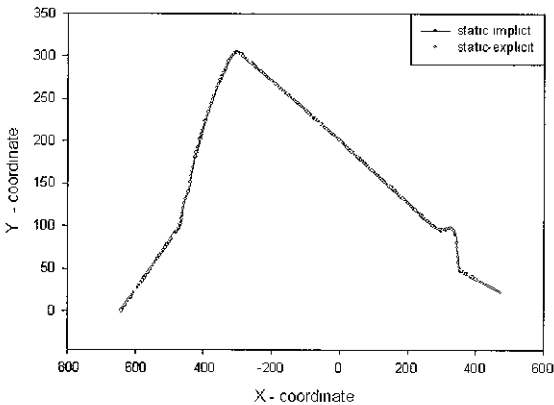


(b) thickness

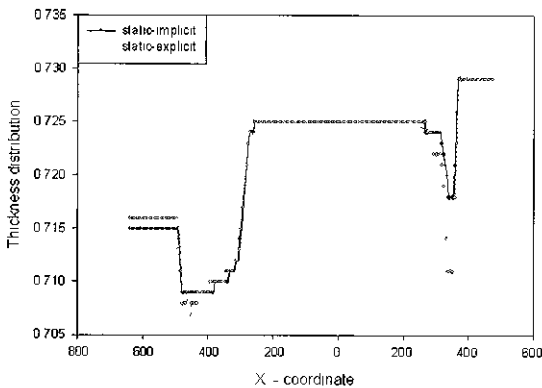
Fig. 8 Punch stroke = 0.2 mm

Fig. 8은 수렴구간을 0.2mm로 고정시켜서 시뮬레이션한 결과를 2mm에서 최종단계인 110mm까지

단계별로 보여주고 있다 Fig 8(a)는 정적-외연적 방법을 통한 성형곡선의 생성과정을 단계별로 나타내고 있고, Fig 8(b)는 두께 분포의 변화를 단계별로 나타내고 있다 이로부터, 정적-외연적 방법을 통한 해석이 원활히 수행되었음을 알 수 있다



(a) Final shape curve



(b) Final thickness distribution

Fig. 9 Comparison of static-implicit with static-explicit method

Fig 9는 정적-외연적 방법의 결과가 정적-내연적 방법의 결과 그래프와 거의 일치함을 보여주고 있다 같은 조건에서 정적-내연적 방법은 최종변형단계까지 총 2963단계의 계산과정을 거쳤으며, 정적-외연적 방법은 총550단계의 계산과정만을 거쳤다.

Fig 9(a)에서 두 방법의 성형곡선해석결과가 거의 일치함을 보여주고 있다 즉, 정적-외연적 방법을 통해서 빠른 시간 내에 원하는 성형결과를 얻을 수 있음을 나타내고 있다.

Fig 9(b)에서는 두 방법의 최종 단계에서의 두께 분포를 나타내고 있다 여기서, 두 방법의 약간의 오차가 존재하는데 이는 정적-외연적 방법이 각 수렴단계에서 정확한 수렴과정을 생략하고 처음 계산 값을 수렴 값으로 가정했기 때문에 발생했다고 보여지며, 이는 앞으로 좀더 보완되어야 할 점으로 보인다

4. 결 론

본 연구에서는 수렴성과 계산시간의 단축을 위해서 축차를 제한하는 방법을 사용하여 유한요소 프로그램을 구성하고 성형공정에 적용시켜보았고, 다음과 같은 결론들을 얻을 수 있었다

- 1 기존 정적-내연적 방법으로 해석한 트링크 리드 해석결과와 정적-외연적 방법의 해석 결과를 비교한 결과 정적-외연적 방법의 타당성을 얻을 수 있었다
- 2 정적-외연적 방법을 통해 적절한 수렴구간의 설정을 통해 수렴성의 문제를 해결할 수 있다
- 3 수렴구간을 적절히 조절하면 정적-내연적 방법을 통해 얻어진 결과와 비슷한 결과를 얻을 수 있고 많은 시간이 단축된다

이 방법은 빠른 시간 내에 그리고 수렴성에 대한 문제없이 원활하게 성형공정을 해석할 수 있다는 실용적인 장점을 가지고 있다 따라서 금형 설계 단계에서 시뮬레이션 변수와 금형 형상을 직렬히 바꾸어 줌으로써 최적의 금형 설계조건과 공정 변수를 예측하는데 유용하다

참고문헌

- 1 안동규, 정동원, 양동렬, 정완진, 1996, "2차원 박판성형 공정 해석을 위한 강소성 외연적 유한요소 수식", 대한기계학회 논문집(A) 제20권 제1호, pp. 88-99.
- 2 박원배, 김창만, 김낙수, 서대교, 전기찬, 1999, "계단형 드로비드에 의한 판재의 인출특성에 관한 연구", 한국소성가공학회지 제 5권 제 2호, pp 130-137
- 3 임상진, 광병만, 이주영, "유한요소법입문", 서울, 동명사, 2001
- 4 W J Chung, Y J Kim and D Y Yang 1989. Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms using Hill's New Yield Criterion, Int,J Mech Sci., Vol 31, pp 193-207.
- 5 R Hill 1979, Theoretical of textured aggregates, Math Proc. Camb. phil Soc, Vol.85, pp 179-191.
6. R Hill, the mathematical Theory of plasticity, Oxford University Press
7. 정동원, 송인섭, 양동열, 이장희 1992. 유한요소법을 이용한 박판성형의 단면해석과 자동차 금형설계에의 응용, 대한기계학회 춘계학술대회 논문집(I), pp 380-383.
- 8 K Osakada, J. Nakano and K Mori. 1982 Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulations for finite deformation, Int J Mech Sci, Vol 24, pp 459-468.