韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 17집, 2003. 10. 127-138.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 17, Dec. 2003. 127-138.

수학영재교육에서의 사사

방 승 진 (아주대학교)
이 상 원 (능인고등학교)

아주대과학영재교육원에서 실시되고 있는 수학영재교육에서의 사사에 대한 기본적 아이디어와 과기부 과제 창의적 사사에 대한 생각을 정리하여 본다. 대학교에서 수학영재교육을 실시하는 큰 이유는 수학적 창조자인 수학자에게서 수학논문을 쓰는 법과 수학자로서 필요한 인성을 익히는 일이라고 생각한다.

1. 사사교육의 필요성

그 동안 우리 나라 수학 분야에서의 영재교육은 각종 기관에서 운영하는 수학 경시대회를 통해 학생들의 수학문제해결력을 측정하고 그 점수가 높은 학생들에게 시상하는 일 뿐이었다. 이는 과학고 대학 입학시의 특례나 가산점 때문이며, 자기 계발을 위한 과정으로는 인정받기 힘든 상황이다. 지금도 많은 학생들이 각종 수학 경시대회에 입상하기 위해 유명한 학원에서 수강하려 하거나 여러 종류의 학습지를 푸는데 많은 시간을 보내고 있다. 하지만 이러한 수학 경시대회들은 수학 영재들을 시험문제 잘 푸는 선수로 길러내기는 했지만 그들에게 후속적으로 적절한 별도의 교육 프로그램을 지속적으로 제공하지는 못하였다.

게다가 이런 과정에서의 승자인 수학영재 학생들은 대학교에 들어가서도 제대로된 수학에 대한 관점을 확립하지 못하고 있다. 결국 수학경시대회의 와중에서 수학경시대회가 가장 좋은 것으로 인식하거나 수학이라는 학문에 대한 열정이 생겨나고 있지 않다. 이런 학생들은 다시 수학경시 학원으로 흡수되어 수학이라는 학문의 발전에는 전혀 도움이 안되는 방향으로 진행되고 있다.

이런 이유로 수학경시대회는 대대적인 개편이 필요하며 지금까지의 수학영재에 대한 관점을 바꿀 필요성이 있다. 이제 다시 출발선에서 생각하면 수학영재 교육의 본래의 목적인 수학자와 과학자의 양성을 언급하지 않을 수 없다. 이에 따라 수학영재의 판별에 대한 관점을 수학논문을 잘 쓸 가능성이 있는 학생에게 더 높은 점수를 줄 수 밖에 없다.

최근의 영재성 개념 정의에서는 인간 능력의 구체적인 측면으로 세분화되어 간다는 점과 영재성을 인지적인 능력만이 아니라 호기심, 도전감, 과제집착력 등과 같은 태도나 성향의 비인지적인 특성을 강조하고 있다는 것이다. NCTM(1989)의 규준에서도 수학학습의 목표를 문제해결과 추론능력뿐만 아니라, 수학에 대한 가치인식, 자신의 능력에 대한 확신, 의사소통능력 등을 강조한다.

따라서 인성교육, 직업인으로서의 수학자에 대한 이해, 수학문제해결보다 수학논문을 쓰려는 의지

의 확산을 위하여 사사교육은 꼭 필요하다. 그러나 수학영재교육에서 사사교육을 하기 위해서는 준비과정도 만만치 않다고 생각한다.

2. 사사교육의 의미

사사교육(mentorship)은 수학영재교육에 있어서 전통적인 교육방법이며, 모든 시대와 거의 모든 문화를 통해 전해져 내려왔다. 수학분야의 거장(master)이 있고, 그와 함께 생활하면서 영향을 받고자 하는 도제(apprentices)들이 모여 사사교육이 행해진다.

오늘날 현대적인 의미에서의 사사교육은 영재아들이 엔지니어, 의사, 판사, 교수, 방송인 등과 같은 전문가와 오랫동안 사제의 관계를 유지하도록 하는 것이다. 영재학생은 자신의 사범과 만나서 일주일에 두 세 시간 공부하며, 다양한 활동이나 문제를 직접 배우게 된다.

사사교육에서의 성패는 사범(mentor)에 의해 좌우된다. 전문가가 아닌 사람이 사범이 될 수 없다. 사범은 자신이 가진 전문성을 열정과 새로운 것에 대한 의문을 가진 초심자와 공유하기를 희망하는 사람일 뿐 아니라, 그러기를 열망해야 하는 사람들이다. 좋은 사범은 강한 개인적 성실성, 관망, 유머감각 등이 있는 사람이라고 정의한다(Mattson, 1983)

사범은 교사로서, 전문가로서, 안내자로서, 조언자로서, 친구로서, 역할 모델로서의 역할을 행해야 한다.

사사교육에서 문하생(mentee)의 특성도 중요하다. 모든 영재아들이 준비가 된 것도 아니고 사사교육을 받을 수 잇는 것도 아니다. 사사교육이 시작되기 전에 문하생의 준비성이 신중하게 평가되어야 한다. 준비성은 수학에서 특별한 능력과 남보다 뛰어난 잠재력을 소유하고 연구를 위해 지속적인 관심과 열정, 인내심 그리고 기꺼이 시간을 할애하고 노력하는 태세를 말한다.

Reilly(1992)는 사사교육에 참여할 문하생으로서의 특징으로 강한 도전감, 창의성, 힘든 일을 기꺼이 하려는 의지, 고급 수준의 학습에 대한 기대, 스스로 통학할 수 있는 능력, 교외 학습 활동 시간을 기꺼이 최소화하려는 의지, 응용활동을 기꺼이 완결지으려는 의지, 선별심사위원회에서 수락할 수 있고, 의미있고 중요한 학습 프로젝트를 기꺼이 완결지을 수 있는 의지를 들었다.

3. 수학영재교육에서의 사사

수학문제해결 중심 교육에서 제일 큰 문제점은 수학주제를 집중적으로 다루지 않는다는 것이다. 충분히 심화가 되지 않은 상태로 다양한 주제를 다루게 되면 여러 가지 폐해가 나타나며 그 중에 가장 심각한 것은 자신감의 결여이다. 수학경시대회에서 아주 뛰어난 실력을 가진 학생들 중에 수학적 자신감이 결여된 경우를 많이 목격하게 되는데 이는 수학경시대회 교육이 수학문제 위주로 교육하다 보니 생기는 현상이 아닌가 생각된다.

이에 2003년 전반기는 디오판투스 방정식, 후반기에는 사영기하를 토픽으로 정하고 집중적인 교육을 실시하고 있다. 먼저 학생들에게 강조하는 것은 수학적인 창의성과 검색 능력이다. 따라서 모든 수학용어는 영어로도 가르치고 있으며 학생들은 외국사이트에 대한 검색 능력을 기르고 있다.

다음은 과기부 과제 창의적 사사 연구에서 발췌한 내용이다.

우리나라는 1989년 국제수학올림피아드(IMO)의 참가를 계기로 수학경시대회가 지속적으로 확대되어 왔다. 그동안의 노력이 성과를 거두어 국제수학올림피아드에서는 세계 10위권에 진입하여 안정적으로 순위를 유지하고 있다. 하지만 이에 따른 부작용도 만만치는 않다. 무엇보다도 수학경시대회의 실력이 수학실력으로 연결되지는 않고 있다는 점이다. 우리나라의 수학실력은 여전히 일본에 50년 정도, 미국에는 70년 정도 뒤져 있다. 이는 수학경시대회가 외국과는 달리 수학문화 확산에 기여하지 못하고 있고, 수학경시학원의 발달로 수학경시대회 준비 자체도 수학영재교육 이론에 입각한 준비가 아닌 주먹구구식으로 진행되고 있기 때문이다. 또, 수학경시대회 문제들이 확산적 사고보다는 수렴적 사고를 요하는 문제가 많아서 수학연구가 수학경시대회의 문제해결과 비슷하다는 오해를 광범위하게 확산시키고 있다. 한편으로는 수학영재에게 신선한 충격을 줄 수 있는 주제의 제공이 이루어지지 않고 있어서 수학영재학생들이 다양하게 생각할 여지가 없는게 우리의 현실이다.

이에 본 연구에서는 학생들이 다양하게 생각하고 결과를 산출할 가능성이 높은 디오판투스 방정식의 연구를 주제로 삼아 그동안의 수학자들의 연구 성과를 리뷰하고 학생들이 나름대로 연구가능한 주제를 잡아 수학논문을 써봄으로써 수학자들이 하고있는 작업을 이해시키며 확산적 사고를 기르는 것이 수학영재에게는 중요하다는 사실을 체득시키고자 한다.

수학영재교육의 핵심은 학생들의 실정에 맞게 수학 분야의 확산적 사고 능력을 얼마나 신장시키며 연구하는 자세와 방법을 익히게 하냐에 있다. 이런 관점에서 디오판투스 방정식은 아주 좋은 주제이다. 최근에 수학의 유명한 미해결 문제의 하나인 페르마의 마지막 정리를 증명한 영국의 엔드류 와일즈도 어린 나이에 이 문제를 보고 반드시 해결하겠다고 생각을 하고 모든 생활도 여기에 맞추어 하였고 지도교수도 이 문제 연구에 필요한 사람으로 선택하는 등 집요하게 연구한 결과 성과를 거두었다. 이 페르마의 마지막 정리는 디오판투스 방정식 분야에서 대표적인 문제 중의 하나이며, 다양한 수준과 내용의 주제를 선정할 수 있는 분야가 디오판투스 방정식 연구이다.

본 연구에서는 디오판투스 방정식을 중심으로

(1) 그동안의 디오판투스 연구의 성과가 무엇인지를 조사하여 리뷰

(2) 학생 각 개인이 연구해보고자 하는 주제를 탐색하는 방법 습득

(3) 연구주제 설정 후 논문과 참고문헌 연구하는 방법

(4) 새로운 수학적 사실 발견하는 법

(5) 발견한 수학적 사실을 더욱 확산적으로 발전시키는 방법

(6) 그동안의 연구 성과를 정리하여 수학논문 작성

(7) 수학논문을 여러 사람 앞에서 발표하는 법

등의 단계로 나누어 진행하고자 한다.

이런 과정을 거치면서 수학영재 학생들은 수학자들의 창의적인 연구과정을 체험해보면서 수학연구의 매력을 느끼게 될 것이며, 본인의 논문을 쓰는 기쁨을 느끼면서 앞으로의 수학공부에도 많은 도움이 될 것이라 생각한다.

한편으로 디오판투스 연구는 다항식 시간에 컴퓨터 계산이 가능한지의 밝히는 연구가 진행 중이다. 따라서 본 연구에서도 이런 연구 주제를 잡을 수 있으며 응용으로서 암호론의 정수론적 기초를 다룰 수도 있다. 구체적인 방법론으로는

(1) 그동안의 디오판투스 연구의 성과가 무엇인지를 조사하여 리뷰
- 디오판투스 방정식의 꼴과 연구성과는 어떠한지 다양한 참고문헌을 통하여 조사
- 조사한 결과를 정리하여 연구팀 발표 세미나 개최

(2) 학생 각 개인이 연구해보고자 하는 주제를 탐색하는 방법 습득
- 발표된 조사 결과를 바탕으로 탐색할 주제 선택
- 선택된 주제에 관련된 정밀한 참고문헌 탐색 및 습득

(3) 연구주제 설정 후 논문과 참고문헌 연구하는 방법
- 습득된 참고문헌을 연구하여 연구팀 내에서 발표 세미나 개최
- 연구 방향에 대한 토론

(4) 새로운 수학적 사실 발견하는 법
- 연구방법론을 설정하기 위한 지도교수와의 면담
- 연구 진행

(5) 발견한 수학적 사실을 더욱 확산적으로 발전시키는 방법
- 연구 결과를 극대화시키기 위한 아이디어 교환 회의 개최
- 연구진행

(6) 그동안의 연구 성과를 정리하여 수학논문 작성
- 연구논문의 구조화 작업을 위한 지도교수 특강
- 연구논문 작성

(7) 수학논문을 여러 사람 앞에서 발표하는 법

- 연구논문 발표회 리허설
- 연구논문 발표회 개최

(8) 결과논문을 정리하여 학술지에 발표

4. 결 론

수학문제해결에서 벗어난 수학영재교육은 이제야 시작되었다고 해도 과언이 아니다. 수학영재교육에서의 사사교육을 뒷받침해 주기 위해서는 다음과 같은 사항이 선행되어야 한다고 본다.

(1) 논문발표대회를 개최하여 활성화시키는 일이 필요하다.

(2) 사사교육을 위한 주제가 다양하게 개발되어야 한다.

(3) 사사교육을 담당할 교수나 교사에 대한 교육이 필요하다.

(4) 사교교육에서 나오는 논문들을 수록할 논문집의 발행이 필요하다.

마지막으로 아주대 영재교육원에서 사사교육을 위하여 배포한 유인물을 부록에 제시한다.

참 고 문 헌

김홍원 · 김명숙 · 방승진 · 황동주 (1997). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(II) - 검사 제작 편 -, 한국교육개발원 연구보고 CR97-50, 한국교육개발원.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌 (1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(I) - 기초 연구 편 -. 한국교육개발원 연구보고 CR96-26, 한국교육개발원.

김홍원 · 남승인 · 방승진 · 송상헌 · 조석희 (2003). 교육청 영재 심화 학습자료.

방승진 (2003). 디오판투스 방정식 연구, 창의적사사연구 계획서.

최호성 (2003). 과학적 창의성과 탐구력 신장을 위한 Mentorship, KEDI 2003년도 영재교 육담당교원 심화연수 교재.

<부 록>

사영기하 주제탐구

연구에서는 사영기하를 중심으로 학생들에게 수학연구 방법론과 자세를 가르쳐주고, 학생들이 가능한 범위에서 확산적으로 사고하여 의미있는 수학을 창조하는 경험을 하도록 해준다. 이를 위하여 수학영재 커뮤니티(http://mgifted.co.tv)를 구축하고 ejournal 로 학생상호간에 토론과 보고서 작성 능력을 배양한다.

그동안의 사영기하 연구의 성과가 무엇인지를 조사하여 리뷰

학생 각 개인이 연구해보고자 하는 주제를 탐색하는 방법 습득

- 발표된 조사 결과를 바탕으로 탐색할 주제 선택
  (개별조사, ejournal 에 게시 및 지도교수 검토)
- 선택된 주제에 관련된 정밀한 참고문헌 탐색 및 습득 방안 강구
  (필요시 지도교수 개별면담)

새로운 수학적 사실 발견하는 법

발견한 수학적 사실을 더욱 확산적으로 발전시키는 방법

그동안의 연구 성과를 정리하여 수학논문 작성

수학논문을 여러 사람 앞에서 발표하는 법

등을 익힌다.

우리가 논증기하에서 생각하는 도형 중 가장 기본이 되는 도형은 점과 직선이다. 그런데, 점들과 직선들의 결합관계(곧, 세 쌍의 직선들의 세 개의 교점이 한 직선 위에 있다 또는 세 직선이 한 점에서 만난다 등의 관계)만으로 관련된 도형의 성질을 연구하는 기하학을 사영기하학이라 한다. 이번 주에는 복비의 개념을 도입하여 논증기하의 문제를 풀어보고, 파푸스 정리, 데자르그 정리, 메네라우스 정리등 사영기하학의 정리를 소개한다.

한 직선 위에 있는 점의 열을 점열이라 한다. 점열의 점에서 4점 A, B, C, D 에 대하여 $\frac{AB}{BC} / \frac{AD}{DC} = \frac{AB \times CD}{BC \times DA}$ 를 A, B, C, D 의 복비라 하고 (AC, BD) 로 표기한다. 여기에서 AB = - BA 등으로 선분의 길이는 모두 1차원 벡터로 생각한다. 이 때 (AC, BD) = α 라 두면 다음이 성립한다.

(1) (BD, AC) = α (두 쌍의 점 A, C 와 B, D 의 위치를 서로 바꿀 때)

(2) (CA, BD) = (AC, DB) = $\frac{1}{\alpha}$ (A와 C를 서로 바꾸거나 B 와 D를 서로 바꿀 때)

연습1. (CA, DB) 의 값을 α 로 나타내어라.

연구1. (AB, CD) = 1 − α = 1 - (AC, BD) 를 보여라.

풀이. (AB, CD) + (AC, BD) = $\frac{AC \times BD}{CB \times DA} + \frac{AB \times CD}{BC \times DA}$

$= \frac{(AB+BC)\times(BC+CD)-AB\times CD}{BC\times AD} = \frac{BC\times(AB+BC+CD)}{BC\times AD}$

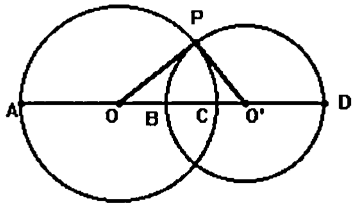
$= \frac{BC\times AD}{BC\times AD} = 1$ 이므로 성립한다.

연습2. A 와 C 가 같은 점이거나 B 와 D 가 같은 점일 필요충분조건은 (AC, BD) = 1 임을 보여라.

(AC, BD) = -1 이면 즉, $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$ 일 때, 점열 A, B, C, D를 조화점열이라 하고, D를 A, C 와 B 의 네 번째 조화점이라한다.

연습3. (AC, BD) = -1 일 때 $\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}\right)$ 임을 보여라.

연구2. A, B, C, D가 조화점열이고, 원 O는 AC를 지름으로 갖는 원, 원 O′는 BD를 지름으로 갖는 원이라 할 때 두 원은 직교함을 보여라. 즉, 두 원의 교점 중 하나를 P 라 하면 ∠OPO′ = 90° 이다.



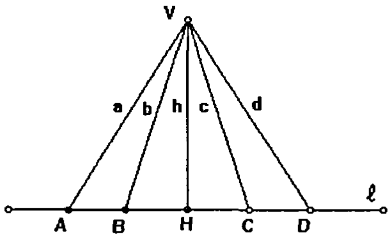
풀이. AB = AO + OB = OC + OB, AD = AO + OD = OC +

OD 와 AC = 2 AO를 연습3 에 대입하면 $\frac{1}{OC} = \frac{1}{OB+OC} + \frac{1}{OD+OC}$ 이고, 정리하면 $OC^2 = OB \times OD$ 이다. 그러므로 OP 는 원 O′ 의 접선이고 $\angle OPO' = 90°$ 이다.
점 B를 원 O에 대한 점 D의 반전, 또한 점 D는 원 O에 대한 점 B의 반전이라 한다. 이런 반전은 변환으로서는 각의 크기를 보존하는 등각사상이다. 이 사실을 이용하여 기하학을 연구하는 것이 반전기하학이다.
우리가 기차선로를 멀리 바라보면 평행한 선로가 마치 만나는 것 같아 보인다. 이 때 보이는 가상의 점을 무한원점이라 하고 ∞로 표시한다. 그리고 무한원점은 직선마다 단 하나 존재하는 것으로 평행선들은 같은 무한원점을 갖는 것으로 해석할 수 있다. 또한 무한원점만으로 이루어진 무한직선도 한 평면에 하나 씩만 있는 것으로 생각한다. 이렇게 생각하면 공리가 쌍대적이 되어 쌍대원리가 성립하게 된다. 즉, '두 점에 의해 한 직선이 단 하나 결정된다.' 의 쌍대인 '두 직선에 의해 한 점이 결정된다.' 가 성립하게 되며, 무한원점 두 개에 의해 한 직선(즉, 무한직선)이 결정되어 무한원점도 보통의 점과 같이 취급할 수 있다.

(AC, BD) = -1 이고 D = ∞이면 연습3 에서 AB = $\frac{AC}{2}$ 즉, B 는 AC 의 중점이다.
점열의 쌍대개념으로서 한 점을 지나는 선들의 집합을 선열이라 하자. 선열 a, b, c, d 의 복비는 $\frac{\sin(a,b)\sin(c,d)}{\sin(b,c)\sin(d,a)}$ 로 정의 된다. 이를 (ac, bd) 로 표기한다. 단, (a, b)는 변 a에서 시작하여 변 b에서 끝나는 각이다. 보통 반시계 방향을 + 각으로 시계 방향을 - 각 으로 잡는다. $(ac, bd) = -1$ 일 때, 선열 a, b, c, d 를 조화선열이라 한다.

연습4. a, b, c, d 를 조화선열일 때 b가 각 (a, c)의 이등분선일 필요충분조건은 b 와 d가 수직임을 보여라.

연구3. 점 V를 지나는 선열 a, b, c, d 가 한 직선 ℓ 과 각각 A, B, C, D에서 만날 때 (ac, bd) = (AC, BD) 임을 보여라.



풀이. V 로 부터 직선 ℓ 로의 수선을 h라 하면

$$(AC, BD) = \frac{AB \times CD}{BC \times DA}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}h \times AB) \times (\frac{1}{2}h \times CD)}{(\frac{1}{2}h \times BC) \times (\frac{1}{2}h \times DA)} = \frac{(VAB) \times (VCD)}{(VBC) \times (VDA)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ab\sin(a,b)\times\frac{1}{2}cd\sin(c,d)}{\frac{1}{2}bc\sin(b,c)\times\frac{1}{2}da\sin(d,a)} = (ac, bd)$$

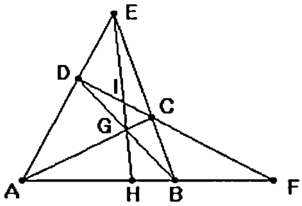
점열 A, B, C, D, …와 점열 A′, B′, C′, D′, … 사이에 1대1대응 관계가 있고 네 점의 복비 (AC, BD) 와 대응되는 네 점의 복비 (A′ C′, B′ D′) 가 같을 때 사영대응이라 하며 (AC BD) $\barwedge$ (A′C′ B′D′) 로 표기한다.
점열 A, B, C, D, …와 점열 A′, B′, C′, D′, … 사이에 1대1대응 관계가 있고 직선 A A′, B B′, C C′, D D′ 등이 한 점 V에서 만날 때 배경대응이라 하며 (ACBD) $\barwedge$ (A′C′ B′D′) 또는 (ACBD) $\barwedge$ V(ACBD) 로 표기한다. 점 V를 배경중심이라 한다.

연습5. (ACBD) $\barwedge$ (A′C′ B′D′) 이면 (ACBD) $\barwedge$ (A′C′ B′D′) 임을 보여라.

연구문제1. 공통원이 있는 두 사영대응 점열은 배경대응함을 보여라.

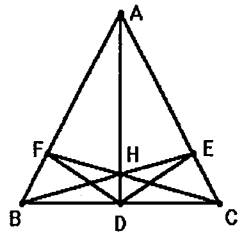
서로 다른 점 A, B, C, D 에 대하여 AC $\cap$ BD = G, AD $\cap$ CB = E, AB $\cap$ DC = F 라 했을 때, ABCD를 E, F, G를 반대각의 점들로 갖는 완전사각형이라 한다.

연구4. 완전사각형 ABCD에서 EG $\cap$ AB = H, EG $\cap$ CD = I 라 할 때. A, H, B, F와 D, I, C, F 는 조화점열임을 보여라.



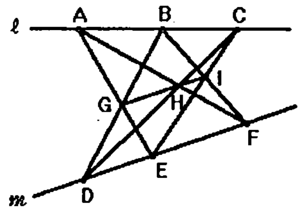
풀이. (ABHF) $\barwedge$ G(ABHF) $\barwedge$ (CDIF) $\barwedge$ E(CDIF) $\barwedge$ (BAHF) 이므로 (AB, HF) = (BA, HF) = $\frac{1}{(\mathrm{AB},\mathrm{HF})}$ 즉, $(\mathrm{AB},\mathrm{HF})^2 = 1$ 이다. 따라서 (AB, HF) = -1 이다. 비슷하게 D, I, C, F 도 조화점열이다.

연구5. 삼각형 ABC의 높이 AD 위의 임의의 점 H에 대하여 BH, CH 가 각각 AC, AB 와 E, F에서 만난다. $\angle FDH = \angle HDE$ 를 증명하여라.

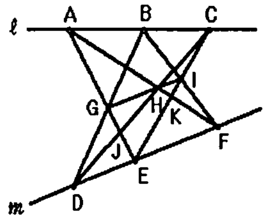


풀이. AB $\cap$ DE = I 라 하면 (AB, FI) = -1 이고 (ABFI) $\barwedge$ D(ABFI) 이므로 직선 DA, DF, DB, DI 는 조화선열이다. AD 와 BD 는 수직이므로 DA 는 $\angle$FDE 를 이등분한다.

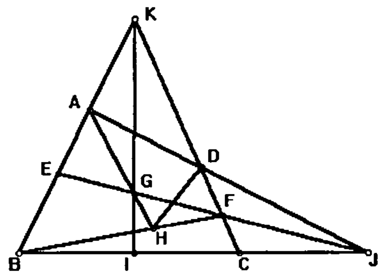
연구6.[파푸스 정리] 직선 ℓ 위에 A, B, C 가 있고 직선 m 위에 D, E, F 가 있다. $AE \cap BD = G$, $AF \cap DC = H$, $BF \cap CE = I$ 라 하면 G, H, I 는 동일 직선 위에 있음을 보여라.



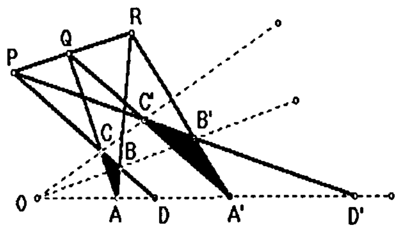
풀이. $AE \cap CD = J$, $AF \cap CE = K$, $AC \cap DF = O$라 하면 (AGJE) $\barwedge$ D(AGJE) $\barwedge$ (ABCO)$\barwedge$ F(ABCO) $\barwedge$ F(ABCO) $\barwedge$ (KICE) 이므로 (AGJE) $\barwedge$ (KICE) 이다. E 가 공통점이므로 (AGJE) $\barwedge$ (KICE) 이다. 배경중심이 $AK \cap CJ = H$ 이므로 GI 는 H를 지난다.



연구문제 2. $BA \cap CD = K$, $AD \cap BC = J$ 라 하고 F에서 CD 와 만나고 J를 지나는 직선과 I에서 BC와 만나고 K를 지나는 직선을 그렸을 때, $JF \cap KI = G$, $DI \cap BF = H$라 하자. 이 때 A, G, H 가 같은 직선 위에 있음을 보여라.



연구7.[데자르그정리] △ABC 와 △A′B′C′ 의 대응하는 변의 교점 $BC \cap B'C' = P$, $CA \cap C'A' = Q$, $AB \cap A'B' = R$ 이 같은 직선 위에 있으면 대응하는 꼭지점들의 연결선 AA′, BB′, CC′ 은 한 점에서 만남을 보여라.



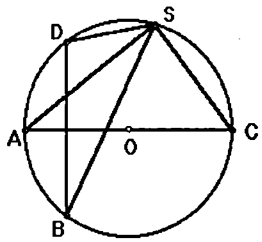
풀이. $PC \cap AA' = D$, $PC' \cap AA' = D'$이라 하면 A(A′PQR) $\barwedge$ (DPCB) $\barwedge$ O(DPCB) $\barwedge$ (D′PC′B′) $\barwedge$ A′(D′PC′B′) 따라서 A(A′PQR) $\barwedge$ A′(D′PC′B′) 이다. 두 선열에 공통선이 있으므로 P, Q, R 은 같은 직선 위에 있다.

연구8. [데자르그정리의 역] △ABC 와 △A′B′C′ 의 대응하는 꼭지점의 연결선 AA′, BB′, CC′ 이 한 점 O에서 만나면 대응하는 변들의 교점 $BC \cap B'C' = P$, $CA \cap C'A' = Q$, $AB \cap A'B' = R$은 같은 직선 위에 있음을 보여라.

풀이. $\triangle QAA'$ 과 $\triangle PBB'$ 에 데자르그 정리를 적용하면 CC′ 이 AA′ 과 BB′ 의 교점을 지남을 알 수 있다.
사실상 데자르그 정리의 쌍대명제는 데자르그 정리의 역이다.

연습6. 삼각형 ABC에서 AD, BE, CF 는 각의 이등분선이다. $EF \cap BC = D_1$, $FD \cap CA = E_1$, $DE \cap AB = F_1$ 일 때, D_1, E_1, F_1은 같은 직선 위에 있음을 보여라.

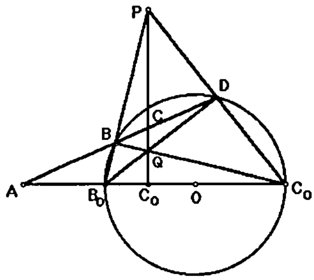
연구9. AC 가 원 O의 지름이고, BD 와 AC 는 수직이며, S는 원 O 위의 임의의 점 일 때, SA, SB, SC, SD 는 조화선열임을 보여라.



풀이. AC 가 BD를 이등분하므로 $\angle DSA = \angle ASB$ 이고 AS 는 SC 와 수직이다. 이제 SA, SB, SC, SD 의 복비는 -1 이 되어 조화선열이 된다.

연습7. 한 현의 모든 원주각이 같다는 사실을 이용하여, 한 원 위에 6개의 점 A, B, C, D, E, F 가 있을 때 E(ABCD) $\barwedge$ F(ABCD)를 보여라.

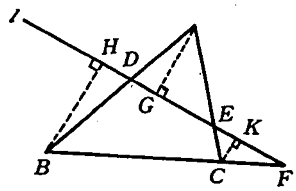
연구문제3. 원 O 의 할선이 원과 B, D에서 만날 때 B, D, A 의 네 번째 조화점 C는 A를 고정시키고 할선을 변화시킴에 따라 직선(그림에서 PQ 이고, AO 와 PQ는 수직이다.)을 이룸을 보여라.



메네라우스 정리를 이용하면 파푸스 정리, 체바의 정리, 데자르그 정리와 역, 파스칼의 정리, 브리앙송정리, 포이어바흐정리(삼각형의 구점원은 내접원과 방접원에 접한다.) 등을 증명할 수 있다.

연구10. [메네라우스정리] 한 직선이 $\triangle ABC$ 의 변 AB, AC, BC 또는 그 연장선과 만나는 점을 D, E, F 라고 하면 $\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$ 이고 역도 성립함을 보여라.

풀이. 그림과 같이 A, B, C 에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 G, H, K 라고 하자. 다른 경우는 연습으로 남겨두자. $\triangle BHF \backsim \triangle CKF$, $\triangle CKE \backsim \triangle AGE$, $\triangle AGD \backsim \triangle BHD$ 이므로



$$\frac{BF}{FC} = \frac{BH}{CK} \cdots①$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CK}{AG} \cdots②$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AG}{BH} \cdots③$$

① × ② × ③에서

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{BH}{CK} \cdot \frac{CK}{AG} \cdot \frac{AG}{BH} = 1.$$

역의 증명은 연습으로 남긴다.

본받을 수학자 파스칼

블레이즈 파스칼(Blaise Pascal, 1623-1662)은 문학의 고전인 [팡세(명상록)]로 알려져 있고, 수학에서의 경력은 그의 종교적인 비범함을 나타내기 위해 몇 줄로 끝내고 있는 것이 보통이다. 수학 방면에서 파스칼은 사상 최대의 '미지수'라 한다. 가장 훌륭한 연구인 확률의 수학적 이론 창조의 공적은 페르마와 나눠가져야 했고, 그가 신동이라고 칭송 받았던 기하학에서도 그의 독창적인 생각은 데자르그가 제시한 것이라 한다. 종교적인 논쟁으로 재능을 썩혔다는 예가 파스칼이라는 것이다. 일곱 살부터 교육을 받기 시작하여 열두살 때 기하학을 배우기 시작했는데 그의 수학적 조숙은 하나의 전설이 되었다. 수학에 대한 어릴 때의 천재성은 사람들이 생각하듯이 변함없이 계속 성장하는 것이 아닌 것 같다. 그러나 수학의 조숙함은 종종 빛나는 성숙으로 향한 최초의 섬광인 경우도 있다. 파스칼의 경우 어릴 때의 수학적 천재가 성장함에 따라 사라져 버린 것이 아니라 다른 흥미 때문에 질식된 것이다. 그는 유클리드의 [기하학 원론]을 공부하기 시작하여 16세에 기하학의 전 영역 중 가장 아름다운 정리 중의 하나인 파스칼의 정리 '원추곡선에 내접하는 6각형(신비적 6변형이라 한다.) 의 연장선이 만나는 점은 모두 동일직선 위에 있다.' 를 발견했다. 18세 때 사상 최초의 계산기를 발명하고 제작했다. 그는 등시강하선(곡선상에 어디에 질량점을 놓아도 그것이 중력의 영향으로 곡선을 따라 미끄러질 때 같은 시간으로 최저점에 도달하는 곡선)으로서 사이클로이드에 관한 많은 중요한 문제를 해결했다. 이는 최후의 수학적 활동이자 또 과학에 대한 유일한 공적이었다. 파스칼은 1654년 페르마와의 편지교환으로 확률론의 기본 원리를 전개했다. 이것은 직업적 도박사 메레의 기사(騎士)가 파스칼에게 던진 문제로서 두 사람의 경기자가 승부에 이기기 위해 일정수의 점수를 따야만 하는데 승부가 나기전에 그들이 그만둘 경우 어떤 방법으로 판돈을 분배하면 좋을 까 하는 것이었다. 조합이론과 확률이론문제와 관련하여 파스칼은 자신의 이름이 붙은 숫자삼각형을 널리 사용했다.

자세한 것은 안재구 옮김, E.T.벨 지음, 수학을 만든 사람들, 미래사를 참고하기 바랍니다.