

강인성 제어 시스템과 구조 시스템의 통합 최적 설계 Combined Design of Robust Control System and Structure System

박중헌
J. H. Park

Key Words : Combined Optimal Design(통합최적설계), Robust H_∞ Control(강인성 H_∞ 제어), 3-D Truss Structure(3차원 입체 구조물), Feedback Gain(피드백 게인)

Abstract : This paper proposes an optimum design problem of structural and control systems, taking a 3-D truss structure as an example. The structure is supposed to be subjected to initial static loads and time-varying disturbances. The structure is controlled by a state feedback H_∞ controller to suppress the effect of the disturbances. The design variables are the cross sectional areas of truss members. The structural objective function is the structural weight. As the control objective, we consider two types of performance indices. The first function represents the effect of the initial loads. The second one is the norm of the feedback gain. These objective functions are in conflict with each other. Then, first, two control objective functions are transformed into one control objective by the weighting method. Next, the structural objective is treated as the constraint. By introducing the second control objective which considers the magnitude of the feedback gain, we can perform the design which is robust in modeling errors.

1. 서 론

종래, 고도의 기계구조물을 설계하는 경우에 있어, 먼저 구조설계를 하여 원하는 동특성을 얻을 수 없는 경우에 제어시스템 설계를 실시, 원래의 구조에 부가하여 종합적으로 소망의 동특성을 취득하는 시스템 설계방법을 취하여왔다. 이 설계방법은 구조-제어 시스템이 개별적으로 설계되어지는 사실로부터 구조-제어 시스템 개별최적설계라고 불리어진다. 최근, 경량화, 콤팩트화가 요구되는 우주구조물 등의 유연구조물을 설계함에 있어, 구조-제어 시스템은 서로 양방의 시스템 동특성에 영향을 끼치기 때문에, 구조-제어 시스템을 상호 고려하여 설계하는 것이 제어 시스템을 고려한 구조로써, 개별설계보다도 우수한 구조 동특성을 가진 구조설계가 가능하다고 생각되어진다. 이러한 설계법은 구조-제어 시스템이 동시에 설계되어지는 사실로부터 구조-제어 시스템 통합최적설계라고 불리어지고 있으며, 관련연구가 활발히 행하여지고 있다¹⁾.

본 논문에서는, 통합최적설계문제로서 일정 구조중량 제약조건에서 제어평가함수를 고려한 구조 사이즈를 결정하는 설계문제를 정식화한다. 3차원 트러스 구조물을 FEM에 의해 모델링 한 것을 설계대상으로, 제어시스템 설계에는 강인성 H_∞ 제어를 이용한다.

H_∞ 제어를 이용함으로써, 구조물은 안정해지며, 페루프시스템의 외란입력에서 제어출력까지의 전달함수 H_∞ norm 은 일정값 내에서 유지된다²⁻³⁾.

특히, 제어시스템 설계에서 피드백 게인을 고려하는 설계가 적용된다. 피드백 게인이 커지면 제어시스템 설계 코스트가 증가하며, 모델링 에러도 증가한다. 여기서, 피드백 게인의 평가지수가 도입된다. 제어목적은 제어출력을 억제하며 피드백 게인을 고려하는 것이다. 설계민수는 트러스 부재의 단면적이며, 구조 평가지수인 구조중량은 제약된다. 이러한 비선형 최적화 문제에는 순차선형계획법을 적용한다. 이와같이, 초기상태의 영향을 고려하며, 외란억제를 위한 H_∞ 제어의 적용을 설계목적으로 한다. 본 연구에서는, 3차원 트러스 구조물을 설계대상으로, 수치예를 통하여 이러한 조건하에서 제어평가함수의 최소화가 구조 시스템에 끼치는 영향에 대하여 고찰한다.

접수일 : 2003년 3월 1일
박중헌(책임저자) : 신라대학교 자동차기계공학과
E-mail : sky@silla.ac.kr, Tel : 061-309-5727

2. 문제설정

2.1 통합 최적화

본 연구에서는, 초기 외력에 의하여 진동이 시작되고, 연속적 외란이 가해지는 3차원 트러스 구조물을 설계대상으로, 트러스 부재의 단면적을 변화시킴으로써 구조중량을 저감시키며 재진특성을 확보하는 설계 문제를 정식화한다.

2.2 문제 정식

개질 및 구조적 배치는 변화하지 않는 n 개의 부재로부터 구성되는 입체 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유한요소법에 의해 모델링하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M_s \ddot{q} + D_s \dot{q} + K_s q = L_1 w + L_2 u \quad (1)$$

여기서, $M_s, D_s, K_s \in R^{n \times n}$ 는 질량, 감쇠, 강성행렬이며, $q \in R^n$, $w \in R^p$ and $u \in R^d$ 는 변위, 외란입력, 제어입력 벡터이다. p, d 는 각각 외란입력과 제어입력의 수를 나타낸다. 모델의 상태방정식표현은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (2)$$

$$z = Cx + Du \quad (3)$$

$$y = x \quad (4)$$

$x \in R^n$, $z \in R^r$, $y \in R^l$ 는 각각 상태변수, 제어출력, 관측출력 벡터이다. 본 논문에서 최적시스템은, 식(2), (3)의 시스템이 가안정, 가검출이라는 가정을 만족하며, 제어시스템은 상태피드백으로 구성된다. 초기변위는 다음과 같은 강성방정식에 의한 초기외력 p_0 로 구해진다.

$$q_0(a) = K_s^{-1}(a) p_0 \quad (5)$$

초기변위와 강성행렬 K_s 는 설계변수인 부재단면적 a 의 함수이다. 초기상태는 초기외력 p_0 항을 포함하여 다음과 같이 표현된다.

$$x_0 = \begin{bmatrix} K_s^{-1} p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, 초기속도는 0으로 가정한다.

본 논문에서는 구조개와 제어계의 통합최적설계를 목적으로 하므로, 양방의 시스템에 대한 평가지수를 설정해야 한다. 구조목적함수는 구조중량이다. 제어목적함수로서 두종류의 평가지수를 고려한다. 첫 번째

평가함수 J_1 은 초기외력의 영향을 나타내며, 두 번째 함수 J_2 는 피드백 게인의 norm 이다. 이들 평가함수에 대해서는 다음절에서 논한다.

2.3 다목적 문제

목적함수 J_1 과 J_2 는 서로 경합하는 관계에 있다. 여기서, 다목적 문제의 최적해를 구하는 방법인 가중인자법과 ϵ -제약법을 사용한다⁴⁾.

[가중인자법]

m 개의 목적함수 $f_i(x) (i=1, \dots, m)$ 는 가중인자와의 곱에 의한 합으로 하나의 목적함수로 고려되어지며 최소화된다.

$$\min_x = \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (8)$$

$$x \in X$$

여기서 $x, X, w_i (i=1, \dots, m)$ 는 설계변수, 걱정해의 집합, 가중인자이다. 본 논문에서는 두 종류의 제어목적함수가 이 방법에 의해 하나의 함수로 다루어진다.

[ϵ -제약법]

몇 개의 목적함수 $f_j(x) (j=1, \dots, r)$ 중의 하나를 제외한 다른 것들은 특정 값보다 작다는 제약조건하에서 그 한 목적함수가 최소화된다.

$$\min_x f_1(x) \quad (9)$$

$$\text{s.t. } f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad j=2, \dots, r \quad (10)$$

$$x \in X$$

구조중량과 제어목적함수에서 ϵ -제약법이 사용된다. 제어목적함수는 식(9)의 $f_1(x)$ 이며, 구조목적함수는 식(10)의 $f_2(x)$ 이다. 만약, f_1 과 f_2 가 서로 경합하는 관계라면, 식(10)의 제약조건은 구조중량이 일정하다는 등식제약조건이 된다.

즉, 두 제어목적함수 J_1, J_2 는 가중인자법에 의해 하나의 제어목적함수 J_1 으로 변환된다. 다음으로, 구조시스템과 제어시스템의 두개의 목적함수는 ϵ -제약법에 의해 단독목적함수문제로 변환된다. 결과적으로, 다음과 같이 전체시스템에 대하여, 목적함수로서 제

어목적함수 $J(a)$ 와 구조중량 $W(a)$ 가 특정값 W_c 와 같다는 제약조건이 주어진다.

$$\min_a J(a) = sJ_1 + tJ_2(a) \quad (s+t=1) \quad (11)$$

$$\text{s.t. } W(a) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i a_i = W_c \quad (12)$$

여기서 ρ_i, l_i, a_i 는 부재의 밀도, 길이 및 단면적이다. 단면적 a_i 를 변화시켜가며 이 제어목적함수 $J(a)$ 를 최소화한다. 두 제어목적함수 J_1, J_2 가 결합하는 관계에 있으므로, 그 둘을 동시에 최적화하는 것은 불가능하며 Pareto 최적해를 구해야한다. 어떤 해를 구하든 그것은 설계자의 관점에 좌우된다.

2.4 순차 선형 계획법

목적함수가 비선형인 경우, 순차선형계획법으로 해를 구할 수 있다. 이 방법에서는 목적함수와 제약조건이 어떤 특정 포인트에서 선형화된다. 원래의 비선형계획문제는 선형계획문제로 근사화되며 그 최적해를 구하게 된다. 이러한 선형화를 반복함으로써 본 문제의 최적해를 구해나가는 방법이다.

3. 제어 시스템 설계

본 논문에서는 외란의 영향을 억제하기 위하여 H_∞ 제어시스템을 설계한다. 제어목적함수로서, 두 종류의 평가지수를 고려한다.

3.1 H_∞ 제어 문제

3.1.1 일반화 H_∞ 제어 문제

Fig. 1과 같은 선형 시불변 제어대상 G 와 외란입력 w , 제어입력 u , 제어출력 z , 그리고 관측출력 y 를 생각하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 s 는 라플라스 변수이다.

파라미터 γ 에 대한 H_∞ 준(準)최적문제란, 다음과 같은 컨트롤러 $K(s)$ 를 구하는 문제이다 :

- 폐루프 시스템이 내부안정.
- $T_{zw}(s)$ 의 H_∞ norm 이 γ 미만.

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (14)$$

여기서 $T_{zw}(s)$ 은 시스템에 대해 정적 상태 피드백이 적용되어진 폐루프 시스템의 외란입력 w 에서 제어출력 z 까지의 전달함수이며, γ 는 양의 정수이다^{2~4)}. 전달함수행렬 $T(s)$ 에 대하여 H_∞ norm은 다음과 같이 정의된다.

$$\|T(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T_{zw}(j\omega)) \quad \forall \omega \in R \quad (15)$$

여기서 $\sigma_{\max}(T)$ 는 T 의 최대특이값이다.

주파수영역에서 정의된 식 (14)는 Parseval 방정식을 이용하여 시간영역에서 또한 정의되어진다. z 와 w 를 시간영역에서 다음과 같이 정의하면,

$$\int_0^\infty \{z^T(t)z(t)\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{z^T(-j\omega)z(j\omega)\} d\omega \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \{w^T(t)w(t)\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{w^T(-j\omega)w(j\omega)\} d\omega \quad (17)$$

식 (14)는 다음과 같이 나타내어진다.

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) < \gamma^2 I \quad \forall \omega \in R \quad (18)$$

다음으로, 식 (16), (17), (18) 및 $z(s) = T(s)w(s)$ 를 이용하면 모든 외란 w 에 대하여, 주파수영역에서 정식화된 식 (14) 는 시간영역에서 정의되어진 다음 식과 동가이다.

$$\int_0^\infty \{z^T(t)z(t)\} dt < \gamma^2 \int_0^\infty \{w^T(t)w(t)\} dt \quad (19)$$

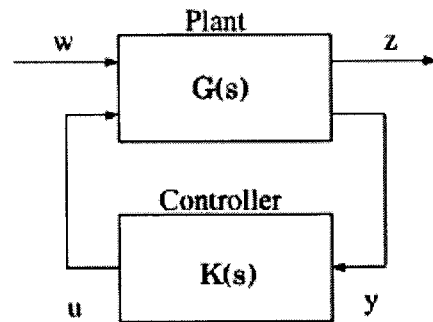


Fig. 1 H_∞ control system

3.1.2 상태 피드백 H_∞ 제어 문제

3차원 트러스 구조물이 초기외력과 연속적 외란의 영향을 받는다는 가정 하에서의 설계를 위하여서는, 시스템 특성상 초기상태와 외란 양방의 영향을 고려하여야만 한다. 다음과 같은 선형시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= Cx + Du \\ y &= x \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $x \in R^n$, $w \in R^d$, $u \in R^p$ 은 상태변수, 외란 및 제어 입력 벡터이다. $z \in R^e$, $y \in R^r$ 는 제어출력, 관측출력 벡터이다. 여기서 식 (20)의 시스템 행렬들은 다음을 만족한다고 가정한다.

- (A, B_2) 는 가안정.
- (C, A) 는 가검출.
- $D^T [C D] = [0 \ I]$.

상태 피드백에 의한 제어기의 하나는 다음과 같이 주어진다.

$$u = -B_2^{-1} P x \quad (21)$$

$$= -Kx \quad (22)$$

식 (21)에서 나타나는 다음의 Riccati 방정식을 만족하는 P 는 semi-positive 행렬이며 안정해이다.

$$A^T P + PA + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P - P B_2 B_2^T P + C^T C = 0 \quad (23)$$

여기서 안정해라는 것은 $A + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P - B_2 B_2^T P$ 을 안정인 행렬로 하는 해라는 것을 의미한다. 만약 해가 안정이 아닐 경우, γ 값을 크게 하여 제어시스템을 다시 설계해야한다.

3.2 제어 시스템 목적함수

3.2.1 초기상태를 고려하는 목적함수, J_1

만약 초기상태가 어떤 '0'이 아닌 상태라면 ($x_0 \neq 0$), 식 (19) 대신 다음 식을 생각할 수 있다.

$$\int_0^\infty (z^T z) dt \leq x_0^T P x_0 + \gamma^2 \int_0^\infty (w^T w) dt \quad (24)$$

우변의 첫째항은 초기상태 x_0 의 영향을, 두 번째 항은 외란 w 의 영향을 나타낸다. 만약 초기외란의 영향이 작다면 제어력은 감소될 수 있을 것이다. 그러므로 첫째항을 첫 번째 제어목적함수로 한다.

$$J_1 = x_0^T P x_0 \quad (25)$$

3.2.2 피드백 게인 Norm을 고려하는 목적함수, J_2

피드백 게인 norm 은 다음과 같이 정의된다⁹⁾.

$$N = \text{trace}(K^T R K) \quad (26)$$

여기서 R 은 가중행렬이다. 만약 $R = I$ 이면, 식 (26) 은 게인행렬 K 의 모든 요소들의 평방합을 나타낸다. 만약 norm 이 감소한다면, 행렬 K 의 각 요소는 작아질 것이다. 그러므로 피드백 게인을 고려하는 제어시스템설계를 위하여, 이 평가지수를 두 번째 제어목적함수 J_2 로 정의한다.

$$J_2 = \text{trace}(K^T R K) \quad (27)$$

4. 수치 시뮬레이션

4.1 설계 목적

Fig. 2에 보이는 3차원 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 무차원화 되어진 사양으로서, 장부재 길이 10, 단부재 길이 $2\sqrt{2}$, 밀도 5.0, 그리고 종탄성계수 100 이라고 한다. 절점 5~10 은 고정되어 있다. 변위를 측정하는 센서가 절점 1, 2, 3, 그리고 4 에, 제어력을 가하는 액츄에이터가 절점 1 의 x, y, z 방향에 배치되어 있다. 감쇠특성은 다음과 같다.

$$D_j(a) = \alpha M_j(a) + \beta K_j(a) \quad (28)$$

여기서 $\alpha=0.001$, $\beta=0.001$ 이다. 초기 부재 단면적은 모두 동일하며 ($a_j = 1, j = 1, \dots, 12$), 이 초기 트러스의 중량이 구조중량의 정규값으로 적용된다.

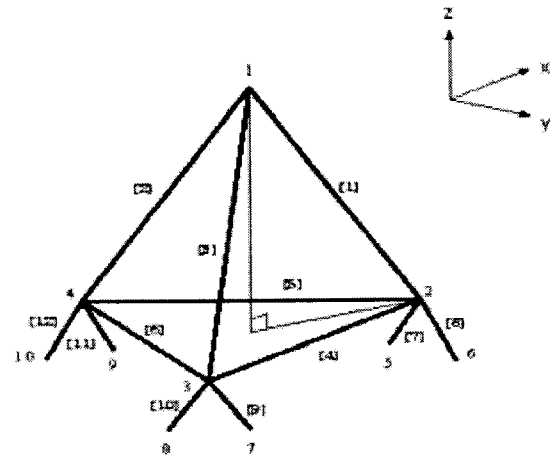


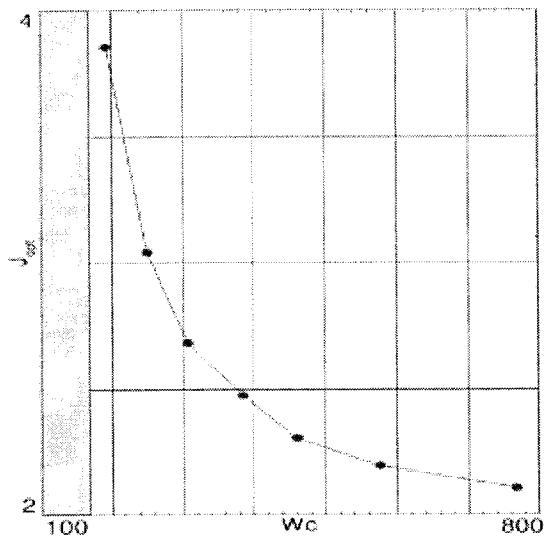
Fig. 2 3-D truss structure

4.2 구조-제어 시스템의 관계

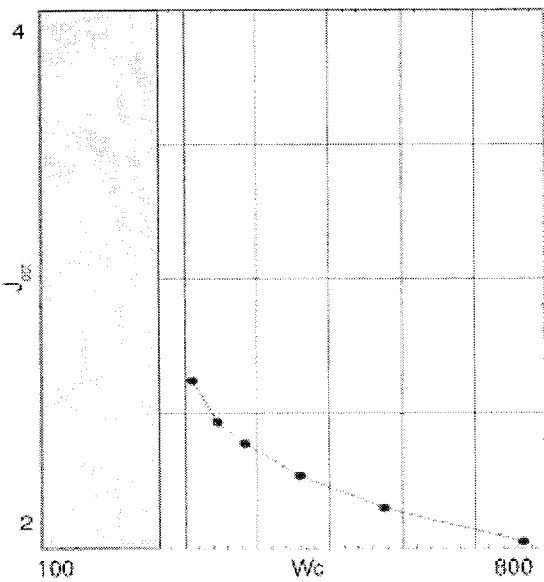
먼저, 가중인자를 $(s, \delta) = (0.5, 0.5)$ 와 같이 설정하여, 몇 가지 경우의 구조중량 정규값 W_0 에 대해, 제어목적함수 J 를 최적화 하였다. Fig. 3에 두 가지 경우의 H_∞ 외란감쇠 γ 에 대한 구조중량 정규값과 제어목적함수 최적값의 관계를 나타낸다. 이 그래프는 구조목적함수 W 와 제어목적함수 J 의 Pareto 최적해를 보여준다. (a) 와 (b) 의 비교에서, 보다 작은 H_∞ norm γ 에서 보다 큰 구조중량이 요구되는 것을 알 수 있으며, 이것은 구조설계와 제어시스템설계의 밀접한 관계를 나타낸다.

4.3 두 제어 목적 함수의 관계

다음으로, 가중인자의 영향을 알아보기 위하여, 구조중량의 특정 정규값 조건에서 제어목적함수의 가중인자 s 및 t 를 변화시키며, 식 (11), (12)의 문제를 풀어본다. Fig. 4에 몇가지 경우의 (s, t) 에 대한 J 의 최소화에 따른 (J_1, J_2) 를 나타낸다. Fig 5는 두 상징적인 경우의 최적단면적을 보인다. 그림의 결과에서, 만약 계인을 고려하는 목적함수 J_2 에 대한 가중인자인 t 값을 증가시키는 경우, 트러스를 지지하는 부분의 부재단면적이 증가하며, 또한 트러스의 각 단의 부재단면적의 차이가 작아지는 것을 알 수 있다.



(a) $\gamma = 1.5$



(b) $\gamma = 2.0$

Fig. 3 Pareto optimality of two objectives for structural and control systems

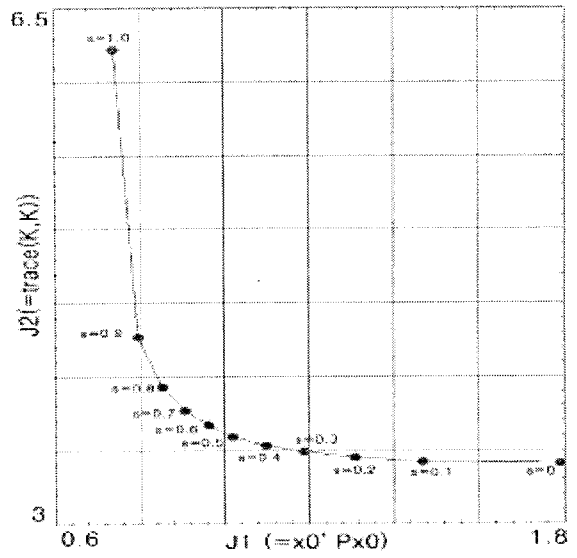
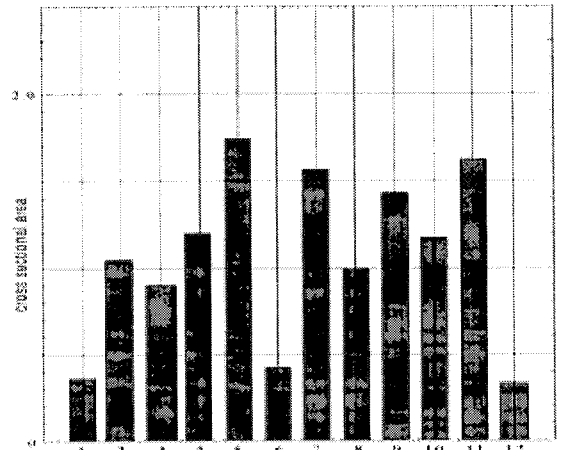
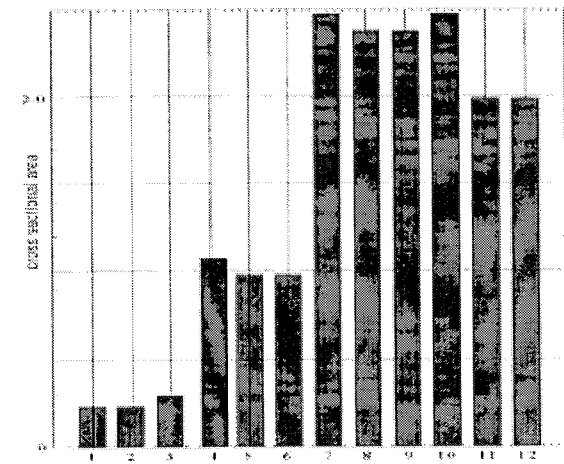


Fig. 4 Pareto optimality of performance indices in control system



(a) $J = J_1 (s = 1.0, t = 0)$



(b) $J = J_2 (s = 0, t = 1.0)$

Fig. 5 Optimum cross sectional area

4.4 설계비교

제어성능에서의 계인의 영향을 보이기 위하여, 두 가지 경우를 생각한다(case1: $s=1, 0, t=0$, case2: $s=0.9, t=0.1$). 이들 설계 사이의 비교에서, 비록 초기하중의 영향은 두 경우 모두 거의 같지만, Table 1에서 볼 수 있듯이 계인을 무시하는 case 1보다 계인을 고려하는 설계인 case 2에서 계인의 크기인 J_2 가 매우 작아진다는 것을 알 수 있다. 여기서, $J_j (j = 1, 2; j = 1, 2)$ 은 case j 에서의 목적함수 J_j 값이다. case 2에서는 모델링 에러에 있어서의 강인안정성 척도인 보충감도함수 H_∞ norm 또한 case 1과 비교하여 작아지는 것을 알 수 있다. 그러므로 피드백 계인의 크기를 고려하는 두 번째 제어목적함수 J_2 를 도입하여 모델링 에러에 대한 강인설계를 수행할 수 있다.

Table 1 Comparison of Pareto optimality

	case1	case2
\bar{J}_1 ($= J_{1j} / J_{11}$)	1.00	1.07
\bar{J}_2 ($= J_{2j} / J_{21}$)	1.00	0.686
H_∞ norm of the complementary sensitivity function	8.59	6.75

5. 결 론

본 논문에서는, 일정 구조 중량 제약조건에서 제어 목적 함수를 고려하는 구조 사이즈를 결정하는 통합 최적 설계 문제를 정식화 하였다. 특히, 두 종류의 제어 목적 함수를 소개 하였다. J_1 은 초기외력의 영향을 나타내며, J_2 는 피드백 계인의 크기를 나타낸다. 먼저, 가중인자법에 의해 두 제어 목적 함수는 하나의 제어 목적 함수로 변환되며, 구조 및 제어 목적 함수에 관한 Pareto 최적해를 구했다. 또한, 수치 시뮬레이션을 통하여 양방의 시스템 사이의 밀접한 관계를 보였다. 다음으로, 구조 중량의 특정 정규값 조건에서 두 번째 제어 목적 함수에 대한 가중인자를 증가시킴으로 각 단의 트리스 부재 단면적의 차이가 작아지는 것을 확인 하였다. 즉, 초기외력만을 고려하는 설계는 예측하지 않은 방향에서의 하중이나 외란에 대하여 취약한 구조물로 설계될 가능성이 있다.

마지막으로, 두 경우 ($J=J_1$ and $J=0.9J_1+0.1J_2$) 의 비교에서, 비록 초기외력의 영향은 거의 같을지라도, 후자가 전자에 비하여 계인의 크기가 매우 작아지는 것을 알 수 있었다. 또한, 후자인 경우 모델링 에러에 대한 강인 안정성의 척도인 H_∞ norm 역시 작아졌다. 그러므로 피드백 계인의 크기를 고려하는 목적함수를 도입하는 것으로서 모델링 에러에 대한 강인설계를 수행할 수 있다는 사실을 보였다.

“이 연구는 2001학년도 신라대학교 교내학술연구비 지원으로 이루어 졌음”

참고 문헌

1. Y. Tada and J. H. Park, 2000, “Simultaneous optimal design of structural and control systems for flexible structure (representation by descriptor system forms”, Trans. of ISCIE, Vol. 13, No. 1, pp. 14~19.
2. Y. B. Kim, 1999, “A Study on Robustness of a Two-Degree-of-Freedom Servo system with Nonlinear Type Uncertainty(ID-Robust Stability Condition”, Int. J. of KCORE, Vol 13, No 3-II, pp. 99~105.
3. M. Sanpei and T. Mita, 1990, “Solution of H_∞ Control in State Space Approach”, Trans. of SICE, 29-2, pp. 19~24.
4. Y. Tada and J. H. Park, 1999, “Combined design of structural and control systems (representation by descriptor system forms and use of LMI)”, Trans. of JSME, Vol 65, No 636, pp. 355~360.
5. H. Kimura, 1990, “From LQG Control to H_∞ Control”, Trans. of SICE, 29-2, pp. 31~37.